

依据最新考试大纲编写

感悟高考 数学复习精解

GANWU GAOKAO 感悟高考 · 领悟人生

SHUXUE FUXI JINGJIE

主编 陈伦全 姚友春

四川出版集团 · 四川科学技术出版社

前言

本书依据最新《教学大纲》和《考试大纲》，在充分吸收了近几年高考命题的研究成果和众多国家级示范中学的特级、高级教师的教学心得的基础上，精心编写而成。

本书专门为高三总复习第一轮而设计，内容丰富，系统全面，设有知识网络图、点击考情、直击考点、要点扫描、初露锋芒、师生互动、为您支招、一试身手等板块，内容简洁明了，突出实用性，所选训练题难度适中，突出方法和思想。本书既注重教与学的同步性，更体现教与学的互动性，从而使教、学、练、考成为一个科学严谨的整体。

本书每章结构设计如下：

【知识网络】站在全局的高度，明确各知识点的纵横联系。

【点击考情】梳理本章考点内容，研究高考最新动态，分析高考命题趋势。

【直击考点】明确高考对各节知识点的基本要求和能力要求。

【要点扫描】简明扼要地概括梳理知识规律及解题要点，破解疑惑。

【初露锋芒】熟悉内容，提升信心，熟知要点，熟练方法，夯实三基，点点突破。

【师生互动】通过例题分析讲解，从重点和难点上下工夫，掌握重点，突破难点，培养学生科学的思维方法和逻辑思维推理能力，以及运用所学知识解决问题的能力。

【为您支招】总结解题规律，梳理解题思路，提炼数学思想与方法。

【一试身手】以能力立意为导向，精选习题，优化训练，练中悟，悟中练，检测对照，查漏补缺，积累解题经验，提高解题技巧，提高应试效果。

本书特色：

精：是指整体上、宏观上、全程上的精练处理，结构紧凑、合理，整体上更加符合应试要求。

新：是指信息、思想和观点的敏锐反应和及时转换，试题的鲜活，视角的独到，方法的独创，情景的创设等让学生耳目一新。

实：是指符合教学实际的需要，具有较强的可操作性。在内容上，贴近备考实际和高考脉搏；在体例上，符合教考规律；在认知上，符合学生认知规律；在形式上，便于学生阅读、解答、记录，并能使学生感到方便、适意。

优：是指结构、内容的优化，局部、微观、细节处的艺术处理，板块设计讲究灵动、鲜活，以达到最佳效果。

美：是指内容和形式的和谐美，严谨性和科学性的内在美，循循善诱，教人以方、积极向上的思想美。

本书亮点：

(1) 吸纳了最新的教学科研成果，以阅读材料的形式呈献给学生，让学生贴近时代，注重与现代社会特点、科学成果、自然环境和现实生活的联系，体现知识的拓展、综合及渗透的无限空间。

(2) 对典型的题目进行了点评、归纳、总结，从而有效地指导复习工作，做到有的放矢，少走弯路，切实提高复习功效。

(3) 结构科学合理，由初露锋芒到师生互动及一试身手，体现了由浅入深，由表及里，由特殊到一般的认知规律。

本书策划思路清晰，科学性强，体例设置合理，试题新颖而有创意，内容简洁而规范，整体上体现了科学性、简洁性、实用性、资料性，又有“精、新、实、优、美”的特色。

本书在编写过程中得到四川师范大学、重庆师范大学的一些专家、教授的大力支持和具体指导，在此表示衷心感谢！

编者

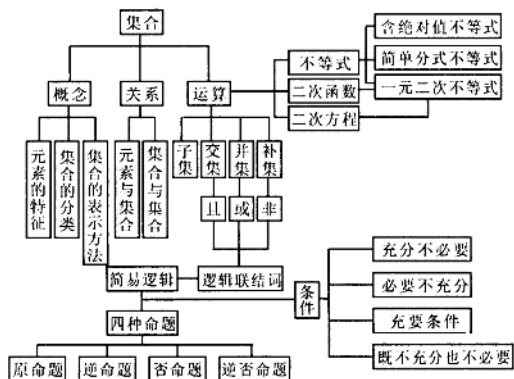
2007年6月

目 录

第一章 集合与简易逻辑	1	第六章 不等式	79
1.1 集合	1	6.1 不等式的概念与性质	79
1.2 含绝对值的不等式与一元二次不等式	4	6.2 算术平均数与几何平均数	81
1.3 简易逻辑与充要条件	6	6.3 不等式的证明	83
阅读材料 例说解题思维起点的选择	9	6.4 不等式的解法	85
第二章 函数	11	6.5 不等式的综合应用	87
2.1 映射与函数	11	第七章 直线和圆的方程	90
2.2 函数的定义域与值域	14	7.1 直线的方程	90
2.3 函数的性质	16	7.2 两条直线的位置关系	92
2.4 二次函数	19	7.3 简单的线性规划	94
2.5 指数与指数函数	22	7.4 圆的方程	97
2.6 对数与对数函数	25	7.5 直线与圆、圆与圆的位置关系	99
2.7 反函数	28	7.6 对称问题	101
2.8 函数的图像	31	第八章 圆锥曲线	103
2.9 函数的综合应用	34	8.1 椭圆	103
第三章 数列	38	8.2 双曲线	106
3.1 数列的概念	38	8.3 抛物线	108
3.2 等差、等比数列的概念及基本运算	40	8.4 直线与圆锥曲线的位置关系	111
3.3 等差、等比数列的性质及综合应用	42	8.5 轨迹问题	113
3.4 数列求和及实际应用	45	8.6 圆锥曲线的综合应用	115
第四章 三角函数	48	阅读材料 漏解的心理分析	118
4.1 任意角的三角函数	48	第九章 直线 平面 简单几何体	120
4.2 同角三角函数的基本关系式及诱导公式	50	9.1 平面	120
4.3 两角和与差的三角函数	52	9.2 空间的平行直线和异面直线	123
4.4 三角函数式的化简、求值与证明	54	9.3 直线与平面平行、平面与平面平行	125
4.5 三角函数的图像及其变换	57	9.4 直线和平面垂直与平面和平面垂直	127
4.6 三角函数的性质	59	9.5 空间向量及其运算	129
4.7 三角函数的值域与最值	62	9.6 向量的坐标运算	131
4.8 三角函数的综合应用	64	9.7 空间角	134
阅读材料 用整体思想解三角题	67	9.8 空间距离	137
第五章 平面向量	68	9.9 棱柱	140
5.1 平面向量的基本概念及运算	68	9.10 棱锥	143
5.2 平面向量的坐标运算与数量积	71	9.11 多面体与球	145
5.3 线段的定比分点与平移	74	第十章 排列 组合 概率	148
5.4 解斜三角形及向量的应用	76	10.1 两个计数原理	148
		10.2 排列组合的基本问题	150
		10.3 排列组合的综合问题	151

