

结构力学 学习指导与 解题精要

◎ 编著

周欣竹

郑建军

张东焕

申屠龙潭

◎ 主审

郑建军



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

结构力学

学习指导与 解题精要

◎ 编著
周欣竹
郑建军
张东焕
申屠龙潭

◎ 主审
郑建军



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

内 容 提 要

本书阐述了结构力学的基本概念和基本原理,给出了指导性的基本要求和知识介绍性的学习指导,并以典型例题说明结构力学的解题思路、方法和技巧。全书共分9章,每章(绪论除外)包括:该章的基本内容、基本要求、学习指导及例题分析。

全书内容包括:绪论,平面体系的几何组成,静定结构内力计算,虚功原理和位移计算,力法,位移法,渐近法,矩阵位移法,影响线及其应用,共9章。

本书可作为大专院校土木、建筑及水利等专业在校学生的学习指导书,也可供成教、职教和函授学生、自学人员、工程技术人员以及报考硕士研究生人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构力学学习指导与解题精要 / 周欣竹等编著. —北京:
中国水利水电出版社, 2007
ISBN 978-7-5084-4349-2

I. 结… II. 周… III. 结构力学—高等学校—教学参考资料 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 010583 号

书 名	结构力学学习指导与解题精要
作 者	周欣竹 郑建军 张东焕 申屠龙潭 编著 郑建军 主审
出版 发行	中国水利水电出版社 (北京市三里河路 6 号 100044) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 63202266 (总机)、68331835 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	三原色工作室
印 刷	北京市兴怀印刷厂
规 格	889mm×1194mm 16 开本 10.5 印张 333 千字
版 次	2007 年 3 月第 1 版 2007 年 3 月第 1 次印刷
印 数	0001—2500 册
定 价	27.00 元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换

版权所有·侵权必究

前 言

结构力学是土木、建筑和水利等专业学生必学的一门重要专业基础课程，在基础课与专业课之间起着承上启下的作用，也是研究生入学考试的必考课程。它既有系统的理论性，又有很强的实践性。只有打好结构力学基础，才能对结构分析的概念和方法有较透彻的理解，较好地解决实际工程中所遇到的各种力学问题。

本书包括了结构力学的主要内容（暂不包含结构动力计算、结构稳定理论和结构的极限分析），全书共分 9 章，每章（绪论除外）包括：该章的基本内容、基本要求、学习指导及例题分析，其目的是帮助学生掌握结构力学的基本内容和重点，弄懂难点，明确解题思路，了解相关内容之间的内在联系，掌握各种方法的解题要点。本书精心挑选了一些具有代表性的例题进行求解和剖析，旨在培养学生分析问题的能力 and 提高解题的技能。

本书由周欣竹主编，全书由郑建军修改并统一定稿。在编写过程中得到了许多同行专家的帮助，提出了许多宝贵意见；本书部分插图的绘制和例题校核得到了熊芳芳和吕建平的帮助，在此一并谨向他们表示衷心的感谢。

本书可作为在校学生学习结构力学的指导书，也可作为专升本、自学考试人员的辅导教材以及考研人员的复习用书。

限于时间和作者水平，书中错误和不妥之处在所难免，恳请读者批评指正，以便今后进一步改进和提高。

编 者
2006 年 12 月
于杭州

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1 基本内容	1
2 基本要求	1
3 学习指导	1
3.1 结构力学的研究对象、任务和研究方法	1
3.2 结构的计算简图	1
3.3 结构和荷载的分类	3
3.4 结构力学课程学习的方法	4
第 2 章 平面体系的几何组成	5
1 基本内容	5
2 基本要求	5
3 学习指导	5
3.1 几何组成分析中的几个概念	5
3.2 平面几何不变体系的基本组成规则	6
3.3 几何组成分析的要点	7
3.4 平面体系的分类及其特征	9
3.5 学习时应注意的几点	10
4 例题分析	10
第 3 章 静定结构内力计算	14
1 基本内容	14
2 基本要求	14
2.1 静定梁	14
2.2 静定刚架	14
2.3 静定拱	14
2.4 静定桁架	14
2.5 组合结构	15
3 学习指导	15
3.1 静定梁	15
3.2 静定刚架	19
3.3 静定拱	21
3.4 悬索结构	23
3.5 桁架结构	23

