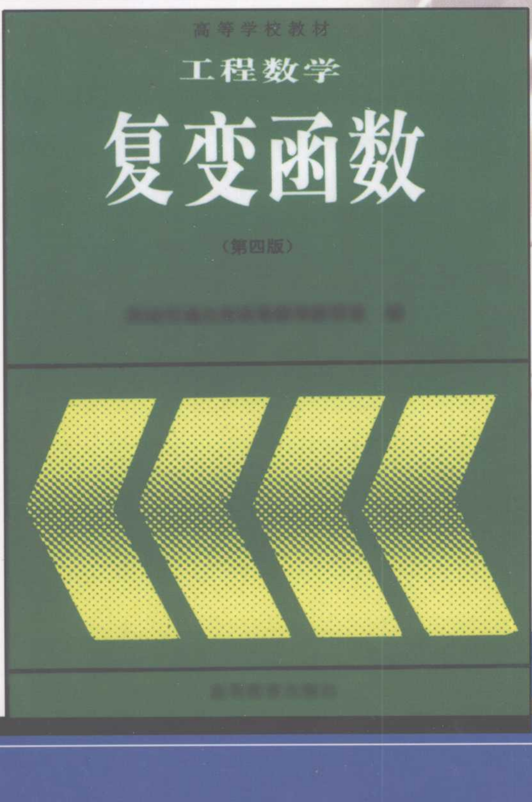
成功笔记系列丛书

复变函数

成功笔记

成功笔记系列丛书编写委员会◎编



NOTES TO SUCCESS

哈尔滨工程大学出版社

成功笔记系列丛书

复变函数成功笔记

(配西安交通大学高等数学教研室第四版教材·高教版)

成功笔记系列丛书编写委员会　编

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合西安交通大学高等数学教研室编写的《复变函数》一书而编写的辅导书。全书按教材的章节顺序编排，对教材中的重点、难点进行了细致的总结和讲解，并给学生留下了自己总结和小结的空间，旨在帮助学生掌握复变函数的基本知识，达到将书读薄、读透的目的。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数成功笔记/《成功笔记系列丛书》编写委员会编.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2007.4
(成功笔记系列丛书)
ISBN 978-7-81073-972-6

Ⅰ.复… Ⅱ.成… Ⅲ.复变函数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第044741号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 4
字　　数 50千字
版　　次 2007年6月第1版
印　　次 2007年6月第1次印刷
定　　价 8.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

成功笔记系列丛书编委会

Preface 前言

经过精心的策划和组织,与高等学校优秀教材相配套的成功笔记系列丛书出版面世了。

一直以来,课堂上“老师讲、学生记”已经成为学校教学约定俗成的习惯。但是,很多学生因为忙于记录而忽略了对知识的理解和吸收,影响了课堂听课效果。而且近几年来教学方法和手段也在不断地发展和变化,多媒体教学和双语教学等也越来越广泛,而在这些过程中学生也根本来不及记录笔记。

本套丛书的编辑出版正是为了解决学生遇到的以上问题。丛书以大学课程的教学大纲为依据,以国内通用的权威教材为基础,收集、整理了部分课程的笔记,总结和归纳了相关知识点,帮助学生从机械记录老师板书或教案的工作中解脱出来,有更多的时间和精力、更大的自由来灵活掌握老师讲解的内容,汲取更多的知识。本套丛书有如下特点:

1.优秀教师编写。笔记与教材内容紧密结合,而更强调知识体系的连贯性和完整性,对教材中的主要内容进行细致讲解,知识结构清晰明了。丛书是集中了多位在教学第一线的优秀教师多年教学过程中对知识的总结和概括,而不是书本的简单重复,帮助学生真正做到将书“读薄,读透”。

2.随文安排加宽的空白处(即 Margin 部分),给学生以听课过程中随堂补充记录对知识的补充、说明、理解、例题、习题的空间,这样一方面便于学生课上结合笔记学习,提高学习效率,另一方面,也便于学生课后对老师讲授的内容进行有效、有序的复习。并且书中的每一章最后都有小结及学习体会部分,方便学生进行自我总结和自我归纳,加深理解。

3.版本小巧,携带方便。

希望本套丛书的出版能够真正地帮助同学们的课堂和课后的学习,使其摆脱临摹老师的板书和教案的负担,有更多的时间扎实、认真地对课堂知识进行理解和吸收,从而走向成功之路。