10.4 二项式定理及其应用	153	12.3 函数的极限及函数的连续性	180
10.5 随机事件的概率	155	第十三章 导数	183
10.6 互斥事件有一个发生的概率	157	13.1 导数的概念	183
10.7 相互独立事件同时发生的概率	159	13.2 导数的应用	185
第十一章 概率与统计	162	第十四章 复数	188
11.1 离散型随机变量的分布列	162	14.1 复数的基本概念	188
11.2 离散型随机变量的期望与方差	165	14.2 复数的代数形式及其运算	190
11.3 抽样方法	167	阅读材料 代数问题化归为解析几何问题的 途径	193
11.4 总体分布的估计	170	阅读材料 例说解数学题的八大意识	195
11.5 正态分布与线性回归	172	阅读材料 强化回归意识 提高解题能力	198
第十二章 极限	176	阅读材料 数学选择题的解法	200
12.1 数学归纳法	176		
12.2 数列的极限	178		

第一章 集合与简易逻辑



点击考情

集合与简易逻辑是高考的热点,在全国各地的高考试卷

中基本上都有涉及,多为选择题,填空题,很少有大题出现.在考查内容上本章的命题体现的要点有:①集合的概念及运算的考查稳中求新、稳中求活.这部分题以基础题型为主,大多数是选择题、填空题,从涉及知识上讲,常与函数、方程、不等式(特别是二次不等式、绝对值不等式、分式不等式)等联系的综合命题.②简易逻辑的考查通常不会单独命题,但它却贯穿每道题的始终,主要考查对其概念的理解和判断,有时也会考查用反证法证明命题.③充要条件的题型,几乎年年考到,多数是与代数、三角、立体几何、解析几何中的知识点进行结合命题,多为综合题,从考查的方式上看,或从充要条件的概念(包括充分条件、必要条件、充分不必要条件、必要不充分条件等)角度考查“箭头”的指向,或从集合角度考查包含关系从而考查充要条件.

1.1 集 合



一、直击考点

理解集合、子集、空集的概念,了解属于、包含、相等关系的意义.理解交集、并集、补集的概念.掌握相关术语和符号,能用它们表示一些简单的集及其关系.能运用集合知识进行交、并、补等集合运算.



二、要点扫描

1. 集合、子集、空集的概念

一般地,某些指定的对象集在一起成为一个集合,也简称集.

不含任何元素的集合叫做空集,记作 $\varnothing$.

对于两个集合 A 与 B ,如果集合 A 中任何一个元素都是集合 B 的元素,我们就说集合 A 包含于集合 B ,或集合 B 包含集合 A .记作 $A \subseteq B$ 或 $B \supseteq A$.这时我们也说集合 A 是集合 B 的子集.当集合 A 不包含于集合 B ,或集合 B 不包含集合 A 时,记作 $A \not\subseteq B$ 或 $B \not\supseteq A$.

2. 集合中元素的三个特征

(1)确定性:任何一个对象都能确切地判断是集合中的元素或不是集合中的元素.

(2)互异性:一个集合中不应重复出现同一个元素.

(3)无序性:用列举法表示的集合中的元素与顺序无关.如 $\{1,2,3\}$, $\{3,1,2\}$, $\{2,3,1\}$ 表示同一个集合.

3. 集合的分类

按集合元素可数性分为有限集与无限集.

4. 集合的表示法

(1)列举法:将集合中的元素一一列出,放在“ $\{ \}$ ”内.

(2)描述法:表示形式是 $\{x|P\}$,其中 x 代表元素, P 表示元素 x 所具有的公共属性.

(3)图示法:通常用圆、椭圆等一条封闭曲线的内部或数轴表示一个集合.

5. 交集、并集、全集、补集的概念

(1)并集:由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合,叫做集合 A 、 B 的并集,记作 $A \cup B$,即 $A \cup B = \{x|x \in A \text{ 或 } x \in B\}$.

(2)交集:由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合,叫做集合 A 、 B 的交集,记作 $A \cap B$,即 $A \cap B = \{x|x \in A \text{ 且 } x \in B\}$.

(3)全集:如果集合 S 含有我们所研究的各个集合的全部元素,这个集合可以看成是一个全集,通常用 U 表示.

(4)补集:一般地,设 S 是一个集合, A 是 S 的一个子集(即 $A \subseteq S$),由 S 中所有不属于 A 的元素组成的集合,叫做 S 中子集 A 的补集(或余集),记作 $C_S A$,即 $C_S A = \{x | x \in S, \text{且 } x \notin A\}$.

6. 集合的运算性质.

$$\textcircled{1} A \cap B = A \Rightarrow A \subseteq B;$$

$$\textcircled{2} A \cup B = A \Rightarrow B \subseteq A;$$

$$\textcircled{3} C_U(A \cup B) = C_U A \cap C_U B;$$

$$\textcircled{4} C_U(A \cap B) = C_U A \cup C_U B.$$



三、初露锋芒

1. (2005 年全国) 设 I 为全集, S_1, S_2, S_3 是 I 的三个非空子集,且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$,则下面论断正确的是()

$$\text{A. } C_I S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = \emptyset \quad \text{B. } S_1 \subseteq (C_I S_2 \cap C_I S_3)$$

$$\text{C. } C_I S_1 \cap C_I S_2 \cap C_I S_3 = \emptyset \quad \text{D. } S_1 \subseteq (C_I S_2 \cup C_I S_3)$$

2. 设 M, N 是两个非空集合,定义 M 与 N 的差集为 $M - N = \{x | x \in M \text{ 且 } x \notin N\}$,则 $M - (M - N)$ 等于()

$$\text{A. } N \quad \text{B. } M \cap N \quad \text{C. } M \cup N \quad \text{D. } M$$

3. (2006 年上海理) 已知集合 $A = \{-1, 3, 2m-1\}$, 集合 $B = \{3, m^2\}$. 若 $B \subseteq A$, 则实数 $m =$ _____, 此时若 $B \subseteq C \subseteq A$, 则满足条件的 C 的个数为 _____.

4. 已知集合 $A = \{a+2, (a+1)^2, a^2+3a+3\}$, 若 $1 \in A$, 则实数 $a =$ _____.



四、师生互动

例 1 设集合 $P = \{x-y, x+y, xy\}$, $Q = \{x^2+y^2, x^2-y^2, 0\}$, 若 $P=Q$, 求 x, y 的值及集合 P, Q .

分析:

点评:

例 2 设 $M = \{x | x^2 - 2x - 3 = 0\}$, $N = \{x | ax - 1 = 0\}$, 若 $M \cap N = N$, 求所有满足条件的实数 a 组成的集合.