3.6 组合结构.....	26
4 例题分析.....	27
第4章 虚功原理和位移计算.....	44
1 基本内容.....	44
2 基本要求.....	44
3 学习指导.....	44
3.1 虚功和虚功原理.....	44
3.2 单位荷载法计算位移的一般公式.....	45
3.3 静定结构的位移计算.....	46
3.4 图乘法.....	48
3.5 线性变形体的互等定理.....	49
3.6 学习时应注意的几点.....	49
4 例题分析.....	51
第5章 力法.....	61
1 基本内容.....	61
2 基本要求.....	61
3 学习指导.....	61
3.1 力法的基本概念.....	61
3.2 荷载作用下超静定结构的计算.....	62
3.3 其他外界因素作用下的超静定计算.....	64
3.4 利用对称性简化计算.....	66
3.5 超静定结构的位移计算和校核.....	68
3.6 基本结构的合理选取.....	69
3.7 力法的解题步骤.....	70
3.8 学习时应注意的几点.....	71
4 例题分析.....	72
第6章 位移法.....	84
1 基本内容.....	84
2 基本要求.....	84
3 学习指导.....	84
3.1 位移法的基本概念.....	84
3.2 等截面直杆的转角位移方程.....	86
3.3 位移法求解结点位移和杆端弯矩.....	86
3.4 利用对称性简化计算.....	89
3.5 力法典型方程与位移法典型方程的比较.....	91
3.6 学习时应注意的几点.....	92
4 例题分析.....	92
第7章 渐近法.....	107

1 基本内容	107
2 基本要求	107
3 学习指导	107
3.1 力矩分配法	107
3.2 无剪力分配法	111
3.3 力矩分配法和位移法的联合应用	111
3.4 简化分析方法和解题技巧	112
4 例题分析	112
第 8 章 矩阵位移法	125
1 基本内容	125
2 基本要求	125
3 学习指导	125
3.1 矩阵位移法的解题思路和步骤	125
3.2 结构的离散化	126
3.3 单元分析	127
3.4 整体分析	129
4 例题分析	131
第 9 章 影响线及其应用	144
1 基本内容	144
2 基本要求	144
3 学习指导	144
3.1 影响线与内力图	144
3.2 静定结构的影响线	145
3.3 超静定结构的影响线	147
3.4 影响线的应用	148
4 例题分析	149
参考文献	162

第1章 绪 论

1 基 本 内 容

结构力学的研究对象和研究内容，平面结构的支座和结点，结构的计算简图，平面杆件结构的分类，荷载的分类等。

2 基 本 要 求

- 1) 了解结构力学课程的性质和内容。
- 2) 了解结构计算所采用的力学模型——结构计算简图的选择原则和方法。
- 3) 掌握杆件结构结点和支座的基本类型、计算简图的机动特征和受力特性。
- 4) 了解杆件结构的分类以及结构力学计算应满足的三个条件（力的平衡条件、变形连续条件以及应力和应变的物理条件）。

3 学 习 指 导

3.1 结构力学的研究对象、任务和研究方法

结构是建筑物中承受、传递荷载而起骨架作用的部分。

结构力学的研究对象是杆件结构。

结构力学的研究任务是研究杆件结构的组成规律和合理的结构型式，计算结构在各种外界因素作用下的内力和变形，进而确定杆件结构的强度、刚度和稳定性。

结构力学有各种计算方法，但它们都必须满足以下三个基本条件：

（1）力的平衡条件

结构的整体或结构的一部分（如一部分杆件、杆件的一部分、杆件中的结点等）都应满足力的平衡条件。

（2）变形的连续条件

一方面是指结构的杆件发生各种变形后仍保持连续，没有重叠或缝隙；另一方面是指结构发生变形和位移后，仍满足结构的支座和结点的约束条件。

（3）物理条件

即把结构的应力和应变通过物理方程联系起来，如轴向应力和轴向应变、剪切应力和剪切应变、弯曲应力和弯曲应变之间都应满足相应的物理方程。

3.2 结构的计算简图

实际结构是很复杂的，在计算时用一个简化的计算图形代替实际结构，简化的计算图形称为计算简

图, 计算简图的选择原则:

