高职高专“十一五”规划教材

高等数学

上册

姜建清　钱志良　主编

化学工业出版社

高职高专"十一五"规划教材

高等数学

上册

高职高专“十一五”规划教材

高等数学

上册

姜建清　钱志良　主编

化学工业出版社

·北京·

本教材根据高职高专数学教学的特点，结合高职高专数学教学的现状、特色，充分汲取了近年来高职高专院校数学课程改革的成功经验编写而成.

本教材分上、下两册出版，上册内容包括函数、极限和连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用；下册内容包括微分方程、空间解析几何与向量代数，多元函数微分法及其应用、线性代数、概率论与数理统计.每一章后面均安排小结以及例题精讲，着重提高学生分析问题、解决问题的能力.

本教材精选内容，主次分明，注重实用，适合各类高职高专院校、成人高校的工程技术类、经济管理类各专业学生学习，也可供相关的工程技术人员学习参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学.上册/姜建清，钱志良主编.—北京：化学工业出版社，2007.8
高职高专"十一五"规划教材
ISBN 978-7-122-00871-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①姜…②钱… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 113296 号

责任编辑：于 卉 刘 静
责任校对：蒋 宇　　　　装帧设计：吴 飞

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）
印　　装：北京白帆印务有限公司
787mm×1092mm 1/16 印张 11¾ 字数 288 千字 2007 年 8 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　价：19.00 元

前　言

在科学技术飞速发展的今天，要想理解近代及现代科学技术，学习和掌握高等数学的知识尤为重要．要学好高等数学这门课程，首先要完成从中学到大学的学习方法的转变，建立适合自己的学习数学的方法；其次要提高分析问题、解决问题的能力，更重要的是让学生体会到高等数学中发现问题、提出问题，最后解决问题的思想方法——即数学思想．

本教材旨在帮助学生理解高等数学中的基本概念，引导学生掌握高等数学的解题方法和技巧，启发、培养学生的学习兴趣．本教材突破传统教材体系，精选内容，主次分明，删减枝节，注重实用，讲求实效，可根据高职高专不同专业、不同的学生类别选学不同的内容，供选学的面宽．所选的例题和练习题均以帮助学生理解概念、掌握方法为目的，删除单纯性技巧和难度较大的习题，增加富有启发性、应用性，为专业服务的题目．

为进一步提高学生课外自学、课后复习的效率及效果，本教材每一章后面均安排小结以及例题精讲，收集了编者多年来在与学生接触中发现的有代表性的问题进行解答，内容及方法涉及基本概念、基本理论的深入理解，解题思路的启发诱导等．希望通过这些例题的启发，提高学生分析问题、解决问题的能力．

本书分上、下两册出版，上册由四位编者分工编写，其中第一章由姜建清执笔，第二章由戴娟执笔，第三、四章由钱志良执笔，第五、六章由蒋勤执笔，各章都经过反复讨论、修改后定稿．

本书在编写过程中，得到化学工业出版社领导及编辑的大力支持，在此向他们表示感谢．

编者虽然对本书的编写做出了最大努力，但由于水平与经验有限，加之时间仓促，疏漏之处在所难免，敬请广大读者指正．

编者

2007 年 6 月

目　　录

第一章

函数、极限和连续

在中学阶段学习基本初等函数的图形和性质的基础上，本章将引进复合函数和初等函数的概念，学会把一个初等函数作分解．

极限是描述数列和函数的变化趋势的重要概念，它是微积分学的重要基本概念之一．微积分学中的其他几个重要概念，如连续、导数、定积分等，都是用极限来表达的，并且微积分学中的很多定理也是用极限方法推导出来的．

这一章将介绍函数关系，数例和函数极限的概念，求函数极限的方法及函数的连续性．

第一节　函数关系

一、函数关系

1. 函数的定义

人们常常见到如下公式和曲线方程．

圆周长公式：$L=2\pi r(r\geqslant 0)$；

圆面积公式：$S=\pi r^2(r\geqslant 0)$；

自由落体的速度公式：$V=gt(t\geqslant 0)$；

直线方程：$y=ax+b(-\infty<x<+\infty)$；

抛物线方程：$y=(x-a)^2+b(-\infty<x<+\infty)$；

双曲线方程：$xy=1(x\neq 0)$.