由于时间仓促,本书还有很多的不足之处,欢迎读者提出宝贵的意见和建议,来信请寄哈尔滨工程大学出版社。

E-mail:cbs_shil@hrbeu.edu.cn

Contents

目录

Contents

第 1 章　复数与复变函数

1.1　复数及其代数运算

1. 复数的概念

定义　对任意两实数 x,y，称形如 $z=x+iy$ 的表达式为复数. 其中 $i=\sqrt{-1}$ 称为虚单位，且具有性质 $i^2=-1$. x,y 分别称为复数的实部和虚部，记作

$$\mathrm{Re}(z)=x;\ \mathrm{Im}(z)=y$$

复数的模 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$.

复数 $z_1=z_2\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2),\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$.

复数 $z=0\Leftrightarrow\mathrm{Re}(z)=\mathrm{Im}(z)=0$.

2. 复数的代数运算

(1)四则运算的定义

①两个复数的加(减)法定义为实部与实部、虚部与虚部对应分别相加减，即

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+i(y_1\pm y_2)$$

②两个复数相乘按多项式乘法法则，有

$$z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_2y_1+x_1y_2)$$

③若 $z_2\neq 0$，则两复数的除法为

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{|z_2|^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{|z_2|^2}\quad(z_2\neq 0)$$

(2)运算规律

复数的运算满足交换律、结合律、分配律，即

$$z_1+z_2=z_2+z_1$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$
$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

3.共轭复数

(1)共轭复数的定义

实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数,即若 $z = x + iy$,称 $\bar{z} = x - iy$ 为 z 的共轭复数.

(2)共轭复数的性质

(1)$\overline{(z_1 \pm z_2)} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$,$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$;

(2)$\bar{\bar{z}} = z$;

(3)$z \cdot \bar{z} = [\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \Rightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$;

(4)$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$,$z - \bar{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$.

1.2 复数的几何表示

1.复平面

(1)复数的复平面表示法

复数 $z = x + iy$ 由一对有序实数(x, y)唯一确定,所以对于平面上给定的直角坐标系,复数的全体与该平面上点的全体成一一对应的关系.因此用点(x, y)表示复数 $z = x + iy$ 的方法称为复数的复平面表示法.此时它们的对应关系为 x 轴为实轴;y 轴为虚轴;两轴所在平面为复平面或 z 平面.

(2)复数的向量表示法

复数 $z = x + iy$ 与点 $P(x, y)$对应,同时还与从原点指向点 P 的平面向量 $\boldsymbol{OP}$ 一一对应.

向量的长度称为复数 $z = x + iy$ 的模或绝对值,记为

$$|z| = |\boldsymbol{OP}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

向量的辐角记作 $\theta = \mathrm{Arg}(z)$，此时 $\tan(\mathrm{Arg}z) = \dfrac{y}{x}$.

辐角有无穷多个，其中 $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$ 的辐角 θ_0 称为辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的主值，记作 $\arg z$，则

$$\theta_1 = \mathrm{Arg}z = \theta_0 + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

其中，θ_1 为复数 z 的任一辐角.

当 $z = 0$，即 $\boldsymbol{OP} = 0$ 时，辐角无意义.

辐角主值 $\arg z = \theta$ 可由 $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 来确定，即 $\arg z(z \neq 0)$ 的计算公式为

$$\arg z \begin{cases} \arctan \dfrac{y}{x} & x > 0, y \in R \\ \pm \dfrac{\pi}{2} & x = 0, y \neq 0 \\ \arctan \dfrac{y}{x} \pm \pi & x < 0, y \neq 0 \\ \pi & x < 0, y = 0 \end{cases}$$

由向量表示法可知 $|z_2 - z_1|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离，由此可知

$$|z_2 + z_1| \leqslant |z_2| + |z_1|$$
$$|z_2 - z_1| \geqslant \big||z_2| - |z_1|\big|$$

(3)复数的三角表示法

由直角坐标与极坐标的关系 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$，得 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，称为复数的三角表示式. 这种表示方法称为复数的三角表示法.

复数的三角表示使复数的乘除有了几何意义，即为

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

向量 z_1, z_2 的夹角为

$$\mathrm{Arg}\frac{z_1}{z_2} = \mathrm{Arg}z_1\bar{z}_2$$

非零向量 z_1 与 z_2 垂直$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)=0$.