- 1) 反映结构的实际情况及主要性能。
- 2) 略去细节、便于计算。

选取计算简图时, 通常需要在三方面——荷载方面、杆件方面以及支座和结点方面进行简化。

3.2.1 结构的计算简图

如图 1.1 (a) 所示, 一根梁两端搁在墙上, 上面放一重物。简化时梁本身用其轴线来代表, 重物近似看作集中荷载, 梁的自重则视为均布荷载。考虑到支承面有摩擦, 梁不能左右移动, 但受热膨胀时仍可伸长, 故可将其一端视为固定铰支座, 而另一端视为活动铰支座。这样, 便得到如图 1.1 (b) 所示的计算简图。

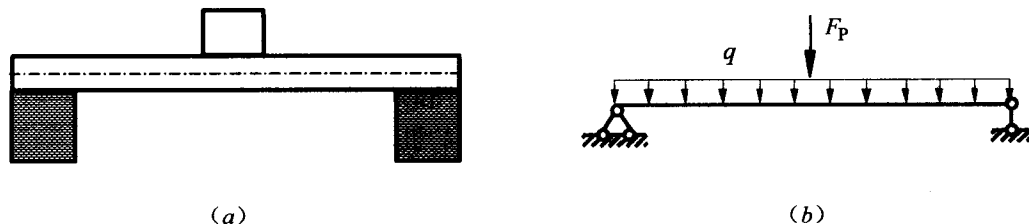


图 1.1

3.2.2 支座的简化和结点的简化

在选择计算简图以前, 搞清结构杆件之间或结构与基础之间实际连接构造, 以保证计算的可靠性和必要的精确性。

杆件与杆件间的连接区简化为结点, 结点通常简化为铰结点或刚结点。

铰结点: 各杆之间不能相对移动, 但可以绕铰结点作自由转动, 能承受和传递力, 但不能承受和传递力矩。

刚结点: 各杆之间不能相对移动, 也不能相对转动, 能承受和传递力, 也能承受和传递力矩。

结构与基础的连接区简化为支座, 支座一般简化为四种: 活动铰支座 (滚轴支座)、固定铰支座、固定支座和定向支座 (滑动支座)。

活动铰支座: 被支承的部分可以转动和水平移动, 但不能竖向移动, 没有反力矩和水平支座反力, 但有竖向支座反力, 如图 1.2 (a) 所示。

固定铰支座: 被支承的部分可以转动, 但不能移动, 没有反力矩, 但有水平方向和竖直方向平支座反力, 如图 1.2 (b) 所示。

固定支座: 被支承的部分完全被固定, 有水平方向、竖直方向支座反力和反力偶, 如图 1.2 (c) 所示。

定向支座: 被支承的部分不能转动, 但可沿一个方向平行滑动, 有反力偶和一个支座反力, 如图 1.2 (d) 所示。

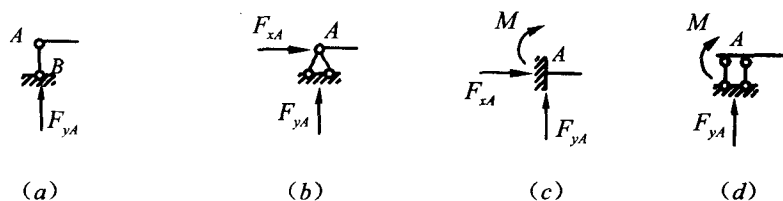


图 1.2

3.3 结构和荷载的分类

结构的类型很多,按照几何特征,结构可分为杆件结构、薄壁结构和实体结构。若结构的几何尺度分别用 l 表示长度, b 表示宽度, h 表示厚度,则这三种结构的几何特征如表 1.1 所示。

表 1.1

结构类型	几何特征	图形表示
杆件结构	$l \gg b, l \gg h$	图 1.3 (a)
薄壁结构	$h \ll l, h \ll b$	图 1.3 (b)
实体结构	l, h 和 b 处于同一量级	图 1.3 (c)