它们的共同点是至少有两个变量，当一个变量在给定的范围内取得一个定值后，可以通过公式或方程确定出另一个变量的值．

定义 1　设 D 是一个给定的数集，如果对于每一个数 $x\in D$，变量 y 按一定法则总有一个确定的数值与之相对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作 $y=f(x)$，x 称作**自变量**，y 也称作**因变量**，数集 D 称作函数 $y=f(x)$ 的**定义域**．

例如，设 f 是这样一个对应规则：对任意 $x\in\mathbf{R}$，有 x^2+1 与之对应．这个 f 就是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个函数关系，记作 $y=x^2+1$ 或 $f(x)=x^2+1$.

函数 $y=f(x)$ 中的"f"表示函数的对应规则，即对每一个 $x\in D$ 按规则 f 有一个确定的 y 值与之对应．

对应规则也常用 y，φ，h，g，F 等表示，此时函数就记作 $y(x)$，$\varphi(x)$，$h(x)$，$g(x)$，$F(x)$ 等．

当 x 取值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的值称作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值，记作 y_0、$f(x_0)$ 等．当 x 取遍 D 的每一个数值，对应的函数值的全体 $\{y\mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**，记作 Z 或 $Z(f)$.

在平面直角坐标系中，取自变量在横轴上变化，因变量在纵轴上变化，则平面点集$\{(x, y) | y=f(x), x\in D\}$称为函数$y=f(x)$的**图形**．

定义域和对应规则是确定函数关系的**两个要素**．

例 1 $y=\arcsin(2+x^2)$是否是函数关系？

例 2 $x>y$是否是函数关系？

例 3 研究$y=x$与$y=\dfrac{x^2}{x}$是不是相同的函数关系．

例 4 研究$y=x$与$y=\sqrt{x^2}$是不是相同的函数关系．

2. 定义域的确定

习惯上，常常只给出函数的对应规则，而不给出函数的定义域，这时函数的定义域认为是使函数有意义的点的集合．

例 5 确定函数$y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$的定义域．

解 要使函数有意义，必须$3x-2>0$且$\lg(3x-2)\neq 0$，即$x>\dfrac{2}{3}$且$x\neq 1$. 因此函数的定义域为$D=\left(\dfrac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

例 6 确定函数$y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$的定义域．

解 要使函数有意义，必须$\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$且$x^2<25$，解之得$-4\leqslant x<5$，于是得函数的定义域为$D=[-4, 5)$.

在函数关系定义中要求对每一个$x\in D$，都有一个确定的y值与之对应．但常常遇到另一种关系，例如$y=\pm\sqrt{25-x^2}$，对于每一个$x\in[-5,5]$都有两个y值与之对应，按前面函数关系的定义，它不是一个函数关系．但为了方便，把对于非空集合D中的x值有多个y值与之对应的关系称为**多值函数**．

例如，设变量x与y满足$x^2+y^2=25$，$x\in[5,5]$，问y是否是x的函数?

不是，因为对每个$x\in[5, 5]$，可以确定两个y：$y=\pm\sqrt{25-x^2}$，不符合函数的定义．

对于多值函数$y=\pm\sqrt{25-x^2}$，可以把它分成两个单值函数$y=\sqrt{25-x^2}$与$y=-\sqrt{25-x^2}$，在图形上它们分别表示在横轴以上与横轴以下的两个单值分支．

$f(x)$表示将规则f施用于x，如果把$f(x)$中括号内的x转换成$D(f)$中的某个具体数值或表示数值的字母以及某个数学式子，则表示将规则f施用于那个具体数值或表示数值的字母以及某个数学式子．

例如，若$f(x)=x^2$，那么有以下的等式成立．

① $f(2)=2^2=4$；

② $f(a)=a^2$；

③ $f(x+1)=(x+1)^2=x^2+2x+1$；

④ $f\left(-\dfrac{1}{y}\right)=\left(-\dfrac{1}{y}\right)^2=\dfrac{1}{y^2}$；

⑤ $f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$.