非零向量 z_1 与 z_2 平行$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z_1 \cdot \bar{z}_2)=0$.

(4)复数的指数表示法

在复数的三角表示式中,由 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ 可得复数的指数表示式为

$$z=re^{i\theta}$$

这种表示形式称为复数 z 的指数表示法.

2.复球面

(1)复球面的概念

取一个球面,使之与复平面切于原点 $z=0$,球面上的一点 S 与原点重合,过 S 作复平面的垂线与球面交于另一点 N,称 N 为北极,S 为南极.球面上的每一点都有唯一一个复数与它对应,这样的球面称为复球面.

复平面上与复球面上 N 点对应的点称为无穷远点,记为 ∞.对于复数 ∞ 来说,实部、虚部与辐角的概念均无意义,它的模规定为 $+\infty$,即 $|\infty|=+\infty$.

复平面 C 中所有点加上无穷远点 ∞,组成扩充复平面,记为 $\bar{C}$,即

$$\bar{C}=C\cup\{\infty\}$$

(2)关于无穷远点的四则运算

$\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty\ (\alpha\neq\infty)$;

$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty\ (\alpha\neq\infty)$;

$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty\ (\alpha\neq 0)$;

$\dfrac{\alpha}{\infty}=0, \dfrac{\infty}{\alpha}=\infty\ (\alpha\neq\infty), \dfrac{\alpha}{0}=\infty$ ($\alpha\neq 0$,但可以是∞).

不规定 $\infty\pm\infty$,$0\cdot\infty$,$\dfrac{\infty}{\infty}$的意义,$\dfrac{0}{0}$不确定.

(3)一般图形的复数表示

引进复数的几何表示,可将平面图形用复数方程(或不等式)表示;反之,也可由给定的复数方程(或不等式)来确定它所表示的平面图形.

下面列举几个平面图形的表示.

圆:$|z-z_0|=r$.

线段的垂直平分线：$|z-z_0|=|z-z_1|$.

椭圆：当 $2a>|z_0-z_1|$ 时，$|z-z_0|+|z-z_1|=2a$；当 $2a=|z_0-z_1|$ 时，表示线段.

双曲线：当 $2c>2a$，$||z-z_0|-|z-z_1||=2c$.

抛物线：$|z-z_0|=|\mathrm{Re}(z)-x_0|$.

1.3 复数的乘幂与方根

1.乘积与商

定理 1 两个复数乘积的模等于它们的模的乘积，两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.

定理 1 可推广到 n 个复数的乘积.

证明 设
$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)=r_1e^{i\theta_1}$$
$$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)=r_2e^{i\theta_2}$$

则
$$\begin{aligned}z_1z_2&=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)]\\&=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}\end{aligned}$$

因此 $|z_1z_2|=r_1r_2$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$.

乘积 z_1z_2 的向量的几何意义是将复数 z_1 按逆时针方向旋转一个角度 $\mathrm{Arg}z_2$，再将其伸缩到 $|z_2|$ 倍得到的向量.

定理 2 两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的辐角等于被除数与除数的辐角之差.

证明 设 $z_1=r_1e^{i\theta_1}$，$z_2=r_2e^{i\theta_2}$，由复数除法的定义知 $z=\dfrac{z_2}{z_1}$，即 $z_1z=z_2$.

又因为 $|z||z_1|=|z_2|$ 及 $\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}z_2\ (z_2\neq 0)$，所以 $\mathrm{Arg}z=\mathrm{Arg}z_2-\mathrm{Arg}z_1$，即
$$z=\frac{z_2}{z_1}=\frac{r_2}{r_1}e^{i(\theta_2-\theta_1)}$$

2.幂与根

(1)幂

定义 n 个相同复数 z 的乘积,称为 z 的 n 次幂,记作 z^n,即 $z^n = z \cdot z \cdots z$(共 n 个).

设 $z = re^{i\theta}$,由复数的乘法定理和数学归纳法可证明

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r^n e^{in\theta}$$

特别地,当 $|r| = 1$ 时,即 $z = \cos n\theta + i\sin\theta$,则有

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad (\text{棣莫弗(De Moivre)公式})$$

$z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$,由定义得 $z^{-n} = r^{-n}e^{-in\theta}$.

