测绘科技专著出版基金资助
CEHUI KEJI ZHUANZHU CHUBAN JIJIN ZIZHU

FRACTAL AND FRACTAL DIMENSIONS OF SPATIAL GEO-INFORMATION

朱晓华 著

地理空间信息的分形与分维

测绘出版社

测绘科技专著出版基金资助

地理空间信息的分形与分维

Fractal and Fractal Dimensions of Spatial Geo-information

朱晓华 著

测绘出版社

·北 京·

内容简介

分形理论作为20世纪70年代世界科学的三大发现之一，自其产生之日起，就逐渐引起了世人的广泛关注，分形理论已经在自然与社会经济的众多领域得到了广泛应用。本书在介绍分形理论缘起、分维计算方法的基础上，以中国数据为分析对象，阐述分形理论在点状地理信息、线状地理信息、面状地理信息研究中的具体应用，并进而在地理信息的分形机制与尺度研究方面进行了深入探索。

本书可供地理、测绘、遥感、生态、地质等相关学科的研究生和科研人员学习与参考。

图书在版编目(CIP)数据

地理空间信息的分形与分维/朱晓华著．—北京：测绘出版社，2007.5

ISBN 978-7-5030-1664-6

Ⅰ．地…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．分形理论—应用—地理信息系统—研究　Ⅳ．P208

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第022199号

责任编辑：赵　彬/责任校对：董玉珍
封面设计：赵培璧/绘　图：郭　飞

测绘出版社 出版发行
地址：北京市西城区复外三里河路50号　邮编：100045
电话：(010)68512386　68531558　网址：www.sinomaps.com
北京通州区次渠印刷厂印刷　新华书店经销
成品尺寸：169mm×239mm　印张：10.75　字数：205千字
2007年5月第1版　2007年5月第1次印刷
印数：0001—2000册
ISBN 978-7-5030-1664-6/P·446
定价：25.00元

序

分形理论是20世纪70年代世界科学的三大发现之一，目前已经构成了当代科学前沿的一个热门研究领域，该理论的诞生对于探索客观世界的复杂性具有十分积极的意义。毫无疑问，也为实现地球科学创新研究目标提供了一种新的理论和方法支撑。

分形理论产生至今才近40年，这对于一个理论的发展、完善而言，还十分短暂，在短短近40年的时间里回答“分形本源”这一重大难题显然不是一件轻而易举的事情。虽然分形理论引起过并且目前还在引得不同观点的学者们争论不休，但是地球科学应用分形理论来思考问题，的确开拓了人们的思路，“分形地学”的框架已然形成雏形，必然会成为地球科学的一个新的分支和亮点。虽然不能武断地说地球信息一切皆分形，但是却可以肯定地说，在客观世界，确实广泛地存在着大量分形现象，分形是地球信息复杂性的一种外在表现。目前我国科学界对于地球科学复杂性的探索正方兴未艾，所以，对于“分形地学”这一诞生才仅仅30多年的全新研究领域，我国的研究不是多了，而是大大的不足。

该书作者朱晓华博士是近几年来崭露头角的优秀青年地球科学工作者。他踏实、勤奋，学术思想活跃，多年来在地球科学分形研究领域中倾注了大量心血，做了许多持续性工作，先后主持中国博士后科学基金、国家自然科学基金项目，并参与多项国家级课题研究工作。基于这些持续性的学术积累以及对分形理论在地球科学中总体应用状况的把握，该同志所著《地理空间信息的分形与分维》一书设计思路清晰，立意明确，从不同地球科学现象入手，具体内容翔实、清楚，文字简练，科学意义突出。该书作为我国地球科学领域为数不多的分形研究专著之一，对于促进我国地球科学分形研究的进展具有积极的意义。

地球科学分形研究还刚刚起步，错综复杂，该书难免挂一漏万。该书在国家测绘局测绘科技专著出版基金的资助下得到及时出版，将对我国地球科学领域的思维创新具有积极的意义。分形理论作为新兴的非线性理论，作为观察地球科学信息复杂性的一个得力工具，我希望能引起越来越多中国研究者的关注。