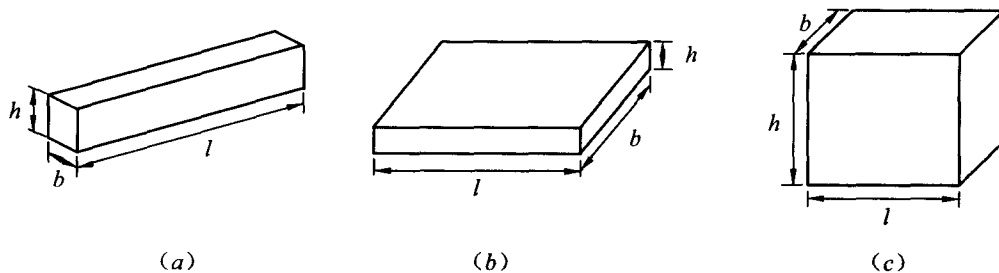


图 1.3

3.3.1 常用杆件结构的类型

(1) 梁

几何特征: 轴线通常为直线, 如图 1.4 (a) 所示; 受力特征: 在竖向荷载作用下无水平支座反力, 内力有弯矩和剪力。梁可以是单跨静定梁、多跨静定梁、超静定梁等。

(2) 拱

几何特征: 轴线为曲线, 如图 1.4 (b) 所示; 受力特征: 在竖向荷载作用下有水平支座反力(推力), 内力有弯矩、剪力和轴力。拱可以是三铰拱、拉杆拱等。

(3) 桁架

几何特征: 由直杆组成, 所有结点均为铰结点, 如图 1.4 (c) 所示; 受力特征: 荷载作用于结点时, 各杆只承受轴力。桁架可以是简单桁架、联合桁架、复杂桁架等。

(4) 刚架

几何特征: 由梁、柱直杆组成, 其结点通常为刚结点, 如图 1.4 (d) 所示; 受力特征: 内力有弯矩、剪力和轴力, 以弯矩为主要内力。

(5) 组合结构

几何特征：是由桁架和梁或刚架组合而形成的结构，其结点可为刚结点、铰结点和组合结点，如图 1.4 (e) 所示；受力特征：梁式杆有弯矩、剪力和轴力，链杆只承受轴力。

根据杆件的空间布置和荷载的作用方向可分为平面结构和空间结构。如果各杆件的轴线和荷载都在同一平面内的为平面结构；如果各杆件的轴线和荷载或其中之一不在同一平面内的为空间结构。部分空间结构可以转化为平面结构进行计算。

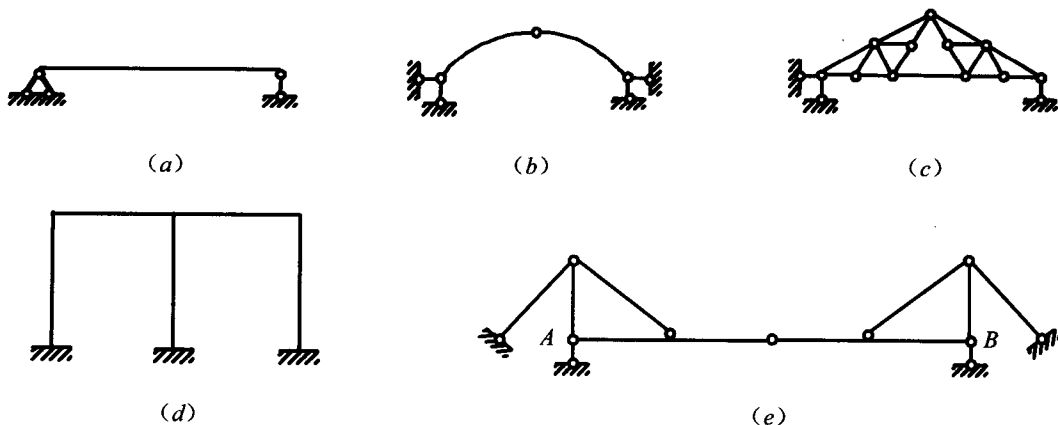


图 1.4

3.3.2 荷载的分类

荷载是主动作用于结构的外力，荷载可以根据不同特征进行分类：

根据荷载的作用时间，可以分为恒载和活载两类；根据荷载作用位置的变化，可以分为固定荷载和移动荷载两类；根据荷载作用的性质，可以分为静力荷载和动力荷载两类。

3.4 结构力学课程学习的方法

结构力学是土木、水利等专业的一门技术基础课。结构力学的学习要用到高等数学、理论力学、材料力学等课程的知识，同时也是学习后续钢结构、钢筋混凝土结构等课程的基础。因此，结构力学在土木、水利等专业的课程学习中起到承上启下的作用。