二、函数的表示法

1. 函数的三种表示法

(1) 公式法

公式法表示函数举例如下．

例 7　$y=\dfrac{1}{x(x-1)}+\sqrt{9-x^2}$给出了 y 与 x 的函数关系，这就是用公式表示的函数，它的定义域为

$$D=[-3,0)\cup(0,1)\cup(1,3].$$

(2) 表格法

表格法表示函数举例如下．

例 8　某城市一年里各月毛线的零售量如表 1-1 所示．

表 1-1　某城市一年中各月毛线零售量表

月份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
零售量 s/百公斤	81	84	45	45	9	5	6	15	94	161	144	123

此表表示了某城市毛线的零售量 s 随月份 t 而变化的函数关系．这个函数关系就是用表格表示的，它的定义域为

$$D=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}.$$

(3) 图形法

图形法表示函数举例如下．

例 9　在某河道的一个断面中，其深度 y 与从岸边 O 到测量点的距离 x 之间的对应关系如图 1-1 所示．这里深度 y 与测距 x 的函数关系是用图形表示的，它的定义域为 $D=[0,b]$.

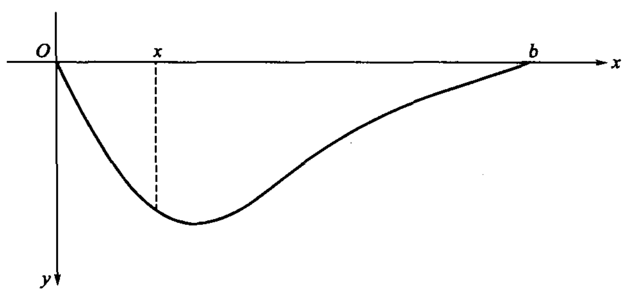

图 1-1　河道深度与测量点距岸边距离对应函数图形

2. 分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 的不同的值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为 **“分段函数”**．

分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数．

例 10　$y=|x|=\begin{cases} x, x\geqslant 0 \\ -x, x<0 \end{cases}$

这个函数的定义域为 $D(f)=(-\infty,+\infty)$.

例 11 $y=\begin{cases}x+1, x<0\\0, x=0\\x-1, x>0\end{cases}$

这个函数的定义域为 $D(f)=(-\infty,0)\cup\{0\}\cup(0,\infty+)=(-\infty,+\infty)$.

例 12 $y=f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, |x|<1\\x^2-1, 1<|x|\leqslant 2\end{cases}$

这个函数在 $|x|=1$ 时无定义，它的定义域为 $D(f)=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$（见图 1-2）.

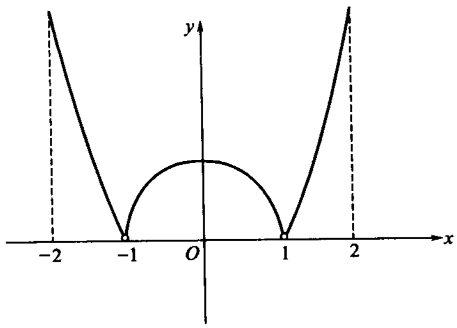

图 1-2 例 12 函数图形

例 13 用分段函数表示函数 $y=3-|x-1|$.

解 因为当 $x<1$ 时，$|x-1|=-(x-1)$；当 $x\geqslant 1$ 时，$|x-1|=x-1$.

因此有

$$y=\begin{cases}3+(x-1), x<1\\3-(x-1), x\geqslant 1\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}2+x, x<1\\4-x, x\geqslant 1\end{cases}$$

例 14 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x+2, 0\leqslant x\leqslant 2\\x^2, 2<x\leqslant 4\end{cases}$，求 $f(x-1)$.

解 $f(x-1)=\begin{cases}(x-1)+2, 0\leqslant x-1\leqslant 2\\(x-1)^2, 2<x-1\leqslant 4\end{cases}$，

即

$$f(x-1)=\begin{cases}x+1, 1\leqslant x\leqslant 3\\(x-1)^2, 3<x\leqslant 5\end{cases}$$

3. 隐函数

(1) 显函数 有些函数的因变量是用自变量表达式表示出来的，称为**显函数**.