是为之序。

中国工程院院士　孙九林

2006.12.12

前　言

1967年法裔美国科学家曼德尔布罗特(Mandelbrot)在国际一流权威期刊《科学》上发表了题为《英国海岸线究竟有多长？——统计自相似性和分形维数》的论文，标志了分形理论的诞生，"fractal"一词目前已成为科学界出现频率较高的词汇之一。分形理论作为一门新兴的非线性理论，与已有2000多年发展历史的传统欧氏几何相比，分形理论产生时间虽然很短，只有30多年，但是与欧氏几何只适于描述简单、规则的人造物体相比，分形与分维则适于描述大自然界中复杂的真实物体。分形理论产生后，已经被广泛地应用到诸多研究领域之中，构成了当代科学前沿的一个被广义地称为"分形学"的学科范围十分广阔、研究成果相当丰硕以及前景诱人的热门研究领域。毫无疑问，分形理论也为实现地理信息研究的创新提供了新的理论支撑与机遇。

基于分形理论在地学中的应用状况，本书以中国为例，较为系统地对地理信息进行了分形及其机制等方面的研究，各章节基本内容为:第1章概述了分形与分维基本概念，介绍了Koch曲线、Sierpinski地毯等典型的分形体，进而对分形理论在地理信息研究中的应用进行了评述；第2章在概述分维基本计算方法的基础上，分别总结了点状地理信息、线状地理信息与面状地理信息的适用分维计算方法，进而将GIS技术在海量地理信息分形研究中进行了有效应用；第3章对点状地理信息进行了系统分形研究，揭示了蕴藏在地震、旱涝灾害及其各自灾情中的分形现象；第4章对线状地理信息进行了系统分形研究，揭示了海岸线、山系、断层系与水系的分形性质，并以分维为参数，对不同地理现象之间的关系进行了分形探讨；第5章对面状地理信息进行了系统分形研究，揭示了土地利用、土壤与植被这三类面状地理信息中的分形现象；第6章以海岸线、土地利用、土壤与植被为例，分析了各自的分形机制问题，进而结合自组织(Self-organization)思想，探讨了地理信息分形性质与自组织临界性(SOC)的关系；第7章探讨了地理信息中的尺度问题，在给出尺度问题分形例证的基础上，以山系等为例定量分析了地理信息分形性质与尺度的关系。

通过从现象到机制的分形研究，本书在一定程度上可填补我国地理信息分形研究的空白，并可为地理复杂巨系统非线性研究的深入提供有益的参考。

由于本书研究内容涉及多个学科领域，加之作者水平有限，书中错误及不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。如果能够起到抛砖引玉的积极作用，在一定程度上能够起到促进分形理论这一科学之葩在我国地学研究领域灿烂盛开的话，那就足以让作者感到无限欣慰和自豪了！

本书的出版,得力于测绘科技专著出版基金的大力资助。本书部分内容来自于国家自然科学基金项目(40335046、40301002),在此一并致谢！

作者

2006年8月

目　录

Contents

第 1 章　分形理论概述

1.1　分形、分维基本概念

众所周知，地理学作为一门古老的学科已经走过了漫长历史，在古代地理学向近、现代地理学的发展过程中，地理学逐渐从只关注“What”(什么)向关注“How”(怎样发展、演化)与“Why”(为什么)的转化。但毋庸讳言，当代地理学在关注“How”与“Why”两方面可以说做得还不够，还不到位。这一方面是由于地理学本身发展水平的制约，另一方面也是由于客观的地理世界极其复杂，影响因素极其繁多导致了非线性客观世界的存在。地理学在应用传统理论、方法与技术等各种手段研究地理问题的时候，就不可避免地受到客观限制，这在一定程度上也可以说是地理学缺乏纵深发展的根本原因之所在。只要稍微具有一定的地理知识就会理解，随着研究范围从小区域向大区域的逐渐转变，影响因素就会增加，而且影响的范围、时段等都会出现多样性的变化，这样无疑就增加了进行研究的难度，而这也恰恰是尺度推绎(Scaling)成为当前地理学、景观生态学等众多学科热点研究问题的根本原因。借用混沌理论中的一句名言:一只蝴蝶在巴西轻拍翅膀，可能会导致一个月后得克萨斯州的一场龙卷风。这句话的意思转化成数学语言就是说:“一个微小初始条件的变化，将引发不可想象的巨大后果的产生”。下面通过一个例子来进行更为清晰地阐释。

假设存在关系为

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \tag{1-1}$$

取 $x_0=0.1$ 和 $x_0=0.100\ 000\ 01$，在经过不同迭代计算之后，得到的结果会出现意想不到的巨大差异，如表 1-1 所示。

通过这个例子显而易见，式(1-1)在取 $x_0=0.1$ 和 $x_0=0.100\ 000\ 01$ 时经过不同次的迭代计算，随着迭代次数的增加，计算结果之间差异愈见增大。在第 1 次迭代时计算结果仅仅相差 0.000 000 032 0，而经过第 52 次迭代时计算结果竟然相差 0.933 665 534 7。