点评:

例 3 已知集合 $A = \{x | x^2 + (p+2)x + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 且满足条件 $A \cap \mathbb{R}^+ = \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

分析:

点评:

例 4 已知集合 A 和集合 B 各含有 12 个元素, $A \cap B$ 含有 4 个元素, 试求同时满足下面两个条件的集合 C 的个数:

① $C \subseteq A \cup B$ 且 C 中含有 3 个元素; ② $C \cap A \neq \emptyset$.

分析:

点评:



五、为您支招

1. 正确理解集合的概念必须掌握构成集合的两个必要条件:研究对象是具体的,其属性是确定的.

2. 在判断给定对象能否构成集合时,特别要注意他的“确定性”,在表示一个集合时,要特别注意“互异性”,很多考点也大多围绕这两点出题.

3. 集合问题要注意两看:一看“代表元”、二看“满足的条件”(是数集还是点集,是 x 的取值范围还是 y 的取值范围等等).

4. 若集合中元素是用平面坐标形式表示的,则要注意满足条件的点构成的图形是什么,用数形结合法解之.

5. 若集合中含有参数,需对参数进行分类讨论,尤其要注意“二次”这个考点.



六、一试身手

1. 设集合 $M = \{x | x = \frac{k}{2} + \frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}\}$, $N = \{x | x = \frac{k}{4} + \frac{1}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 则()

- A. $M = N$ B. $M \subsetneq N$
C. $M \supsetneq N$ D. $M \supseteq N$

2. 设 M, P 是两个非空集合,定义 M, P 的差集为 $M - P = \{x | x \in M, \text{且 } x \notin P\}$, 集合 $A = \{y | y = x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x < 4\}$, 则 $(A - B) \cup (B - A) = ()$

- A. $\{x | -1 \leq x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$
B. $\{x | -1 < x < 2 \text{ 或 } x > 4\}$
C. $\{x | -1 \leq x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$
D. $\{x | -1 < x < 1 \text{ 或 } x > 2\}$

3. 设集合 $M = \{x | x^2 - x < 0\}$, $N = \{x | |x| < 2\}$, 则()

- A. $M \cap N = \emptyset$ B. $M \cap N = M$
C. $M \cup N = M$ D. $M \cup N = \mathbb{R}$

4. 函数 $f(x) = \begin{cases} x & x \in P \\ -x & x \in M \end{cases}$, 其中 P, M 为实数集 $\mathbb{R}$ 的两个非空子集, 又规定 $f(P) = \{y | y = f(x), x \in P\}$, $f(M) = \{y | y = f(x), x \in M\}$. 给出下列四个判断, 其中正确判断有()

- ①若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) = \emptyset$
②若 $P \cap M = \emptyset$, 则 $f(P) \cap f(M) \neq \emptyset$
③若 $P \cup M = \mathbb{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) = \mathbb{R}$
④若 $P \cup M = \mathbb{R}$, 则 $f(P) \cup f(M) \neq \mathbb{R}$

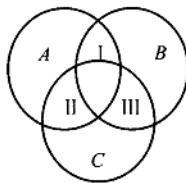
A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

5. 满足条件 $M \subsetneq \{0, 1, 2\}$ 的集合 M 共有 _____ 个.

6. 设全集 $U = \{x | 0 < x < 10, x \in \mathbb{N}^*\}$, 若 $A \cap B = \{3\}$, $A \cap \complement_U B = \{1, 5, 7\}$, $\complement_U A \cap \complement_U B = \{9\}$, 则 $A = \underline{\hspace{1cm}}$, $B = \underline{\hspace{1cm}}$

7. 某班参加数学课外活动小组有 22 人, 参加物理课外活动小组有 18 人, 参加化学活动小组有 16 人, 至少参加一科活动小组有 36 人, 则三科课外活动小组都参加的同学至

多有 _____ 人?



8. 若集合 $A = \{x | x^2 + ax + 1 = 0, x \in \mathbb{R}\}$, 集合 $B = \{1, 2\}$, 且 $A \subseteq B$, 求实数 a 的取值范围.

9. 集合 $A = \{x | -2 \leq x \leq 7\}$, $B = \{x | m + 1 < x < 2m - 1\}$, 若 $A \cup B = A$, 求实数 m 的取值范围.

分析:

10. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 = 0\}$, $B = \{x | x^2 - ax + a - 1 = 0\}$, 且 $A \cup B = A$, 求实数 a .

分析:

1.2 含绝对值的不等式与一元二次不等式



一、直击考点

掌握一些简单的含绝对值的不等式的解法; 掌握一元二次不等式的解法; 能应用一元二次不等式、二次方程、二次函数三者之间的关系解决问题. 注重化归与转化思想、分类讨论思想、数形结合思想在解不等式中的运用.



二、要点扫描

1. 绝对值的代数意义: $|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$.

绝对值的几何意义: $|x|$ 是指数轴上 x 对应的点到原点的距离; $|x_1 - x_2|$ 是指数轴上 x_1, x_2 对应的两点间距离.

2. 关于 $|ax + b| > c$, $|ax + b| < c$ 型不等式的解法

(1) 若 $c > 0$, 则:

$|ax + b| > c \Leftrightarrow ax + b > c$ 或 $ax + b < -c$; $|ax + b| < c \Leftrightarrow -c < ax + b < c$.

(2) 若 $c < 0$, 则 $|ax + b| > c \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}$; $|ax + b| < c \Leftrightarrow x \in \emptyset$.

(3) 推广: $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$;

$|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow g(x) < f(x) < -g(x)$ 或 $f(x) > g(x)$.

3. 一元二次不等式、二次方程、二次函数之间的关系:

判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) 的图像			
一元二次方程 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的根	相异两实根 $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	两相等实根 $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实根
不等式解集	$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ (a > 0) \end{cases}$ $\{x x_1 < x < x_2\}$	$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ (a > 0) \end{cases}$ $\{x \in \mathbf{R} x \neq -\frac{b}{2a}\}$	$\begin{cases} ax^2 + bx + c > 0 \\ (a > 0) \end{cases}$ $\mathbf{R}$
	$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ (a > 0) \end{cases}$ $\{x x_1 < x < x_2\}$	$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ (a > 0) \end{cases}$ $\emptyset$	$\begin{cases} ax^2 + bx + c < 0 \\ (a > 0) \end{cases}$ $\emptyset$

4. 简单分式不等式的解法

(1) $\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0$;

(2) $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0$;

(3) $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$;

(4) $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$.

5. 简单的高次不等式通常用数轴标根法“穿针引线”来求解.