显函数举例如下.

$$y=x^2, y=\sqrt{r^2-x^2}, y=\log_a(3x+1).$$

(2) 隐函数 有些函数的因变量与自变量的对应规则是用一个方程 $F(x, y)=0$ 表示的，称为**隐函数**.

隐函数举例如下.

$$xy=1,\ x^2+y^2=r^2,\ Ax+By+C=0.$$

三、建立函数关系的例题

为了解决应用问题，先要给问题建立数学模型，即建立函数关系．为此需要明确问题中的因变量与自变量，再根据题意建立等式，从而得出函数关系．然后确定函数的定义域．应用问题的定义域，除函数的解析式外还要考虑变量在实际问题中的含义．

1. 成本函数

某产品的总成本是指生产一定数量的产品所需的全部经济资源投入的价格或费用总额．它由固定成本与可变成本组成．

设 C 为总成本，C_1 为固定成本，C_2 为可变成本，$\overline{C}$ 为平均成本，Q 为产量，则有

总成本函数：$C=C(Q)=C_1+C_2(Q)$；

平均成本函数：$\overline{C}=\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}$.

例 15　某工厂生产某产品，每日最多生产 100 单位．它的日固定成本为 130 元，生产一个单位产品的可变成本为 6 元．求该厂日总成本函数及平均单位成本函数．

解　设日总成本为 C，平均单位成本为 $\overline{C}$，日产量为 x. 由于日总成本为固定成本与可变成本之和．根据题意，日总成本函数为

$$C=C(x)=130+6x,D(C)=[0,\ 100];$$

平均单位成本函数为

$$\overline{C}=\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{130}{x}+6,D(C)=(0,\ 100].$$

2. 收益函数与利润函数

总收益是出售一定数量的产品所得到的全部收入．总利润是生产一定数量的产品的总收益与总成本之差．

设 P 为商品价格，Q 为商品量，R 为总收益，$C(Q)$ 为总成本，则有

总收益函数：$R=R(Q)=Q\cdot P(Q)$；

平均收益函数：$\overline{R}=\overline{R}(Q)=\dfrac{R(Q)}{Q}=P(Q)$；

总利润函数：$L(Q)=R(Q)-C(Q)$；

平均利润函数：$\overline{L}(Q)=\overline{R}(Q)-\overline{C}(Q)$.

例 16　设某产品的价格与销售量的关系为 $P=10-0.2Q$，成本函数为 $C=50+2Q$，求销售量为 30 时的总收益、平均收益和总利润．

解　$R(Q)=Q\cdot P(Q)=10Q-0.2Q^2,R(30)=120$；

$\overline{R}(Q)=P(Q)=10-0.2Q,\overline{R}(30)=4$；

$L(Q)=R(Q)-C(Q)=10Q-0.2Q^2-(50+2Q)=8Q-0.2Q^2-50;L(30)=10.$

3. 库存函数

例 17　某工厂生产某型号车床，年产量为 a 台，分若干批进行生产，每批生产准备费为 b 元．设产品均匀投入市场，且上一批用完后立即生产下一批，即平均库存量为批量的一半．设每年每台库存费为 c 元．显然，生产批量大则库存费高；生产批量少则批数增多，因而生产准备费高．为了选择最优批量，试求出一年中库存费与生产准备费的和与批量的函数关系．

解　设批量为 x，库存费与生产准备费的和为 $P(x)$.