通过以上实例就说明了地理学研究中客观存在的问题及其困境。当然，在地理学面临困境的时候，地理学家不能也决不会因此而畏缩不前或停止探索的创新精神，因为困难往往与机遇并存，为了发展就必须创新，目前创新也正在成为地理学界追求的目标。要实现地理创新，概括而言，主要途径在于三个方面：一是

表 1-1 迭代计算

迭代次数	取 值	
	$x_0=0.1$	$x_0=0.100\ 000\ 01$
1	0.36	0.360 000 032 0
2	0.921 6	0.921 600 035 8
⋮	⋮	⋮
10	0.147 836 559 9	0.147 824 444 9
⋮	⋮	⋮
51	0.985 582 348	0.451 278 000 3
52	0.056 839 132	0.990 504 667 0
⋮	⋮	⋮

理论创新，二是技术创新，三是理论与技术创新的结合。20 世纪中期以来，混沌理论、分形理论等系列非线性理论的兴起，就为实现地理创新提供了全新的理论、方法、思想以及可能的手段。通过诸如混沌理论、分形理论等非线性理论的应用，可以逐步改变原先地理研究中所采用的还原论方法，即不再将复杂的非线性问题简化为简单的线性问题来处理，而是用符合地理现象本身性质、特征与规律的眼光来观察地理现象本身，逐步真实、全面地刻画地理信息本有的性质、特征与规律。这一点也恰恰就像当初人们认识地球一样:开始，人们认为地球是方的，并且认为这就是真理，但是随着科学技术的发展，人们逐渐认识到地球呈椭圆形，这里就用“椭圆”的概念真实地刻画了地球的基本形状特征。分形理论的产生，也为地理学家真实地描绘、刻画复杂的自然界提供了一个有力的工具。

在开始介绍分形理论之前，可以首先询问一个问题——“中国海岸线到底有多长?”可能许多读者的第一感觉都会认为:这是一个非常简单的问题，只要略微具备地理知识就可以回答出来。因为在《中国自然地理》等各类教科书上早就清清楚楚地写着:“我国海岸线，北起鸭绿江口，南到北仑河口，长 1.8 万多千米，加上 5 000 多个岛屿，海岸线总长 3.2 万多千米”。可是，在初步地了解了分形理论之后，您一定会认为关于中国海岸线长度的问题的确并不简单，这个表面上看起来似乎简单的问题也确实不那么容易回答清楚。

在 1967 年，法裔美国科学家曼德尔布罗特(Mandelbrot)在国际权威期刊《科学》上发表了题为《英国海岸线究竟有多长? ——统计自相似性和分形维数》的论文，系统地阐述了关于海岸线的长度问题。在这篇论文中，曼德尔布罗特指出海岸线的长度是不确定的，其具体长度依赖于测量时所使用的尺子长度。曼德尔布罗特认为海岸线非常不规则，由此，导致其长度的精确测量也就十分困难，如果用“千米”作为测量单位来量算海岸线长度，则一些从几米到几十米的海岸线弯曲就会被忽略、遗漏；而如果用“米”作为测量单位，虽然测量的精度会明显得到提

高，但是一些更小的如厘米级的海岸线弯曲还是会被忽略、遗漏；进而，如果用“厘米”作为测量单位，那么几乎将测量出能够被眼睛看到的所有海岸线弯曲，这种情况下的测量结果又必然会比前两种情况下的测量结果要精确得多；如果把测量海岸线的尺子长度想象成原子直径那样小，那么海岸线的长度必然庞大无比，其长度值就是个天文数字。以上情况表明，用来测量海岸线长度的尺子越小，相应所得海岸线的长度越长。由此可见，传统的“长度”这一参数并不是海岸线的一个完好量度，它确切地说是一个变量，显然不是海岸线很好的定量描述参数。

图 1-1 是英国大不列颠岛海岸线分布示意图，从图中可以看出海岸线蜿蜒曲折的情况。曼德尔布罗特的伟大贡献首先就在于他发现了一个看似简单却非常重要的命题：海岸线的具体长度依赖于测量海岸线时所使用的尺子的长度，由于不同的测量者会使用不同的尺子，所以，测量结果之间无疑会存在客观的差异。