三、初露锋芒

1. (2006 年安徽) 设集合

$A = \{x | |x - 2| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$,

$B = \{y | y = -x^2, -1 \leq x \leq 2\}$ 则 $C_{\mathbf{R}}(A \cap B)$ 等于

()

A. $\mathbf{R}$

B. $\{x | x \in \mathbf{R}, x \neq 0\}$

C. $\{0\}$

D. $\emptyset$

2. (2005 年北京) 不等式 $|\frac{mx-1}{x}| > m (m > 0)$ 的解集为

()

A. $\{x | x > m\}$

B. $\{x | x < \frac{1}{2m}\}$

C. $\{x | \frac{1}{2m} < x < \frac{1}{m}\}$

D. $\{x | x < 0 \text{ 或 } 0 < x < \frac{1}{2m}\}$

点评:

3. 已知不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $|x| < 2$, 则不等式 $cx^2 + bx + a > 0$ 的解集为 _____.

4. 已知集合 $A = \{x | x > 0\}$, 集合 $B = \{y | y = (a-2)x^2 + 2(a-2)x - 4\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是 _____.

分析:

点评:



四、师生互动

例 1 解下列不等式:

$$(1) -1 < x^2 + 2x - 1 \leq 2; \quad (2) \frac{x-1}{x} \geq 2;$$

$$(3) \frac{x(x+2)}{x-3} \leq 0.$$

分析:

点评:

例2 已知 $|x - \frac{5}{2}| < a$ 时, 不等式 $|x^2 - 5| < 4$ 恒成立, 求正数 a 的取值范围.

分析:

点评:

例3 设集合 $A = \{x | |x - \frac{(a+1)^2}{2}| \leq \frac{(a-1)^2}{2}\}$, 集合 $B = \{x | x^2 - 3(a+1)x + 2(3a+1) \leq 0\}$, 是否存在实数 a 使 $A \cup B = A$ 成立.

分析:

点评:

例4 (2006年北京) 解关于 x 的不等式: $ax^2 - 2 \geq 2x - ax (a \in \mathbf{R})$.



五、为您支招

1. 绝对值不等式的常见模型: ① $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$; ② $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ 或 $f(x) < -g(x)$, 总之一句话就是“大于取两边, 小于取中间”.

2. 含有一个未知数且未知数的最高次数是2的不等式叫做一元二次不等式. 解一元二次不等式时候要注意二次项系数的符号, 只有当二次项系数为正且所对应方程有两个根的情况下, 才能运用“大于取两边, 小于取中间”这一经典语句解题.

3. 将解绝对值不等式题型引申可得到绝对值不等式的恒成立题型, 破解的关键是充分运用好绝对值的代数意义和几何意义以及集合的包含关系和求函数最值的方法.

4. 与绝对值中的恒成立题型一样, 要运用好函数最值的求法和数形结合等思想. 其中一个易误区是: 二次项系数是否为0.

5. 一元二次方程的根就是一元二次函数图像与 x 轴交点的横坐标, 也是一元二次不等式解集的端点值, 这就是“三个二次”的联系. 要充分运用好这句话, 快速将图像与 x 轴的交点转换成方程的根、不等式解集的端点值.



六、一试身手

1. 已知集合 $M = \{x | |x-1| \leq 2, x \in \mathbf{R}\}$, $P = \{x | \frac{5}{x+1} \geq 1, x \in \mathbf{Z}\}$, 则 $M \cap P$ 等于()

- A. $\{x | 0 < x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$
- B. $\{x | 0 \leq x \leq 3, x \in \mathbf{Z}\}$
- C. $\{x | -1 \leq x \leq 0, x \in \mathbf{Z}\}$
- D. $\{x | -1 \leq x < 0, x \in \mathbf{Z}\}$

2. 不等式 $|\frac{ax-1}{x}| > a$ 的解集是 M , 且 $2 \notin M$, 则 a 的范围是()

- A. $\{a | a > \frac{1}{4}\}$
- B. $\{a | a \geq \frac{1}{4}\}$
- C. $\{a | 0 < a < \frac{1}{2}\}$
- D. $\{a | 0 < a \leq \frac{1}{2}\}$

3. 不等式 $(2x-1)(1-|x|) < 0$ 的解集是()

A. $|x|x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$

B. $|x| - 1 < x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$

C. $|x - (1 < x < \frac{1}{2})|$

D. $|x| x < -1$ 或 $x > \frac{1}{2}$

4. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集是 $\alpha < x < \beta$, 且 $0 < \alpha < \beta$, 则不等式 $cx^2 - bx + a > 0$ 的解集为()

A. $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$ B. $-\frac{1}{\beta} < x < -\frac{1}{\alpha}$

C. $-\frac{1}{\alpha} < x < -\frac{1}{\beta}$ D. $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

5. 关于 x 的不等式 $ax - b > 0$ 的解集为 $\{x|x > 1\}$, 则关于 x 的不等式 $\frac{ax+b}{x-2} > 0$ 的解集为_____.

6. 不等式 $|x+2| \geq |x|$ 的解集是_____.

7. 函数 $y = (a-2)x^2 + 2(a-2)x + 4$, 如果对一切 $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是_____.

8. 已知集合 $A = \{x|x^3 + 3x^2 + 2x > 0\}$, 集合 $B = \{x|x^2 + ax + b \leq 0\}$, 且 $A \cap B = \{x|0 < x \leq 2\}$, $A \cup B = \{x|x > -2\}$ 求 a, b 的值.

9. 解关于 x 的不等式 $\frac{ax^2}{ax-1} > x$ ($a \in \mathbf{R}$).

10. 若不等式 $|x-4| + |3-x| < a$ 的解集是空集, 求 a 的取值范围.

分析:

1.3 简易逻辑与充要条件



一、直击考点

理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义. 理解四种命题及其相互关系. 理解并掌握充分条件、必要条件、充要条件的概念. 能够判断给定两个命题的充要关系.



二、要点扫描

1. 逻辑联结词: “或”、“且”、“非”.

2. 命题、简单命题、复合命题的概念

可以判断真假的语句叫做命题; 不含逻辑联结词的命题叫简单命题; 含有逻辑联结词的命题叫做复合命题.

3. 命题真假的判断

(1) 简单命题真假的判断

简单命题可根据定义、公理、定理、法则、公式等判断真假, 也可通过举反例判断真假.

(2) 复合命题根据真值表判断其真假

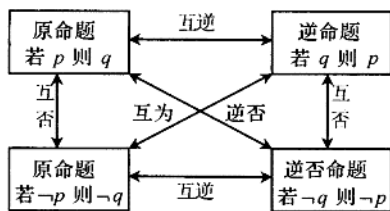
p	q	非 p	p 且 q	p 或 q
真	真	假	真	真
真	假	假	假	真
假	真	真	假	真
假	假	真	假	假

4. 四种命题的关系(见下图)

5. 反证法证明命题的步骤

(1) 假设命题的结论不成立;

(2) 从这个假设出发, 经过推理论证, 得出矛盾;



(3) 判断假设不成立,从而肯定命题结论正确.