结构力学课程内容具有很强的连续性。通常前面的内容是后面内容的基础，因此，学习时要扎扎实实、循序渐进，弄懂每一个问题。

结构力学的另一特点就是强调计算。学习结构力学时，一定要做一定的数量的习题，虽然结构形式千变万化，不可穷尽，但计算原理是相同的，多看、多想、多做习题，就能做到举一反三，计算各种各样的结构。

第2章 平面体系的几何组成

1 基本内容

几何组成分析的目的, 几何组成分析中的一些概念 [包括几何不变、几何可变、几何瞬变, 刚片、自由度、约束 (联系), 实铰、虚铰、单铰、复铰、瞬铰等], 平面几何不变体系的基本组成规则, 静定结构和超静定结构的几何组成特点, 计算自由度, 平面几何组成与静力学特性之间的关系。

2 基本要求

掌握几何不变体系的基本组成规则 (三刚片规则、两刚片规则、二元体), 能正确地运用这些规则分析一般平面体系的几何组成。

能准确地判断超静定结构的多余约束及其数目。

了解几何组成与静力学特性之间的关系。

3 学习指导

3.1 几何组成分析中的几个概念

3.1.1 几何不变体系、几何可变体系、几何瞬变体系

在不考虑材料应变的前提下, 体系的形状和位置在外因作用下不发生改变者称为几何不变体系; 发生改变者称为几何可变体系; 体系由瞬时几何可变变为几何不变者称为几何瞬变体系。

3.1.2 刚片

凡是本身几何不变的平面刚体称为刚片。一根梁、一根柱和一个连杆等均可看作不变形的平面刚体——刚片, 也可把体系中已经确定为几何不变的部分看作一个刚片, 基础也可看作一个刚片, 与基础相连的几何不变部分和几何不变的整个结构等都可看作刚片。

3.1.3 自由度

自由度为体系运动时可以独立变化的几何参数的数目, 即确定体系位置所需独立坐标的数目。

确定平面刚片自由运动方式所需独立坐标数称为刚片的自由度数。例如, 平面内一个点具有两个自由度, 一个刚片具有三个自由度。

3.1.4 联系（约束）

减少体系（或刚片）自由度的装置称为联系。常用的联系有三种，它们分别是减少一个自由度、传递一个力的链杆；减少两个自由度、传递两个力的铰；减少三个自由度、传递三个力的刚性联结。

能够限制体系（或刚片）运动自由度的约束称为必要约束，而不能限制体系运动自由度的约束称为多余约束。

3.1.5 瞬铰

两刚片通过两链杆相接，每根链杆两端分别连接到两个刚片上，则这两根链杆的约束作用等效于链杆交点处的一个铰的约束作用，如图 2.1 (a) 所示，这种等效约束称为瞬铰，而图 2.1 (b) 和图 2.1 (c) 所示的交点 o 不是瞬铰。