由已知条件，每年生产的批数为 $\dfrac{a}{x}$(设其为整数)，

每年生产准备费为 $b\cdot\frac{a}{x}$，每年库存费为 $c\cdot\frac{a}{2}$，

因此可得　$P(x)=\frac{ab}{x}+\frac{c}{2}x$，

定义域为 $(0,a]$，因本题中的 x 为车床的台数，批数 $\frac{a}{x}$ 为整数，所以 x 只应取 $(0,a]$ 中 a 的正整数因子．

例 18　有一工厂 A 与铁路的垂直距离为 a 公里，它的垂足 B 到火车站 C 的铁路长为 b 公里，工厂的产品必须经火车站 C 才能转销外地．已知汽车运费是 m 元/（吨・公里），火车运费是 n 元/（吨・公里）$(m>n)$，为使运费最省，想在铁路上另修一小站 M 作为转运站，那么运费的多少决定于 M 的地点（见图 1-3）．试将运费表示为距离 $|BM|$ 的函数．

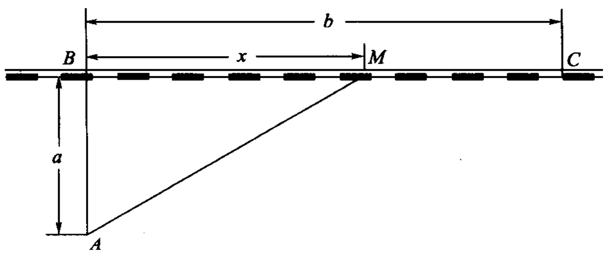

图 1-3　例 18 示意图

解　设 $|BM|=x$，运费为 y.

根据题意，有

$|AM|=\sqrt{a^2+x^2}$，$|MC|=b-x$，于是 $y=m\sqrt{a^2+x^2}+n(b-x)$，其定义域为 $[0,b]$．

例 19　某运输公司规定货物的吨公里运价为：在 a 公里以内，每公里 k 元；超过 a 公里，超过部分每公里为 $\frac{4}{5}k$ 元．求运价 m 和里程 s 之间的函数关系．

解　根据题意，当 $0<s\leqslant a$ 时，$m=ks$；

当 $s>a$ 时，$m=ka+\frac{4}{5}k(s-a)$.

所以所求函数关系如下

$$m=\begin{cases}ks, 0<s\leqslant a\\ ka+\frac{4}{5}k(s-a), s>a\end{cases}$$

这里运价 m 和里程 s 的函数关系是用分段函数表示的，定义域为 $(0,+\infty)$.

四、函数的几种简单性质

1. 函数的奇偶性

定义 2　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称．

如果对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；

如果对任意 $x\in D$，有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**．

对于偶函数，因 $f(-x)=f(x)$，所以，如果点 $P(x, f(x))$ 在函数的图形上，则与它对称于 y 轴的点 $P'(-x, f(x))$ 也在图形上，因此偶函数的图形对称于 y 轴．

对于奇函数，因 $f(-x)=-f(x)$，所以，如果点 $Q(x, f(x))$ 在函数的图形上，则与它对称于原点的点 $Q'(-x,-f(x))$ 也在图形上，因此奇函数的图形对称于原点．

例 20　判断 $y=x^4-2x^2$ 的奇偶性．

解　因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$，所以 $y=x^4-2x^2$ 为偶函数．

例 21　判断 $y=\frac{1}{x}$ 的奇偶性．

解　因为

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x),$$

所以 $y=\frac{1}{x}$ 为奇函数．

例 22　判断 $y=x^3+1$ 的奇偶性．

解　因为 $f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$ 既不等于 $f(x)=x^3+1$，也不等于 $-f(x)=-x^3-1$，所以 $y=x^3+1$ 是非奇非偶函数．

2. 函数的周期性

定义 3　对于函数 $y=f(x)$，如果存在正的常数 a，使得 $f(x)=f(x+a)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**．满足这个等式的最小正数 a 称为函数的**周期**．

例如 $y=\sin x$ 就是周期函数，周期为 2π.

3. 函数的单调增减性

定义 4　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，x_1 和 x_2 为 I 中任意两点．如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调增加**；如果当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调减少**．

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的．

例 23　判断函数 $y=x^3$ 的单调性．

解　对于任意的 x_1、x_2，如果 $x_1<x_2$，那么 $x_1^3<x_2^3$，因此有 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的．

在函数的定义域内，函数的单调性不一定相同．例如函数 $y=2x^2+1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内是单调减少的；在区间 $[0,+\infty]$ 内是单调增加的．

4. 函数的有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 在 I 上有定义．如果存在 $M>0$，使对任意 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 是 I 上的**有界函数**，否则称函数 $f(x)$ 在 I 上**无界**．

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，因为对任何实数 x 有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上是无界的，在 $[1,+\infty]$ 上是有界的．

五、反函数

设某种商品销售总收益为 y，销售量为 x，已知该商品的单价为 a.