6. 充分条件、必要条件、充要条件的概念

若 $p \Rightarrow q$, 则 p 是 q 的充分条件, q 是 p 的必要条件; 若 $p \Rightarrow q$, 但 $q \not\Rightarrow p$, 则 p 是 q 的充分非必要条件; 若 $p \not\Rightarrow q$, 但 $q \Rightarrow p$, 则 p 是 q 的必要非充分条件; 若 $p \Rightarrow q$, 且 $q \Rightarrow p$, 则 p, q 互为充要条件.



三、初露锋芒

1. 由下列各组命题构成“ p 或 q ”、“ p 且 q ”、“ $\neg p$ ”形式的复合命题中,“ p 或 q ”为真,“ p 且 q ”为假,“ $\neg p$ ”为真的是

()

- A. $p: 3$ 是偶数, $q: 4$ 为奇数
- B. $p: 3 + 2 = 6$, $q: 5 > 3$;
- C. $p: a \in \{a, b\}$, $q: |a| \subseteq \{a, b\}$
- D. $p: Q \subsetneq \mathbf{R}$, $q: N = \mathbf{Z}$

2. 某个命题是与自然数 n 有关的命题,若 $n = k (k \in \mathbf{N}^*)$ 时该命题成立,那么可以推出当 $n = k + 1$ 时该命题成立,现已知当 $n = 2008$ 时,该命题不成立,那么下列说法正确的是 ()

- A. 当 $n = 2009$ 时该命题不成立
- B. 当 $n = 2009$ 时该命题成立
- C. 当 $n = 2007$ 时该命题不成立
- D. 当 $n = 2007$ 时该命题成立;

分析:

点评:

3. 若命题甲是命题乙的充分非必要条件,命题丙是命题乙的必要非充分条件,命题丁是命题丙的充要条件,则命题丁是命题甲的_____.

4. 有 6 名歌手参加电视歌曲大奖赛,组委会只设一名特别奖. 观众 A 猜:不是 1 号就是 2 号能获得特别奖;B 猜:3 号不可能获得特别奖;C 猜:4 号、5 号、6 号都不可能获得特别奖;D 猜:能获得特别奖的是 4 号、5 号、6 号中的一个. 比赛结果公布表明,四人中只有一人猜对了. 问:是_____猜对了,是_____号歌手获特别奖.



四、师生互动

例 1 (1) 是否存在实数 m , 使得 $2x + m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$ 的充分条件?

(2) 是否存在实数 m , 使得 $2x + m < 0$ 是 $x^2 - 2x - 3 > 0$

的必要条件?

分析:

点评:

例 2 已知函数 $f(x)$ 满足下列条件: (1) $f(\frac{1}{2}) = 1$; (2)

$f(xy) = f(x) + f(y)$; (3) $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$, 试证明: $\frac{1}{4}$

不在 $f(x)$ 的定义域内.

分析:

点评:

例 3 已知集合 $P = \{x | x^2 - 4px + 2p + 6 = 0\}$, $Q = \{x | x < 0, x \in \mathbf{R}\}$, 若 $P \cap Q \neq \emptyset$, 求实数 p 的取值范围.

分析:

例4 已知抛物线 $C: y = -x^2 + mx - 1$ 和点 $A(3, 0)$, $B(0, 3)$, 求抛物线 C 与线段 AB 有两个不同交点的充要条件.

分析:

点评:



五、为您支招

1. 四种命题反映出命题之间的内在联系, 要注意结合实际问题, 理解其关系 (尤其是两种等价关系) 的产生过程.

2. 由四种命题间关系可以发现, 原命题与逆否命题是说明一个事物的两个方面, 它们同真同假. 那么在有些命题的证明中, 就可以从结论的否定入手, 推出条件的否定或结合条件推出相悖的结论, 从而说明原结论成立.



六、一试身手

1. (2006 年天津) 设集合 $M = \{x | 0 < x \leq 3\}$, $N = \{x | 0 < x \leq 2\}$, 那么 “ $a \in M$ ” 是 “ $a \in N$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

2. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0 (a \neq 0)$ 有一个正根和一个负根的充分非必要条件是 ()

- A. $a < 0$
- B. $a > 0$
- C. $a < -1$
- D. $a > 1$

3. “实数的平方是正数或 0” 是 ()

- A. 非 p 形式的命题
- B. 是 p 或 q 形式的命题
- C. 是 p 且 q 形式的命题
- D. 不是复合命题

4. 有下列命题: ① 2004 年 10 月 1 日是国庆节, 又是中秋节; ② 10 的倍数一定是 5 的倍数; ③ 梯形不是矩形; ④ 方程 $x^2 = 1$ 的解 $x = \pm 1$; ⑤ $3 \geq 2$. 其中, 复合命题有 ()

- A. 1 个
- B. 2 个
- C. 3 个
- D. 4 个

5. 同住一间寝室的四名女生, 她们当中有一人在修指甲, 一人在看书, 一人在梳头发, 另一人在听音乐. ① A 不在修指甲, 也不看书; ② B 不听音乐, 也不修指甲; ③ 如果 A 不

听音乐, 那么 C 不在修指甲; ④ D 既不在看书, 也不修指甲; ⑤ C 不在看书, 也不听音乐. 若上面的命题都是真命题, 问她们各在干什么? A 在 _____; B 在 _____; C 在 _____; D 在 _____.

6. 设集合 A, B 是全集 U 的两个子集, 则 $A \subseteq B$ 是 $(\complement_U A) \cup B = U$ 的 _____. (填“充分不必要条件”、“必要不充分条件”、“充要条件”、“既不充分也不必要条件”之一)

7. 已知 $p: |1 - \frac{x-1}{3}| \leq 2, q: x^2 - 2x + 1 - m^2 \leq 0 (m > 0)$, 若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分非必要条件, 则实数 m 的取值范围是 _____.

8. 设命题 $p: a$ 满足集合 $\{a | \text{方程 } x^2 + 2ax + 1 = 0 \text{ 无实根}\}$; 命题 $q: \text{不等式 } ax^2 - x + a > 0 \text{ 的解集为 } \mathbf{R}$. 如果 “ p 或 q ” 真, “ p 且 q ” 假, 求实数 a 的取值范围.

9. 求 $ax^2 + 2x + 1 = 0 (a \neq 0)$ 至少有一负根的充要条件.