关于海岸线长度与量测尺子长度之间的关系，曼德尔布罗特经研究发现存在如式(1-2)之关系。

$$L = Mr^{1-D} \tag{1-2}$$

式中：L 为海岸线长度，r 为量测尺子的长度，M 为待定常数。

实际上，在曼德尔布罗特之前，Richardson 就已经发现了类似式(1-2)关系的存在，但是他简单地认为 D 只是一个常数。曼德尔布罗特的独特贡献和创新之处就在于揭示了分形维数 D 的存在，并由此导致了 20 世纪 70 年代世界三大科学发现之一的“分形理论”的诞生，《科学》上题为《英国海岸线究竟有多长？——统计自相似性和分形维数》一文由此也成为一篇具有划时代意义的巨作，引领和影响了此后世界许多学科的发展方向。

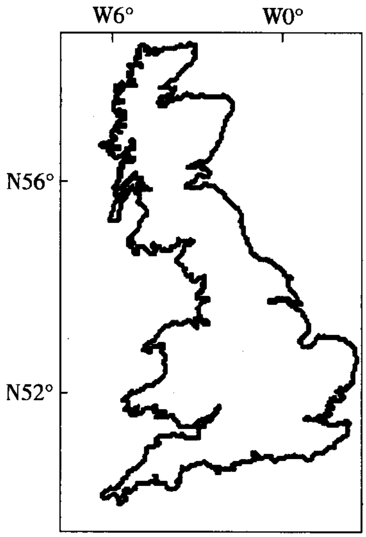

图 1-1　英国大不列颠岛海岸线分布示意图

《英国海岸线究竟有多长？——统计自相似性和分形维数》一文的发表，不仅为曼德尔布罗特带来了莫大荣誉，奠定了其“分形理论创立者”的地位，同时更为重要的是开创了一门全新学科——“分形几何学”的新纪元。此后，曼德尔布罗特相继出版了专著《分形：形、机遇和维数》和《大自然的分形几何》(Mandelbrot，1977，1983)。目前，分形理论已经被广泛地应用到包括天文、地理、生物、计算机、哲学等在内的诸多研究领域之中，构成了当代科学前沿的一个被广义地称为“分形学”的学科范围十分广阔、研究成果相当丰硕以及前景诱人的热门研究领

域。分形理论也为实现地理创新的目标提供了全新的理论支撑和良好机遇。

“分形”的英文拼写为“fractal”。“fractal”一词是曼德尔布罗特为了给不规则的、支离破碎的复杂图形命名，而在 1975 年将拉丁文“*fractus*”加以转化而来的，“fractal”一词含有英文中“fracture”(分裂、破碎)与“fraction”(分数)的双重含义。分形的具体含义，是指事物的形状、形态与组织的分解、分割、分裂与分析，它在一定程度上代表了一个由局部到整体的对事物的认识过程。“fractal”一词目前已成为科学界出现频率较高的词汇之一。

对于什么是分形，曼德尔布罗特给其下的原始数学定义较为简单，后来，经过众多研究者的努力，给出了分形较为全面而恰当的定义，该定义认为分形是具有下列性质的集合：

(1)具有精细结构，在任意小的尺度下，都可呈现出更加精致的细节。

(2)其不规则性在整体与局部都不能用传统的几何语言加以描述。

(3)具有某种自相似的形式，但这种自相似性质不是完全数学意义上的，而是统计意义上的，它承认有小概率的非自相似性的存在。

(4)该集常可由较为简单的方法来定义，可由迭代产生；所谓的迭代产生分形，是指通过反复的迭代过程，通过在相空间不断地拉伸、压缩、挖空，从而实现从光滑转化为不光滑、从规则转化为不规则、从整形转化为分形的过程。下文的 Koch 曲线就是一个范例。

(5)分形不能用通常的面积、长度、体积等测度进行量度；传统的欧氏几何认为，面积有限的区域必定是由长度有限的周边曲线围成的，体积有限的区域必定是由面积有限的周边曲面围成的，但分形恰恰违反了这种常规的思维。例如，由直线段为源图构造出来的 Cantor 三分集，虽然其长度为零，但其包含有无穷多点；由三角形出发构造出来的 Koch 岛，虽然其面积有限，但是其周边曲线的长度为无穷大；由正方形出发构造出来的 Sierpinski 地毯，其周边曲线长度为无穷大而面积为零；由正方体出发构造出来的 Sierpinski 海绵，其表面积为无穷大而体积为零。