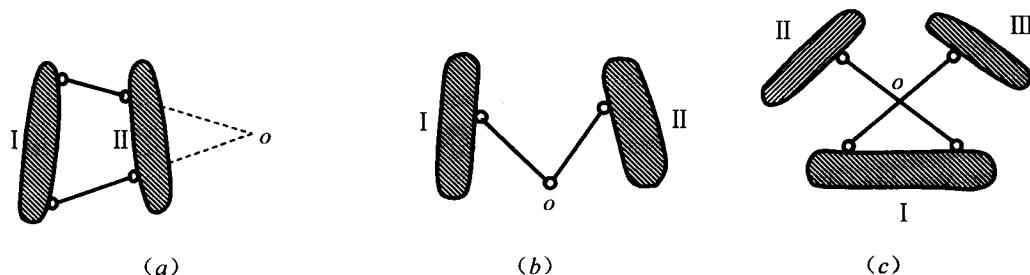


图 2.1

3.2 平面几何不变体系的基本组成规则

三刚片规则、两刚片规则和二元体是平面体系的三个基本组成规则，它体现了组成一般无多余约束几何不变体系的必要和充分条件。

3.2.1 三刚片规则

三个刚片用不在一直线上的三个铰两两相连，组成无多余约束的几何不变体系。例如，六个链杆不能汇交于一点；两铰连线不能与另外两个链杆平行等。

3.2.2 两刚片规则

两刚片用三个既不平行也不交汇于一点的链杆相连，组成无多余约束的几何不变体系。例如，两个链杆所形成的铰不能位于第三个链杆所在的直线上。

3.2.3 二元体

不在一条直线上两相交链杆称为二元体。二元体和一个刚片相连，组成三刚片，可用三刚片规则分析它的几何组成。

在一个体系上增加或撤去一个二元体，不会改变体系的几何组成性质。

三个基本组成规则之间存在内在联系，可以相互沟通。对于同一体系，按三个规则分析所得出的结论必定相同。

3.3 几何组成分析的要点

3.3.1 几何组成分析的一般步骤

几何组成分析一般应用几何组成分析的基本规则进行判断。

(1) 三刚片规则和三刚片规则的应用

应用三刚片规则或两刚片规则可以分析绝大部分平面体系的几何组成。在应用三刚片规则时，要分清哪些是刚片，哪些是联结刚片的铰，包括由两个链杆组成的虚铰。在应用两刚片规则时，要分清哪些是刚片，哪些是联结刚片的链杆。对于如图 2.2 所示的平面体系，不难看出由杆件组成的 ACD 和 BCD 均为几何不变体，可视为刚片 I 和刚片 II，而联结这两刚片的分别为铰 C 和链杆 DE ，然后根据两刚片规则可判断该平面体系的几何组成。

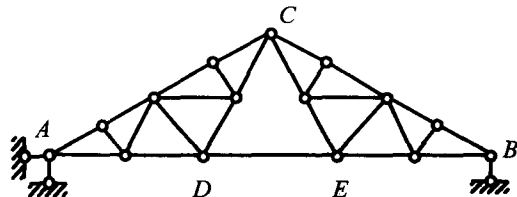


图 2.2

(2) 增加或减少二元体

在分析平面体系的几何组成时，对易于观察的几何不变部分可通过增加二元体扩大为组合刚片，或在进行分析之前先将二元体去除来减少刚片数，以简化体系的组成，便于应用规则。

(3) 区分上部体系与基础之间的联结情况

当上部体系与基础之间用三个支座链杆按两刚片规则联结时，可先撤去这些链杆，仅分析上部体系即可，所得出的结论代表了整个体系的性质。如图 2.2 所示，上部体系 ABC 与基础之间通过三个链杆相连，可将基础作为刚片 III，再根据三刚片规则分析整个体系的几何可变性。

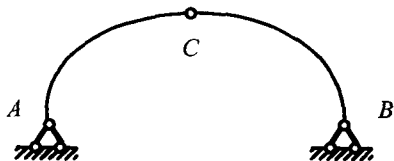


图 2.3

当上部体系与基础之间的支座链杆多于三个时，必须将基础也看作一个刚片，将此刚片与上部体系的其他刚片一起作为分析对象，运用相应的规则进行判断。对于如图 2.3 所示的三铰拱，上部体系 ABC 与基础之间的链杆数多于三根，因此应将基础看为一个刚片，与上部体系一起进行分析。

(4) 虚铰在无穷远处

在应用三个单铰两两相连来分析三刚片体系的几何组成时，若三铰不在一直线上则体系为几何不变，若三铰共线则体系为几何瞬变。这里所指的铰包括实铰和虚铰，在几何组成分析中，常常会碰到虚铰在无穷远处的情况，下面对此情形作进一步说明。

1) 一个虚铰在无穷远处。

如图 2.4 (a) 所示，刚片 I、II、III 分别用 O_{13} 、 O_{23} 、 O_{12} 三铰两两相连，其中虚铰 O_{12} 在无穷远处。分析时可将刚片 III 用链杆 $O_{13}O_{23}$ 代替，如图 2.4 (b) 所示。根据两刚片规则可知，若三个链杆不平行，则该体系为几何不变体系；若三个链杆相互平行且不等长，则该体系为几何瞬变体系；若三个链杆相互平行且等长，则该体系为几何常变体系。