10. 若 x, y, z 均为实数, 且 $a = x^2 - 2y + \frac{\pi}{2}, b = y^2 - 2z + \frac{\pi}{3}, c = z^2 - 2x + \frac{\pi}{6}$, 则 a, b, c 中是否至少有一个大于零? 请说明理由.

阅读材料

例说解题思维起点的选择

科学而又合理地选择思维起点,对于形成正确的解题思路,迅速获得求解方法是至关重要的.本文结合实例,就解题思维起点的选择,谈几点体会.



一、以条件作为思维起点

以题意中的某些(个)条件为思维起点,展开联想,发掘内在联系,探求解题途径.

例1 设 $f(x)$ 满足 $f(x_1) + f(x_2) = 2f(\frac{x_1+x_2}{2})f(\frac{x_1-x_2}{2})$,且 $f(\frac{\pi}{2}) = 0, x_1, x_2 \in \mathbf{R}$,求证: $f(x)$ 是周期函数,并求出它的一个周期.

分析:由 $f(x_1) + f(x_2) = 2f(\frac{x_1+x_2}{2})f(\frac{x_1-x_2}{2})$,联想到三角中的和差化积公式: $\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos \frac{x_1+x_2}{2} \cos \frac{x_1-x_2}{2}$ 与它的结构雷同,并且 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.因为 $\cos x$ 的周期为 2π ,两式类比,产生猜想: $f(x)$ 为周期函数,且 2π 可能是它的一个周期,然后只要验证即可.

证明:由已知条件得:

$$f(x+\pi) + f(x) = 2f(\frac{2x+\pi}{2})f(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\therefore f(x+\pi) = -f(x)$$

$$\text{而 } f(x+2\pi) = f[(x+\pi)+\pi] = -f(x+\pi) = f(x)$$

故 $f(x)$ 是周期函数, 2π 是它的一个周期.



二、以结论作为思维的起点

有时题目的结论恰恰是思维的起点,它以特有的方式直接或间接地暗示着解题的方向,此时,结合此题给的信息或平时积累的背景材料进行类比联想,即可大大缩短思维路径.

例2 设 a, b, c 为实数, $4a - 4b + c > 0, a + 2b + c < 0$,则_____正确.

A. $b^2 \leq ac$

B. $b^2 > ac$

C. $b^2 > ac$ 且 $a > 0$

D. $b^2 > ac$ 且 $a < 0$

解析 由题目结论提供的选择支,不难联想到二次函数的判别式,于是令 $f(x) = ax^2 + 2bx + c$.

若 $a \neq 0, f(-2) = 4a - 4b + c > 0$,

$$f(1) = a + 2b + c < 0$$

$$\text{故 } \Delta = 4b^2 - 4ac > 0, \therefore b^2 > ac$$

若 $a = 0$,由题目条件 $b \neq 0$,故有 $b^2 > ac$.

综上所述,答案选B

例3 任给7个实数,证明其中必存在两个实数 x, y ,满足

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

分析:由结论提供的形式 $\frac{x-y}{1+xy}$,促使我们联想到两角

的正切公式: $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$.那么任给的7个实

数可以表示 $\tan \theta_1, \tan \theta_2, \dots, \tan \theta_7$,又由结论提供的数字 $0, \frac{\sqrt{3}}{3}$,联系 $\tan x$ 的单调性促使我们从 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_7$ 中找到两个角

α, β ,使得 $-\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_7 < \frac{\pi}{2}$,现把区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 分成六等份,则 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_7$ 中必有两个同时落入其中某

一等份之中,即有 θ_{j+1}, θ_j 满足 $0 \leq \theta_{j+1} - \theta_j < \frac{\pi}{6} (1 \leq j \leq 6)$,

于是令 $x = \tan \theta_{j+1}, y = \tan \theta_j$,则 $0 \leq \tan(\theta_{j+1} - \theta_j) = \frac{x-y}{1+xy} <$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



三、洞察题目的数形特点,选择思维起点

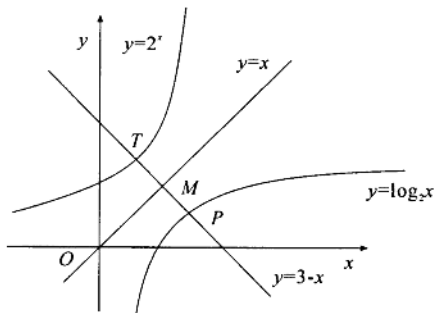
数形结合是数学的重要思想方法,它不仅对沟通代数,三角与几何的内在联系有指导意义,而且对开阔思路,完善思维品质有着重要的作用.分析题目的数形特征,从形中觅数,数中思形,把抽象的“数”转化为直观的“形”,往往能避免繁琐计算.

例4 设 α, β 分别是方程 $\log_2 x + x - 3 = 0$ 和 $2^x + x - 3 = 0$ 的根,则 $\alpha + \beta =$ _____, $\log_2 \alpha + 2^\beta =$ _____

解:由题设得 $\log_2 \alpha = 3 - \alpha, 2^\beta = 3 - \beta$,从几何意义来看, α 是曲线 $y = \log_2 x$ 与 $y = 3 - x$ 交点P的横坐标, β 是曲线 $y = 2^x$ 与 $y = 3 - x$ 交点T的横坐标.

注意到 $y = \log_2 x$ 与 $y = 2^x$ 互为反函数,它们的图像关于 $y = x$ 对称(如下图),设线段PT的中点为M, M在直线 $y = x$ 上,解方程组:

$$\begin{cases} y=x \\ y=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$



所以 M 的坐标为 $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, 由于点 M 的横坐标为 $\frac{\alpha+\beta}{2}$
 $= \frac{3}{2}$, $\therefore \alpha+\beta=3$. 由 $\log_2 \alpha + \alpha = 3, 2^\beta + \beta = 3$,
 $\therefore \log_2 \alpha + 2^\beta + \alpha + \beta = 6 \quad \therefore \log_2 \alpha + 2^\beta = 3$



四、借助系数特征,选择思维起点

例5 若 $a \in \mathbf{R}$, 方程 $x^4 + ax^3 + 3x^2 + ax + 1 = 0$ 的一切根都是虚数, 且其模均不为 1, 求 a 的范围.

分析: 关于一元四次方程全是虚数的充要条件未研究过, 若利用待定系数法转化为二次方程讨论虽是一般方法, 但工作量大, 如果注意到该方程系数特征: x^4 项与常数项的系数相等, x^3 与 x 项系数相等, 可得简捷解法.