(6)其分形维数一般大于拓扑维数(如 Koch 曲线的拓扑维是 1，但是它的分形维数则等于 1.261 8)。

分形维数(简称分维)是用来描述分形不规则特征的参数。维数是几何学和空间理论的基本概念，根据常识，点是 0 维，直线是 1 维，平面是 2 维，普通空间是 3 维。分形的不规则特征也用维数来描述，只是用来描述分形不规则特征的维数通常是分数维，而不是整数维。传统几何对于自然界中连绵的群山、凹凸的地表、蜿蜒的江河、复杂多变的云团等的描述无能为力，而正是由于在描述这些复杂自然构型方面的无能为力，所以，传统几何将它们一概视作“病态的”或“妖魔的”而不予考虑。分形理论的产生恰恰为解决这些难题提供了全新的思路和方法，

分维的观念丰富与发展了传统整形几何中维数的观念。在传统整形几何中，点与线、线与面、面与体是性质全然不同的几何对象，它们之间界限分明。而分形几何则认为点与线、线与面、面与体之间的界限并不绝对分明，它揭示出在点与线之间存在有像 Cantor 集这类非点非线、亦点亦线的中介现象，在线与面之间存在有像 Sierpinski 地毯这类非线非面、亦线亦面的中介现象，在面与体之间存在有像 Sierpinski 海绵这类非面非体、亦面亦体的中介现象。

分形与分维概念的产生，丰富与发展了以下几对重要的概念，从而为哲学思维的发展提供了崭新素材(苗东升，1998；艾南山，1993)。

(1)整形与分形。整形与分形相比较而存在，实际上，现实世界中大量现象都是既具有整形性又具有分形性，只不过是在不同情况下规则性占主导地位还是非规则性占主导地位而已；同时，整形与分形在一定条件下还可以实现互相转化。例如 Koch 曲线就是从简单而规则的图源——直线出发，经过简单的规则变换，最终形成了极不规则的分形图形(见本章后例)。

(2)规则与不规则。分形是指那些极不规则、支离破碎的形状，但是分形绝对不是简单的无规则性，而是规则性与无规则性的奇妙统一。分形在不同尺度、不同层次上表现出同样的不规则性，而这本身又是一种奇妙的规则性，即自相似性(Self-similarity)。分形对象在极不规则的表现下所呈现出的精细结构，代表了一类复杂的规则性、高级的有序性，Koch 曲线就是如此。通过分形，不仅在规则性中包含着不规则性，而且在一定条件下可以实现二者之间的相互转化。

(3)有限与无限。通过分形迭代，可以从规则性中产生出不规则性，从整形中产生分形，这样就使得在分形对象中出现了关于有限与无限的奇妙统一，而这在传统的整形几何中不可想象。例如:由三角形出发构造出来的 Koch 岛，虽然其面积有限，但是其周边曲线的长度为无穷大；由正方形出发构造出来的 Sierpinski 地毯，其周边曲线长度为无穷大而面积为零；由正方体出发构造出来的 Sierpinski 海绵，其表面积为无穷大而体积为零。

(4)整数维与分数维。对传统欧氏几何和数学而言，维数只能取整数，点是 0 维的，直线是 1 维的，平面是 2 维的，普通空间则是 3 维的，抽象高维空间的维数可以是任意正整数，维数不能够连续改变。分形几何的产生突破了这一传统认知，证明维数可以取任何正实数，因而可以连续变化，从而揭示出在点与线、线与面、面与体之间并不存在绝对的、分明的界限，在点与线之间存在有像 Cantor 集这类非点非线、亦点亦线的中介现象，在线与面之间存在有像 Sierpinski 地毯这类非线非面、亦线亦面的中介现象，在面与体之间存在有像 Sierpinski 海绵这类非面非体、亦面亦体的中介现象。

分形与分维概念的产生在加深人们对上述重要哲学概念认识的基础上，同时对于进行复杂性研究还具有重要的方法论意义。分形理论的建立把人们的注意力

引向了研究那些不能用通常的长度、面积、体积等测度来表示或描述的非规则几何体的性质，使得人们能用更贴近自然的语言来描绘自然，来真实、全面地刻画大自然的几何复杂性，并逐渐建立数学语言与现实客观世界之间更为深刻的联系。分形理论主要研究复杂系统的自相似性，它通过对系统整体与部分之间自相似性的研究，试图找到介于有序—无序、宏观—微观、整体—部分之间的新秩序，从而会深化对于物质世界多样性的统一认识。同时，分形理论还为不同学科发现的新规律性提供了崭新的语言和定量的描述，从而为现代科学的深入发展提供了新的思路和方法。