(2)方根

当 $z \neq 0$ 时,有 n 个不同的 ω 值与 $\sqrt[n]{z}$ 相对应,每一个这样的 ω 值都称为 z 的 n 次方根,记作 $\omega = \sqrt[n]{z}$.

设 $\omega = \rho e^{i\varphi}$,由 $\omega^n = z$,有 $\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}$,因此有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi \quad (k \in Z)$$

$$\omega = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

$$= \sqrt[n]{r}\left|\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right|$$

当 $k = 0,1,\cdots,n-1$ 时,可得 n 个不同的根,而 k 取其他整数时,这些根又会重复出现.几何上 $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值是以原点为中心,$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆周上 n 个等分点,即它们是内接于该圆周的正 n 边形的 n 个顶点.

1.4 区 域

1.区域的概念

复平面上以 z_0 为中心,任意 $\delta > 0$ 为半径的圆 $|z - z_0| < \delta$ 内部的点的集合称为点 z_0 的邻域,记为 $O(z_0, \delta)$,由不等式 $0 < |z - z_0| < \delta$ 所确定的点集称为 z_0 的去心领域,记为 $\overline{O}(z_0, \delta)$,即

$$O(z_0,\delta)=\{|z-z_0|<\delta\}$$
$$\overline{O}(z_0,\delta)=\{z_0<|z-z_0|<\delta\}$$

设 G 是一平面上点集，z_0 为 G 中任意一点，则定义如下概念.

内点——对任意 $z_0\in G$，若存在 $O(z_0,\delta)$，使得 $O(z_0,\delta)\subset G$，则称 z_0 是 G 的内点.

外点——对任意 $z_0\in G$，若存在 $O(z_0,\delta)$，使得 $O(z_0,\delta)\cap G=\varnothing$，则称 z_0 是 G 的外点.

聚点——对于集合 G，z_0 是平面上一点，若在 z_0 的任一邻域内都含有 G 的无穷多个点，则称 z_0 为 G 的一个聚点.

开集——若 G 内的每一点都是内点，则称 G 是开集.

连通集——指 G 中的任意两点均可用完全属于 G 的折线连接起来，则称 G 为连通集.

区域——设 D 是一个开集，且 D 是连通的，则称 D 是一个区域.

边界与边界点——已知点 P 不属于 D，若点 P 的任何邻域中都包含 D 中的点及不属于 D 的点，则称 P 是 D 的边界点. 区域的边界可能是由几条曲线和一些孤立的点所组成的. 闭区域 D 与它的边界一起构成闭区域，记作 $\overline{D}$.

有界区域与无界区域——若存在 $M>0$，对任意 $z\in G$ 均满足 $|z|<M$，则称 G 为有界区域，否则称 G 为无界区域.

2. 单连通域与多连通域

(1)简单曲线

设曲线 $C:z(t)=x(t)+iy(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$. 当 $x(t)$，$y(t)$ 连续时，称 C 为连续曲线.

对于介于 a,b 间的 t_1 和 t_2，当 $t_1\neq t_2$ 且 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点，没有重点的连续曲线 C 称为简单曲线.

如果简单曲线 C 的起点和终点重合，即 $z(a)=z(b)$，那么称 C 为简单闭曲线或 Jordan 闭曲线.

简单闭曲线的性质是任一条简单闭曲线 $C:z=z(t)$，$t\in[a,b]$，把整个复平面唯一地分成三个互不相交的部分：一个是

有界区域,称为 C 的内部;一个是无界区域,称为 C 的外部;还有一个是它们的公共边界 C.

(2)光滑曲线

$x(t)$和 $y(t)$是两个连续的实变函数,曲线 $z(t)=x(t)+iy(t)$连续,如果在区间 $a\leqslant t\leqslant b$ 上,$x'(t)$和 $y'(t)$都是连续的,且对于 t 的每一个值,有$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$,那么称这曲线为光滑的.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按段光滑曲线.

(3)单连通域与多连通域

定义 复平面上的一个区域 B,如果在其中任作一条简单闭曲线,而曲线的内部总属于 B,就称为单连通域.一个区域如果不是单连通域,就称为多连通域.

一条简单闭曲线的内部是单连通域.