解: 方程两边同除以 x^2 并整理得:

$$(x + \frac{1}{x})^2 + a(x + \frac{1}{x}) + 1 = 0, \text{ 令 } y = x + \frac{1}{x},$$

则 $y^2 + ay + 1 = 0$, 由题设 x 为虚数且 $|x| \neq 1$,

可设 $x = c + di (c, d \in \mathbf{R}, d \neq 0, c^2 + d^2 \neq 1)$.

则 $y = c + di + \frac{c - di}{c^2 + d^2}$, 其虚部 $\frac{d(c^2 + d^2 - 1)}{c^2 + d^2} \neq 0$, 故 y 为虚数,

方程 $y^2 + ay + 1 = 0$ 有虚根的充要条件为

$$\Delta = a^2 - 4 < 0,$$

$$\therefore -2 < a < 2.$$



五、还原数学图形,降低思维起点

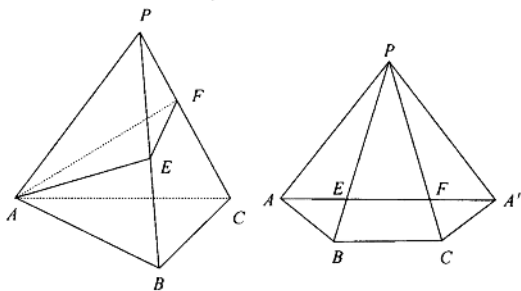
立体几何中好多问题, 直接解决有一定困难, 而利用化归思想, 把空间问题还原成平面问题, 能够使复杂问题简单化.

例6 设正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 a , 侧棱为 $2a$, E, F 分别是 PB, PC 中点, 求 $\triangle AEF$ 的周长的最小值.

解: 将正三棱锥的侧面展开, 可知 $\triangle AEF$ 的周长的最小值为 AA' , 如右下图, 设 $\angle APB = \theta$, 则 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{4}, \sin \frac{3\theta}{2} =$

$$3 \sin \frac{\theta}{2} - 4 \sin^3 \frac{\theta}{2} = \frac{11}{16}, AA' = 2 \times 2a \sin \frac{3\theta}{2} = \frac{11}{4}a$$

$\therefore \triangle AEF$ 的周长的最小值为 $\frac{11}{4}a$.



六、分析目标特征,逆向思维,选择思维起点

逆向思维是数学思维的一个模式, 是创造性思维的重要组成部分, 在解题时, 有时从正面思考难以推断, 如从其相反方向去思考, 可化难为易.

例7 已知函数 $f(x)$ 在实数集 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $a, b \in \mathbf{R}$, 求证: 若 $f(a) + f(b) \geq f(-a) + f(-b)$, 则 $a + b \geq 0$.

分析: 此题若用直接证法显然无从下手, 但若考虑用反证法, 则问题易于解决.

证: 假设 $a + b < 0$, 则有 $a < -b, b < -a$, $\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数, $\therefore$ 有 $f(a) < f(-b), f(b) < f(-a)$, 故 $f(a) + f(b) < f(-a) + f(-b)$.

这与已知矛盾, $\therefore$ 假设不成立.

故 $a + b \geq 0$ 成立.



七、着眼整体,变更主元,选择思维起点

多个字母出现在同一问题中, 容易妨碍思维的进程, 此时不妨着眼于整体, 变更主元, 并对题目施以恰当变换, 就能迅速简捷地解题.

例8 设对所有的实数 x , 不等式 $x^2 \log_2 \frac{4(a+1)}{a} + 2x \log_2 \frac{2a}{a+1} + \log_2 \frac{(a+1)^2}{4a^2} > 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

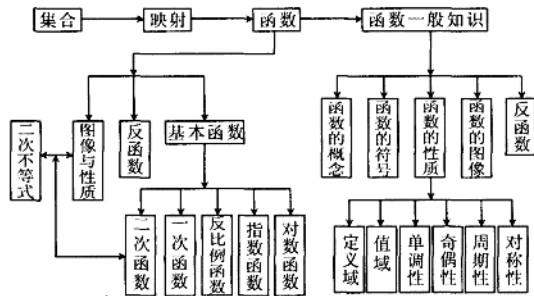
分析: 观察题设中不等式的整体结构可以发现, 式中 3 个对数可以转化为同一形式, 按常规方法是根据关于 x 的不等式恒成立的条件, 列出参数 a 所满足的不等式组, 通过解不等式组求出 a 的取值范围, 而且还要分类讨论, 若变换 x, a 的角色地位, 视 x 为常量, a 为变元, 则可出奇制胜.

解: 将不等式进行变形, 得: $x^2 \log_2 \frac{8(a+1)}{2a} + 2x \log_2 \frac{a+1}{2a} + \log_2 (\frac{a+1}{2a})^2 > 0$

$$\text{即 } 3x^2 + [(x-1)^2 + 1] \log_2 \frac{a+1}{2a} > 0,$$

这个不等式对所有实数 x 恒成立的条件是: $\log_2 \frac{a+1}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{a+1}{2a} > 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.

第二章 函数



点击考情

函数是高中数学最重要的内容之一,在数学的其他分支中有极其广泛的应用,成为历年高考命题的主干内容.考试内容:映射、函数、函数的单调性、奇偶性、反函数、互为反函数的函数图像间的关系、指数概念的扩充、有理数指数幂的运算性质、指数函数、对数、对数函数的运算性质、对数

函数及指数函数的应用.考查方式灵活,既有选择题,又有填空题、解答题,涉及的分值大约有45分,约占总分的30%.函数知识体现在试卷上主要有以下三类:一是考查函数基础知识和基本方法的基础题,多采用选择填空题型,涉及函数图像、性质(如定义域、值域、单调性、反函数等知识),常常与映射、排列组合、方程、不等式、求值、判断同一函数、导数、三角等综合命题;二是函数与其他数学问题(如方程、不等式、数列、向量、导数、三角、解析几何等等)的综合题,此类题难度较大,能力要求较高;三是与应用题结合考查,近年来的应用题大多与函数有关,破题的关键是仔细读懂题意,正确写出函数解析式,这类题型多是解答题,通常设有2到3个小题.

由于函数的主导地位,可以判断它是高考中的一个热点.在能力考查上更突出题目的立意、情景的创设,设问的角度和方式将不断创新.考查函数的知识将会更加深入,函数与其他知识的交汇已成趋势.

2.1 映射与函数



一、直击考点

理解函数的概念,了解映射的概念.能根据定义判断所给对应是否为函数、映射,会求映射中所指定的象或原象.掌握函数的三种表示法.



二、要点扫描

1. 函数概念

如果 A, B 都是非空的数集,如果按某个确定的对应关系 f ,使对于集合 A 中的任意一个数 x ,在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应,那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数,记作 $y = f(x) (x \in A)$.其中 x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域;与 x 对应的 y 的值叫做函数值,函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域.