从认识事物的途径或思考问题的方法来看，分形理论与系统论在一定程度上体现了从两个端点出发的思想。系统论由整体出发确立各个部分的系统性质，沿着从宏观到微观的方向考察整体与部分之间的相关性；而分形理论则是由部分出发来确立整体的性质，沿着从微观到宏观的方向考察部分与整体之间的相关性。系统论强调了部分依赖整体的性质，体现了从整体出发认识部分的思想；而分形理论则强调了整体依赖于部分的性质，体现了从部分出发认识整体的方法。于是，系统论与分形理论构成互补，相互辉映，极大地提高了人类对自然界的认识能力和水平。

正是基于分形理论对哲学发展的贡献，以及分形理论在各个学科中已经呈现出的实际应用效果，它不仅显示出了莫大的存在价值，而且人们也由此把它作为20世纪70年代世界科学的三大发现之一。美国著名物理学家约翰·惠勒(John Wheeler)指出:“可以相信，明天谁不熟悉分形，谁就不能被认为是科学上的文化人!”对于这句话的武断与否暂且不妄加评论，但从这句话中至少可以体会出分形理论在惠勒眼中的巨大价值所在。

表1-2列出了分形与欧氏几何的主要差别，从这些差别中可以基本看出分形对客观世界认识的发展。

表1-2　分形与欧氏几何的主要差别

	欧氏几何	分形
产生时间	2000多年前	20世纪60年代
尺度	有特征尺度①	无特征尺度
形状	适合简单的人造物体	适合于大自然界创造的复杂的真实物体
公式	用数学公式描述	用递推算法(迭代语言)描述
维数	0及正整数	一般是分数(正整数是特例)

①特征尺度　是指能代表物体几何特征的长度，例如球的半径，它能够反映物体的几何特征。对具有特征尺度的物体进行简化，其几何性质一般不会变化；另外，构成具有特征尺度的物体形状的线和面是平滑的，几乎任何位置都可以微分。

§1.2　三种典型的分形体

在§1.1节中提及了Koch曲线、Cantor集、Sierpinski地毯、Sierpinski海绵等点、线、面之间的中介现象，下面就通过这几种典型分形体来宏观展示分形魅力之所在。

1. Koch曲线

Koch曲线的构造过程如下：假如有一条长度为1的直线段E_0，对它进行三等分处理，中间的1/3边长用边长为1/3的等边三角形的向上的另两条边来代替，则得到的集合为E_1，这时E_1就包含四条线段，然后对E_1的每条线段重复同样的过程会得到E_2。如此循环，E_{k+1}就是把E_k每条线段中间的1/3用边长为$(1/3)^{k+1}$的等边三角形的向上的另两条边来代替。当k趋向于无穷大时，所得到的极限曲线就是Koch曲线。图1-2展现了Koch曲线的基本构造过程。

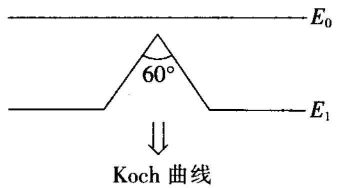

图1-2　Koch曲线的基本构造过程

对于Koch曲线，可以考察两个现象：

首先，考察用规则图形对Koch曲线的近似。分别用直线段和三角形去逼近它，最粗的近似是一个三角形，显然它与Koch曲线相去甚远。如果用直线段去逼近它，这样无疑会进一步提高近似程度，但是这样的话，为了尽可能地减小误差，就必须准备无数的直线段，同时在任何时候都会产生不能忽视的误差。由此可见，Koch曲线这一分形体是无法用传统几何中的规则图形去近似的，它不具有特征尺度。

其次，考察Koch曲线的长度问题。假设图1-2中E_0的长度为1，再来看E_1，它的长度是4/3，当循环构造至E_k时，E_k的长度则等于$(4/3)^k$。显然，k趋向于无穷大时，Koch曲线的长度也趋向于无穷大。因此，Koch曲线没有“长度”这一传统特征尺度。

下面结合§1.1中分形的定义来总结Koch曲线的基本性质。

(1)自相似性质。所谓自相似就是局部与整体的相似，但是这种相似是分形体内部的自相似性，而不是分形体之间的相似性。现在来看Koch曲线，不难看出，如果把[0，1/3]这一部分图形放大3倍，结果和原来的曲线完全相同，如果把[1/3，1/2]、[1/2，2/3]、[2/3，1]区间上的图形各放大3倍，也得到与原来相同的曲线。如果把[0，1/9]上的图形放大9倍，也能得到原来的曲线。