2) 两个虚铰在无穷远处。

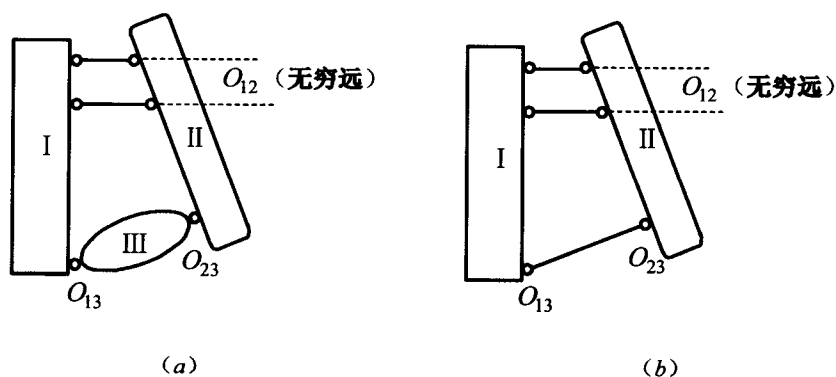


图 2.4

如图 2.5 (a) 所示, 刚片 I、II、III 分别用 O_{13} 、 O_{23} 、 O_{12} 三铰两两相连, 其中 O_{12} 、 O_{13} 为在无穷远处的虚铰。若用链杆 $O_{13}O_{23}$ 代替刚片 III, 链杆 $O_{13}O_{23}$ 在无穷远的 O_{13} 处与刚片 I 相连, 如图 2.5 (b) 所示, 设刚片 I 连接一刚臂, 使它在无穷远处的 O_{13} 处与链杆 $O_{13}O_{23}$ 相连。这样, 链杆 $O_{13}O_{23}$ 与原刚片 I、III 之间的链杆平行, 原体系转化为两刚片 I、II 用三个链杆相连。根据两刚片规则, 若两对链杆不平行, 则体系是几何不变的; 若两对链杆平行但不等长, 则体系是几何瞬变的; 若两对链杆平行且等长, 则体系是几何可变的。

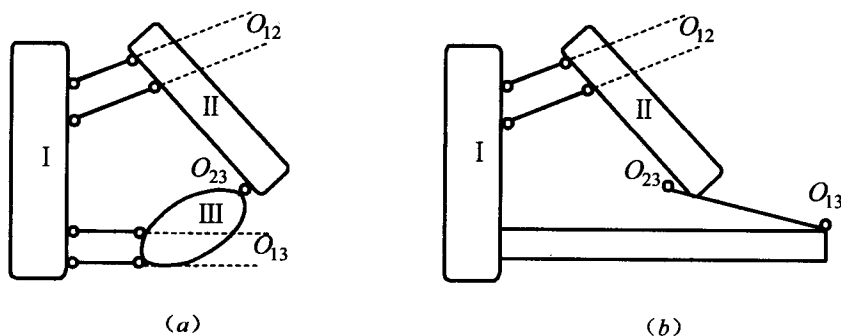


图 2.5

3) 三个虚铰在无穷远处。

三个虚铰在无穷远处表示三刚片间用三对相互平行的链杆相连, 由所有无穷点均位于无穷线上的原理不难得出体系为几何瞬变; 若三对相互平行链杆各自等长, 如图 2.6 (a) 所示, 则体系为几何常变。值得注意的是, 这里的每对链杆都是从刚片的同侧方向与其他刚片联接, 而不是如图 2.6 (b) 所示部分从刚片的异侧方向与其他刚片联接, 图 2.6 (b) 所示的体系是瞬变的。

3.3.2 其他体系几何组成的判断方法

几何组成分析除了应用规则外, 还可以通过其他方法分析体系组成, 如分析计算自由度、等效变换、零载法、有限元分析等方法。这里简单介绍其中的两种方法——分析计算自由度和等效变换。