单连通域 B 的特征是属于 B 的任何一条简单闭曲线,在 B 内可以经过连续的变形而缩成一点.

1.5 复变函数

1.复变函数的定义

(1)复变函数

定义 设 G 是一个复数 $z=x+iy$ 的集合,如果存在一个确定的法则 f 使集合中的每一个复数 z 有一个或几个复数 $\omega=u+iv$ 与之对应,则称复变数 w 是复变数 z 的函数(简称复变函数),记作

$$w=f(z)$$

若 z 有一个 w 值,则称 $f(z)$是单值函数;如果 z 有两个或两个以上 w 值,则称 $f(z)$是多值函数.

集合 G 称为$f(z)$的定义集合,对应于 G 中所有 z 的一切 w 值所组成的集合 G^*,称为函数值集合.

(2)复变函数与自变量之间的关系

设 $z=x+iy$,$w=u+iv$,则从 $w=f(z)=f(x+iy)=u+iv$

可知 u,v 是关于 x,y 的二元实函数,即

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$$

故

$$u=u(x,y)$$
$$v=v(x,y)$$

2.映射的概念

(1)映射

在几何上,$w=f(z)$可以看作是把 z 平面上的一个点集 G 变换到 w 平面上的一个点集 G^* 的映射(变换),通常简称为由函数 $w=f(z)$所构成的映射,称 w 为 z 的像(映像),而 z 称为 w 的原像.

这个映射通常简称为由函数 $w=f(z)$所构成的映射.

(2)复变函数的几何意义

在复变函数中用两个复平面上点集之间的对应关系来表达两对变量 u,v 与 x,y 之间的对应关系,可以在研究和理解复变函数问题时,借助于几何直观.

(3)反函数(逆映射)

定义 设函数 $w=f(z)$的定义集合为 z 平面上的 G,函数值集合为 w 平面上的 G^*,那么 G^* 中的每一个点 w 必会对应着 G 中的一个(或多个点),于是在 G^* 上就确定了一个单值(或多值)函数 $z=\varphi(w)$,则称$z=\varphi(w)$为 $w=f(z)$的反函数(逆映射).

对任意 $w\in G^*$,有 $w=f[\psi(w)]$.

当反函数为单值函数时,有 $z=\varphi[f(z)],z\in G$.

1.6 复变函数的极限和连续性

1.函数的极限

定义 设函数 $w=f(z)$定义在 $z\in\overset{\circ}{O}(z_0,\rho)$内,若有一确定的数 A 存在,则对于任意给定的 $\varepsilon>0$,则必有一正数 $\delta(\varepsilon)(0<\delta\leqslant\rho)$,使得当 $0<|z-z_0|<\delta$ 时,有 $|f(z)-A|<\varepsilon$ 成立,则称

A 为$f(z)$当 $z\to z_0$ 时的极限,记作

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=A$$

或记作当 $z\to z_0$ 时,$f(z)\to A$.

函数极限的几何意义是当变点 z 一旦进入 z_0 的充分小的去心邻域时,它的象点 $f(z)$就落入 A 的一个预先给定的 ε 邻域中.

注意:定义中 z 趋向于z_0 的方式是任意的,比一元实变函数极限定义的要求更高.

定理 1 设

$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y),A=u_0+iv_0$$

$$z=x+iy,z_0=x_0+iy_0$$

则$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A=u_0+iv_0$ 的充要条件是

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}u(x,y)=u_0,\quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}v(x,y)=v_0$$

通过定理 1,可以将求复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$的极限问题转化为求两个二元实变函数 $u=u(x,y)$和 $v=v(x,y)$的极限问题.

定理 2 若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A,\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=B$,那么

(1)$\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)\pm g(z)]=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\pm\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=A\pm B$;

(2)$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)g(z)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)\lim\limits_{z\to z_0}g(z)=AB$;

(3)$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$.

(4)若$\lim\limits_{z\to 0}f\left(\dfrac{1}{z}\right)=A$ 存在,则$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$.

若$\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{f(z)}=0$,则$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

2.函数的连续性

定义 若$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,则称 $f(z)$在 z_0 处连续;若 $f(z)$在区域 D 内处处连续,则称 $f(z)$在 D 内连续;若 $z,z_0\in C$,且$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$,则称 $f(z)$在曲线 C 上点 z_0 处连续.