(2)具有精细结构。精细结构是指Koch曲线在任意小的尺度下曲线都含有丰富的细节，不管取多么小的尺度，Koch曲线中60°夹角始终存在。

(3)Koch 曲线的几何性质难以用传统数学方法描述。Koch 曲线虽然处处连续，但是却不可微分，因为它的每一点都是尖点，其切线不存在。在传统数学家眼里，连续函数最多只在可数个点不可微分，但是 Koch 曲线恰恰是一个反例，它处处连续却不可微分，并且它的结构也十分简单，只需按照简单的规则就可以迭代生成。

(4)Koch 曲线的长度为无穷大而面积为零。

(5)Koch 曲线虽然复杂，但是它的结构却十分简单，可以通过单位直线段递归迭代产生。

(6)Koch 曲线的拓扑维是 1，但是它的分形维数则等于 1.261 8(维数的具体计算方法见第 2 章)，拓扑维小于其分维。

2. Cantor 集

Cantor 集的构造过程如下:从单位区间 E_0 出发，去掉中间的 1/3，得到的集合记为 E_1，它包含两个子区间 [0，1/3] 和 [2/3，1]。接着去掉 [0，1/3] 和 [2/3，1] 这两个子区间的各自中间一段，得到的集合记为 E_2。然后依次重复循环，得到 E_k。当 k 趋向于无穷大时，所得到的极限集合就是 Cantor 集。图 1-3 大致展现了 Cantor 集的基本构造过程。

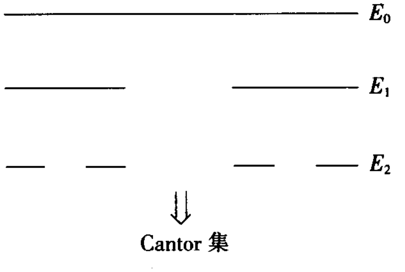

图 1-3　Cantor 集的基本构造过程

与 Koch 曲线类似，Cantor 集也具有相应的性质，如自相似性、具有精细的结构、定义简单、不能用传统的数学语言描述等。Cantor 集是一个不可数的无穷集，它的长度等于$(2/3)^k$，显然，当 k 趋向于无穷大时，Cantor 集的长度等于 0。因此，“长度”也不能来描述 Cantor 集的特征。Cantor 集的拓扑维是 0，但是它的分形维数则等于 0.630 9。

3. Sierpinski 地毯

Sierpinski 地毯的构造过程如下:把一个单位正方形 E_0 划为 9 个相等的小正方形并挖去中间的一个，得到 E_1，然后把 E_1 的每个小正方形再分成 9 个相等的更小的正方形并挖去各自中间的一个得到 E_2。重复这一过程至无穷，极限图形是一条曲线，即为 Sierpinski 地毯。图 1-4 大致展现了 Sierpinski 地毯的基本构造过程。

很显然，Sierpinski 地毯也有类似于 Koch 曲线和 Cantor 集的性质，如自相似性质、精细结构等。Sierpinski 地毯的拓扑维是 1，它的分形维数则等于 1.892 8。

以上列举了 Koch 曲线、Cantor 集、Sierpinski 地毯这三种典型的分形体，传统数学认为这些集合和函数是“病态的”或“妖魔的”而不予理睬。现在，这种情况开始出现了改变，人们不但认识到许多“不光滑集”很值得研究，而且用它们来描述自然现象要比经典的几何图形好得多，分形理论的产生则为进行这类描述提供了有力工具，这也正如分形理论创始人曼德尔布罗特所指出的那样：“……大自然给数学家们开了一个大玩笑。19 世纪数学家未曾想到的自然界并非不存在。数学家们为砸烂 19 世纪自然主义的桎梏而费尽心机创造出来的那些病态结构，原来正是他们周围熟视无睹的东西”！