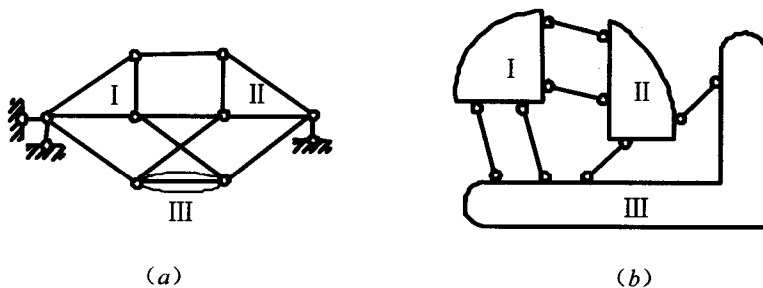


图 2.6

(1) 计算自由度

体系是由若干构件和约束所组成，体系的计算自由度表示体系中各构件的总自由度数与总约束数之差，其数学表达式为

$$W = 3m - (2h + r) \quad (2.1)$$

式(3.1)中： m 表示构件（刚片）的数目； h 表示单铰的数目（不包括体系与支座链杆相交的铰）； r 表示支座链杆的数目。

若体系完全是铰接体系，计算自由度为

$$W = 2j - (b - r) \quad (2.2)$$

式(3.2)中： j 表示结点数； b 表示杆件数； r 表示支座链杆数。

计算自由度只能判断体系中联结刚片的联系（约束）数目是否足够，并没有反映联系的具体布置情况。因此，计算自由度不一定能反映体系的真实自由度。

平面体系几何不变的必要条件为 $W \leq 0$ 。

(2) 等效变换

等效变换是把和某些约束具有相同作用的杆件或刚片等效变换为该约束，把体系中某个内部无多余约束的几何不变部分用另一个无多余约束的几何不变部分替换，并按原情况保持与其余部分的联系。对于不能直接利用规则进行分析的体系，可先作等效变换，然后再分析。

3.4 平面体系的分类及其特征

3.4.1 平面体系的分类

平面体系分为几何不变体系和几何可变体系。

几何不变体系又分为无多余约束的几何不变体系（即静定结构）和有多余约束的几何不变体系（即超静定结构）。

而几何可变体系又分为几何常变体系和几何瞬变体系。

3.4.2 平面体系的特征

(1) 几何不变体系

无多余约束的几何不变体系：按基本组成规则形成；三个刚片之间用两个铰和一对平行链杆相连，两铰连线与平行链杆成一夹角；三个刚片用一个铰和两对互不平行的链杆相连；三个刚片用三对互不平行的链杆相连。其静力特征是：用静力平衡条件可求得全部反力和内力。

有多余约束的几何不变体系：按基本组成规则所需的约束（联系）之外，还增添了若干约束（联系）。其静力特征是：用静力平衡条件不能求得全部反力和内力。

（2）几何可变体系

缺少约束或约束布置不合理。

- 1) 刚片之间的联系数少于按基本组成规则所要求的数目。
- 2) 两个刚片之间用三根相互平行且等长的链杆相连。
- 3) 两个刚片之间用交于一个实铰的三根链杆相连。
- 4) 三个刚片用两个铰和与该两铰连线平行且等长的对链杆相连。
- 5) 三个刚片用一个铰和两对平行且等长的链杆相连。
- 6) 三个刚片用三对平行且等长的链杆相连。

其静力特征是：几何可变体系一般无静力学解答。

（3）瞬变体系

约束布置不合理。

- 1) 两个刚片之间用三根相互平行但不等长的链杆相连。
- 2) 两个刚片之间用交于一虚铰的三根链杆相连。
- 3) 三个刚片用位于同一直线上的三个铰两两相连。
- 4) 三个刚片之间用两个铰和一对不等长平行链杆相连，且该两铰连线与这对链杆平行。
- 5) 三个刚片用一个铰和两对不等长的平行链杆相连。
- 6) 三个刚片用三对平行且不等长的链杆相连。

其静力特征是：反力和内力为无限大或为不定值。

在上述三类体系中，只有几何不变体系才可用作结构。通常在进行结构内力计算时，先进行几何组成分析，确定结构的组成顺序，并分清静定结构与超静定结构。对超静定结构，要确定多余约束。

3.5 学习时应注意的几点

- 1) 几何不变体系的基本组成规则可用于分析大多数常见体系。对于较为复杂的体系，有时需要用其他方法进行分析，如零载法、等效替换法等。
- 2) 在进行几何组成分析时，体系中的每一部分或每一约束（连杆、铰）都不可遗漏或重复使用。
- 3) 对于同一体系，可有多种分析途径，但结论是一致的。

4 例题分析

例 2.1 对图 2.7 (a) 所示体系作几何组成分析。

解：该体系由三个支座链杆将上部体系与大地联结，它符合两刚片规则，故可先撤去三个支座链杆，对上部体系进行分析，如图 2.7 (b) 所示。

内部分析：从小三角形 1-2-6 出发，不断增加二元体，即 64-24、67-47、43-23、45-35、78-58，形成刚片 I。同理，以另一小三角形 10-11-12 出发，不断增加二元体，形成刚片 II，如图 2.7 (b) 所示。刚片 I、刚片 II 用铰 5 及链杆 8-9 相连，由两刚片规则可知，上部为无多余约束的几何不变体系。再加上三根支座链杆后，仍为几何不变体系，故原体系为无多余约束的几何不变体系。