对每一个给定的销售量 x，可以通过规则 $y=ax$ 确定销售总收益 y，这种由销售量确定销售总收益的关系称为销售总收益是销售量的函数．反过来，对每一个给定的销售总收益 y，则可以由规则 $x=\frac{y}{a}$ 确定销售量 x，这种由销售总收益确定销售量的关系称为销售量是

销售总收益的函数．数学上称后一函数$\left(x=\frac{y}{a}\right)$是前一函数($y=ax$)的反函数，或者说它们互为反函数．

定义 6 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 Z. 如果对于每个 $y\in Z$，存在唯一 $x\in D$，使 $f(x)=y$，则 x 是一个定义在 Z 上的函数，记为 $x=f^{-1}(y)(y\in Z)$,称为 $y=f(x)(x\in D)$的**反函数**．

函数 $y=f(x)$与函数 $x=f^{-1}(y)$是互为反函数．

函数 $y=f(x)$的自变量为 x，因变量为 y，定义域为 D，值域为 Z.

函数 $x=f^{-1}(y)$的自变量为 y，因变量为 x，定义域为 Z，值域为 D.

习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量．因此将 $x=f^{-1}(y)$改写为以 x 为自变量、以 y 因变量的函数关系 $y=f^{-1}(x)$，这时说 $y=f^{-1}(x)$是 $y=f(x)$的反函数．

$y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$的关系是 x 与 y 互换，所以它们的图形对称于直线 $y=x$.

例 24 求 $y=3x-1$ 的反函数．

解 由 $y=f(x)=3x-1$ 可以求出

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y+1}{3},$$

将上式中的 x 换成 y，将 y 换成 x，得出 $y=3x+1$ 的反函数是 $y=\frac{x+1}{3}$.

一个函数如果有反函数，它必定是一一对应的函数关系．

例如，在$(-\infty,+\infty)$内，$y=x^2$ 不是一一对应的函数关系，所以它没有反函数；而在$(0,+\infty)$内 $y=x^2$ 有反函数 $y=\sqrt{x}$；在$(-\infty,0)$内，$y=x^2$ 有反函数 $y=-\sqrt{x}$.

六、基本初等函数

把幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$、指数函数 $y=a^x(a>0$ 且$a\neq1)$、对数函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq1)$、三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arccot}\,x$ 统称为**基本初等函数**(见表 1-2). 很多时候也把多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 看作基本初等函数．

七、复合函数

定义 7 如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集非空，那么，y 通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数，把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的**复合函数**，记作 $y=f[\varphi(x)]$.

学习复合函数有两方面要求：一方面，会把几个作为中间变量的函数复合成一个函数，这个复合过程实际上是把中间变量依次代入的过程；另一方面，会把一个复合函数分解为几个较简单的函数，这些较简单的函数往往是基本初等函数或是基本初等函数与常数的四则运算所得到的函数．

例 25 已知 $y=\ln u$，$u=x^2$，试把 y 表示为 x 的函数．

解 $y=\ln u=\ln x^2$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

例 26 设 $y=u^2$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$，试把 y 表示为 x 的函数．

解 $y=u^2=\tan^2 v=\tan^2\frac{x}{2}$.