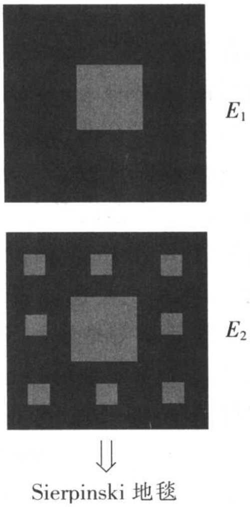

图 1-4 Sierpinski 地毯的基本构造过程

1.3 分形理论在地理信息研究中的应用评述

分形理论的产生，源于曼德尔布罗特对自然界的长期深入观察与思考，分形与分维概念的产生确实能够为客观自然界的描述提供更贴近的语言，用分形与分维的概念、方法或是思路可以为真实而全面地刻画大自然的几何复杂性提供新的有力工具。众所周知，地理现象一般都会受到降水、气温、地形、地貌、构造等因素不同程度上的影响，所以是非线性的、复杂的，那么复杂的地理现象究竟是通过复杂过程产生的，还是通过简单过程由迭代产生的呢？大的地理事件与小的地理事件是否有着相同的动力学机制，在二者之间能否建立定量关系进行不同尺度上性质、规律的演绎推理？认真思考并解答诸如此类的问题对于促进地理学研究从“What”向“How”与“Why”的深化无疑具有重要意义。这样一来，研究现象自相似性质(通过对部分性质的认识来达到对整体性质的认识)与迭代特征(复杂的现象可以归结为简单的过程、简单的过程可以产生复杂的现象)的分形理论就为地理信息的研究不仅提供了有力工具，而且也指出了可能的创新方向。

分形理论在一定程度上可以说是通过对地理现象的观察而逐渐形成的。分形理论的产生，使得现代科学可以超越传统科学的束缚而对自然界中复杂事物的描述变得轻松自如，用分维来描述复杂的自然和人文现象，已经取得了较好效果

(Turrcote，1986，1996；肖尔茨 等，1989；Xu T et al，1993；张济中，1995)。这一方面促进了分形理论本身的发展，另一方面也加深了对许许多多原先并没有被很好理解的现象的认识，并引出了新的有待解决的命题，进而推动了包括地理学在内的诸多学科的纵深发展和逐步完善。分形理论在地理学中的应用研究已经揭示出一些地理现象的分形性质。在地貌学领域，运用分形理论研究了地表面的起伏，例如山地的起伏形态，以及它们产生、发展、分布的规律等，已经形成了分形地貌学(fractal geomorphology)这一地貌学新的分支，它不仅以分形理论为基础对地表面(特别是山地表面)的形态进行了描述，而且进而以分维为中介参数还建立起山地起伏等地貌现象与其内部机制之间的联系，用以探讨分形布朗地貌的演化规律，认为分维可以成为描述地表面粗糙度的良好指标(艾南山，1993，1998；张捷 等，1994)。分形地貌学除去研究了地表的起伏之外，还探讨了山系、断层系的空间展布以及喀斯特洼地、地表水系、海岸线、湖泊等的分形性质(洪时中 等，1988；宋林华 等，1995；朱晓华 等，1999，何隆华 等，1996；金德生 等，1997；梁虹 等，1997；冯金良 等，1997；朱晓华 等，2001)。同时，运用分形布朗运动随机分形生成逼真景物的方法，借助于分维可用以产生各种各样的自然景观，自然界中的山地起伏、山脉的形状以及河流(水系)等都被形象而逼真地模拟了出来。在灾害学领域，滑坡、泥石流等灾害的发生、旱涝灾害的发生、地震的发生、火灾的发生、灾害性海潮的发生、灾害的灾情等都被揭示出具有分形性质(周寅康 等，1995，1998；魏一鸣 等，1998；朱晓华，1999，肖尔茨 等，1991；Turrcotte,1996)。在人文地理学领域，分形理论也同样取得了一定应用。应用分形理论已经探讨了类似于海岸线的城市边界线的分形特征，探讨了城市等级体系和城市规模分布的分形特征。另外，城市道路网的分布、城市商业网点的布局、城市人口的分布以及城镇土地利用类型的空间展布等的分形性质也都被相关研究所揭示和证明(李鸿益 等，1992 陈涛 等，1994；陈勇 等，1993)。除此而外，分形理论还在沙漠定量化研究、长江水系沉积物重金属含量空间分布特征、旅游景观的设计布局以及与地理位置有关的金矿矿位等方面也做出了实际性的探索和应用(陈彦光 等，1997)。总之，分形理论在地理学中的应用已经揭示出了某些地理现象的分形性质，结合已有知识，它把对客观世界的地理认知向前推进了一定距离。由于受篇幅限制，本章不再详述分形理论在某个领域中的研究概况，具体内容详见后面各章节。

尽管地理信息的分形研究已经取得了一定的阶段性成果，这在一定程度上弥补了传统地理学中对自然界中大量无规则复杂现象描述的欠缺，但是对于地理信息的分形研究现状还应该有一个客观认识。关于地理信息的分形研究，以下几个方面的问题值得关注和探讨(朱晓华 等，1999)。

(1)从地理信息的已有分形应用研究情况可以看出，分形理论对从事地理信