2. 映射概念

设 A, B 是两个集合,如果按照某种对应关系 f ,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的一个元素与它对应,那么这样的对应(包括集合 A, B 以及集合 A 到集合 B 的对应关系 f)叫做集合 A 到集合 B 的映射,记作 $f: A \rightarrow B$.

3. 函数的三种表示法

解析法、列表法、图像法.



三、初露锋芒

1. 下列各对应 f 中为映射的是()

A. $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^+, f: x \mapsto y = |x|$

B. $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}, f: x \mapsto y = \frac{1}{x-1}$

C. $x \in \mathbf{N}, y \in \{y | y = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}, f: x \mapsto y = 4x - 5$

D. $x \in \mathbf{R}^+, y \in \mathbf{R}, f: x \mapsto y$ 是 x 的平方根

2. 下列各对应函数中,是同一函数的是()

A. $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$

B. $y = x^2$ 与 $y = x|x|$

C. $y = \frac{(x-1)(x+3)}{x-1}$ 与 $y = x+3$

D. $f(x) = x^2 + 1$ 与 $f(u) = u^2 + 1$

3. 已知 $f(x) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ -e & (x = 0) \\ x^2 + 1 & (x < 0) \end{cases}$ 则 $f\{f[f(\pi)]\} = \underline{\hspace{2cm}}$

4. 已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$ 满足条件 $f(3) = f(1) + f(2)$ 的映射 $f: A \rightarrow B$ 的个数是_____.



四、师生互动

例1 (2005年湖南) 设 P 是 $\triangle ABC$ 内任意一点, $S_{\triangle ABC}$

表示 $\triangle ABC$ 的面积, $\lambda_1 = \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$, $\lambda_2 = \frac{S_{\triangle PCA}}{S_{\triangle ABC}}$, $\lambda_3 = \frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$, 定义

$f(P) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $f(Q) = (\frac{1}{2},$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$, 则()

- A. 点 Q 在 $\triangle GAB$ 内
- B. 点 Q 在 $\triangle GBC$ 内
- C. 点 Q 在 $\triangle GCA$ 内
- D. 点 Q 与点 G 重合

分析:

点评:

点评:

例3 求解下列各题:

(1) 已知 $f(x-1) = x^2 + x$, 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 已知 $2f(x) + f(-x) = x$, 求 $f(x)$ 的解析式.

分析:

点评:

例4 已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$ 满足

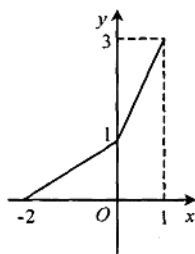
$$f(f(x) - x^2 + x) = f(x) - x^2 + x.$$

(I) 若 $f(2) = 3$, 求 $f(1)$; 又若 $f(0) = a$, 求 $f(a)$;

(II) 设有且仅有一个实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 求函数 $f(x)$ 的解析表达式.

点评:

例2 (2005年广东) 在同一平面直角坐标系中, 函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称. 现将 $y = g(x)$ 图像沿 x 轴向左平移 2 个单位, 再沿 y 轴向上平移 1 个单位, 所得的图像是由两条线段组成的折线(如下图所示), 则函数 $f(x)$ 的表达式为()



$$A. f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2} + 2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$B. f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{2} - 2, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

$$C. f(x) = \begin{cases} 2x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$D. f(x) = \begin{cases} 2x - 6, & 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{2} - 3, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

分析:



五、为您支招

1. 两个函数成为同一函数的条件是定义域、对应法则相同,在判断对应法则时,要对解析式进行化简.

2. 求解析式的方法有待定系数法、配方法、换元法、构造法.运用这些方法求解析式的基本模型有:

①已知 $f(x)$ 是一种确定的函数求其解析式,其方法是待定系数法;

②已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的解析式求 $f[g(x)]$,其方法是直接将 $f(x)$ 中的 x 换成 $g(x)$,化简即得 $f[g(x)]$ 的表达式;

③已知 $f[g(x)]$ 的解析式求 $f(x)$ 的解析式,其方法是利用换元法令 $t=g(x)$ 并反解求 x ,再代入原式得到关于 t 的表达式即可,但得注意 t 的取值范围;

④已知 $f(x)$ 满足的一些条件或具有的性质,确定 $f(x)$ 的解析式,其方法是充分利用条件和性质,找到求解析式的突破口;

⑤求实际问题的函数解析式,其方法是设定变量并寻求等量关系,需特别注意变量在问题中的取值范围.



六、一试身手

1. 设 $f(n)=k$ (其中 $n \in \mathbf{N}^+$), k 是 π 的小数点后的第 n 位数字, $\pi=3.1415926535\dots$,则 $\underbrace{f[f \cdots f(f(10))]}_{100\uparrow} =$ _____

2. 设集合 A 和 B 都是坐标上的点集 $\{(x,y) | x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$,映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 (x,y) 对应到集合 B 中的元素 $(x+y, x-y)$,则在映射 f 下,象 $(2,1)$ 的原象是 ()

- A. $(3,1)$ B. $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$
C. $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ D. $(1,3)$

3. 设集合 A 和 B 都是自然数集 $\mathbf{N}$,映射 $f: A \rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 $2^n + n$,则在映射 f 下,象20的原象是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

4. 若函数 $f(x+2) = \begin{cases} \tan x, & x \geq 0 \\ \lg(-x), & x < 0 \end{cases}$,则 $f(\frac{\pi}{4}+2) \cdot f(-98) =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 2 D. -2

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x(x \geq 4) \\ f(x+2)(x < 4) \end{cases}$,当 $x=1$ 时,对应函数值是_____.

6. (2006年安徽)函数 $f(x)$ 对于任意实数 x 满足条件 $f(x+2) = \frac{1}{f(x)}$,若 $f(1) = -5$,则 $f[f(5)] =$ _____.

分析:

点评:

7. 有序实数对的运算 $(a,b) * (c,d)$ 定义为 $(a+c, b-d)$,若对所有实数 x,y 都有 $(x,y) * (z,w) = (x-3, y+2)$,则有序实数对 (z,w) 是_____.

8. 设 $f(x)$ 是一次函数,又 $\{f[f(x)]\} = 8x+7$,试求 $f(x)$ 的表达式.

9. 设二次函数 $f(x)$ 图像通过点 $(0,1)$ 、 $(2,7)$,其顶点的纵坐标为-1,求此二次函数的解析式.

10. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图像关于原点对称,且 $f(x) = x^2 + 2x$.

(I)求函数 $g(x)$ 的解析式;

(II)解不等式 $g(x) \geq f(x) - |x-1|$;

(III)若 $h(x) = g(x) - \lambda f(x) + 1$ 在 $[-1,1]$ 上是增函数,求实数 λ 的取值范围.