复合函数的中间变量可以不限于一个．

例 27　函数 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 是由哪些简单函数复合而成的？

解　令 $u=\sin x$，则 $y=\mathrm{e}^u$，故 $y=\mathrm{e}^{\sin x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\sin x$ 复合而成的．

例 28　函数 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由哪些初等函数复合而成的？

解　令 $u=\tan(2\ln x+1)$，则 $y=u^3$；再令 $v=2\ln x+1$，则 $u=\tan v$. 故 $y=\tan^3(2\ln x+1)$ 是由 $y=u^3$，$u=\tan v$，$v=2\ln x+1$ 复合而成的．

表 1-2　基本初等函数

函数类型	函　　数	定义域与值域	特　　征
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数；单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in[0,+\infty)$	偶函数，在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数；单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	奇函数；单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$；$y\in[0,+\infty)$	单调增加
指数函数	$y=a^x(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,+\infty)$	单调减少
	$y=a^x(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,+\infty)$	单调增加
对数函数	$y=\log_a x\ (0<a<1)$	$x\in(0,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)$	单调减少
	$y=\log_a x(a>1)$	$x\in(0,+\infty),y\in(-\infty,+\infty)$	单调增加
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in[-1,1]$	奇函数，周期 2π，有界，在 $\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加，在 $\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in[-1,1]$	偶函数，周期 2π，有界，在 $(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少，在 $(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数，周期 π，在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加 $(k\in\mathbf{Z})$
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi,y\in(-\infty,+\infty)$	奇函数，周期 π，在 $(k\pi,k\pi+\pi)$ 单调减少 $(k\in\mathbf{Z})$
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1],y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	奇函数，单调增加，有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1],y\in[0,\pi]$	单调减少，有界
	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	奇函数，单调增加，有界
	$y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty),y\in(0,\pi)$	单调减少，有界

八、初等函数

定义 8　由常数和基本初等函数，经过有限次四则运算和有限次复合而成的，并且能用一个式子表示的函数，称为**初等函数**．

初等函数是用一个表达式表示的函数，分段函数不是初等函数．

例如，$y=\dfrac{\sin x}{x^2+1}$，$y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$，$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$ 等都是初等函数．

例 29 分解 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$

解 令 $u=\sin(1+3x^2)$，得 $y=e^u$；再令 $v=1+3x^2$，得 $u=\sin v$，故 $y=e^{\sin(1+3x^2)}$ 是由 $y=e^u$，$u=\sin v$，$v=1+3x^2$ 复合而成的．

九、邻域

定义 9 设 a，$\delta\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，数集 $\{x\mid |x-a|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$，即实数轴上和 a 点的距离小于 δ 的点的全体，称为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，点 a 与数 δ 分别称为这邻域的中心和半径．有时用 $U(a)$ 表示点 a 的一个泛指的邻域．数集 $\{x\mid 0<|x-a|<\delta, x\in\mathbf{R}\}$，称为点的空心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

即有 $U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$，$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$.

练习 A

1. 判断下列说法是否正确

(1) 复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域即为 $u=\varphi(x)$ 的定义域．

(2) 若 $y=y(u)$ 为偶函数，$u=u(x)$ 为奇函数，则 $y=y[u(x)]$ 为偶函数．

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ x+1, & x<0 \end{cases}$，由于 $y=x$ 和 $y=x+1$ 都是初等函数，所以 $f(x)$ 是初等函数．

(4) 设 $y=\arcsin u$，$u=x^2+2$，这两个函数可以复合成一个函数 $y=\arcsin(x^2+2)$．

2. 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$ 的定义域．

3. 设 $f(1-2x)=1-\dfrac{2}{x}$，求 $f(x)$.

练习 B

1. 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=x^5-\sin x$；　(2) $g(x)=x^3\tan x+[f(x)+f(-x)]$；

(3) $f(x)=\dfrac{x(e^x-1)}{e^x+1}$；　(4) $h(x)=x^4+2^x-3$

2. 引进中间变量，将下列函数分解为基本初等函数的复合

(1) $y=\lg(\sin x)$；(2) $y=\arccos\sqrt{x^2-1}$

3. 将下列函数复合成一个函数

(1) $y=\sin u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2x-1$；(2) $y=\lg u$，$u=1+v$，$v=\sqrt{w}$，$w=\sin x$

第二节　极　　限

一、数列的极限

对于半径为 r 的圆内接正多边形的面积 $s_n=f(n)$（n 为正多边形的边数），当 n 越来越大时，s_n 就越来越接近于圆的面积，当 n 无限增大时，s_n 就无限地接近圆的面积．这时，