

经济数学基础补充教材

经济数学基础

解题

——原理·方法·技巧

- 微积分
- 线性代数
- 概率统计



 吉林大学出版社

何英凯 编著

经济数学基础补充教材

经济数学基础解题

——原理·方法·技巧

何英凯 编著

吉林大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础解题——原理·方法·技巧/何英凯编著.
长春:吉林大学出版社,2007.7

ISBN 978-7-5601-3674-5

I. 经… II. 何… III. 经济数学—高等学校—解题
IV. F224.0-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 127243 号

书名:经济数学基础解题——原理·方法·技巧
作者:何英凯 编著

责任编辑、责任校对:曲天真
吉林大学出版社出版、发行
开本:787×1092 毫米 1/16
印张:20.5 字数:475 千字
ISBN 978-7-5601-3674-5

封面设计:张沐沉
长春市恒源印务有限公司 印刷
2007 年 7 月 第 1 版
2007 年 7 月 第 1 次印刷
定价:26.80 元

版权所有 翻印必究
社址:长春市明德路 421 号 邮编:130021
发行部电话:0431-88499826
网址: <http://www.jlup.com.cn>
E-mail: jlup@mail.jlu.edu.cn

前 言

《经济数学基础》(微积分, 线性代数, 概率统计)是高等学校财经类专业核心课程之一, 是许多后续课程的重要基础, 也是硕士研究生入学考试的必考科目。

本书是《经济数学基础》的补充教材, 具有以下三个特点:

一、以教学大纲为准, 紧密结合教材

本书知识范围以教育部颁布的《经济数学基础》教学大纲为准, 也分为微积分, 线性代数, 概率统计三部分, 章节安排与所用教材基本一致。所选题目与教材内容相互配合, 相互补充, 覆盖了教学大纲所规定的全部重点内容。

二、精选习题, 增加难度

本书题目的选择具有广泛性和代表性, 一部分选自各辅导书或习题集的典型例题和习题, 一部分选自历年硕士研究生入学考试的重点考题, 还有一部分是作者在多年教学实践中编写的题目。所选题目中一部分与教材习题难度相当, 另一部分难度有所增加。

三、注重归纳总结, 力求一题多解

与其他习题集、辅导书不同, 本书许多题目的解答都给出分析过程, 并列出了多种解题方法。在每种重点题型后面都有小结, 详细总结了解题原理和解题技巧, 从而使同学们能够举一反三, 触类旁通。

两点建议:

一、以教材为主, 切勿本末倒置

要在掌握《经济数学基础》教材基本原理、基本方法、基本技巧的前提下使用本书, 而不要对教材一知半解时就开始做本书的题目。要循序渐进, 不要急于求成。

二、力争独立完成, 然后对照答案

要独立分析和解答本书的题目, 然后再去对照。切忌遇到困难就急于查找分析过程和解答过程。一定要多思考, 多动笔, 只有这样, 才能使本书起到应有的作用, 才能为学习财经类的专业课程以及进一步学习考研数学打下坚实的基础。

本书原名为《经济数学 1000 题》, 上、下两册, 32 开本, 已经在教学中使用多年。由于《经济数学基础》教材改版, 为了与教材协调一致, 现改成 16 开本, 合成一册, 并公开出版。考虑到本书主要讲述解题原理、归纳一般性方法、总结常用技巧, 所以, 本次出版改为现在的书名。

虽然此书在使用中已经做了多次修改, 此次出版又经过了认真校对, 但仍难免有疏漏之处, 欢迎读者批评指正。

何英凯

2007 年 7 月

目 录

前言.....	(1)
---------	-------

微 积 分 部 分

第一章 函数.....	(1)
一、习题.....	(1)
二、答案、提示及解答.....	(2)
第二章 极限与连续.....	(3)
一、习题.....	(3)
二、答案、提示及解答.....	(4)
第三章 导数与微分.....	(7)
一、习题.....	(7)
(一) 导数概念.....	(7)
(二) 导数与微分的计算.....	(8)
二、答案、提示及解答.....	(9)
(一) 导数概念.....	(9)
(二) 导数与微分的计算.....	(11)
第四章 中值定理与导数的应用.....	(17)
一、习题.....	(17)
(一) 等式的证明.....	(17)
(二) 不等式的证明.....	(18)
(三) 极值应用问题.....	(19)
(四) 求极限.....	(20)
二、答案、提示及解答.....	(20)
(一) 等式的证明.....	(20)
(二) 不等式的证明.....	(29)
(三) 极值应用问题.....	(33)
(四) 求极限.....	(37)
第五章 不定积分.....	(42)
一、习题.....	(42)
(一) 基本积分法.....	(42)
(二) 综合积分法.....	(42)
(三) 被积函数含有参数的不定积分.....	(43)
(四) 被积函数为抽象函数的不定积分.....	(43)

(五) 被积函数为分段函数的不定积分	(44)
二、答案、提示及解答	(44)
(一) 基本积分法	(44)
(二) 综合积分法	(49)
(三) 被积函数含有参数的不定积分	(59)
(四) 被积函数为抽象函数的不定积分	(60)
(五) 被积函数为分段函数的不定积分	(61)
第六章 定积分	(62)
一、习题	(62)
(一) 与定积分有关的证明题	(62)
(二) 定积分的计算	(64)
(三) 变上限定积分	(65)
(四) 平面图形的面积与旋转体的体积	(66)
(五) 广义积分	(66)
二、答案、提示及解答	(67)
(一) 与定积分有关的证明题	(67)
(二) 定积分的计算	(74)
(三) 变上限定积分	(78)
(四) 平面图形的面积与旋转体的体积	(80)
(五) 广义积分	(83)
第七章 多元函数微积分	(84)
一、习题	(84)
(一) 多元函数微分法	(84)
(二) 多元函数极值	(85)
(三) 二重积分	(86)
二、答案、提示及解答	(88)
(一) 多元函数微分法	(88)
(二) 多元函数极值	(96)
(三) 二重积分	(98)
第八章 微分方程初步	(105)
一、习题	(105)
(一) 一阶微分方程	(105)
(二) 二阶微分方程	(106)
二、答案、提示及解答	(107)
(一) 一阶微分方程	(107)
(二) 二阶微分方程	(113)
第九章 无穷级数	(117)
一、习题	(117)

(一) 数项级数	(117)
(二) 幂级数	(118)
二、答案、提示及解答	(119)
(一) 数项级数	(119)
(二) 幂级数	(128)
第十章 差分方程初步	(140)
一、习题	(140)
二、答案、提示及解答	(140)

线性代数部分

第一章 行列式	(145)
一、习题	(145)
(一) n 阶行列式的计算	(145)
(二) 与行列式计算有关的问题	(146)
二、答案、提示及解答	(147)
(一) n 阶行列式的计算	(147)
(二) 与行列式计算有关的问题	(150)
第二章 线性方程组	(153)
一、习题	(153)
(一) 向量组的线性相关性	(153)
(二) 一个向量或一组向量被另一组向量线性表示	(154)
(三) 向量组的秩	(155)
(四) 含有参数的线性方程组的求解	(155)
(五) 线性方程组求解的逆问题或反问题	(157)
(六) 线性方程组有关命题的证明	(157)
二、答案、提示及解答	(159)
(一) 向量组的线性相关性	(159)
(二) 一个向量或一组向量被另一组向量线性表示	(166)
(三) 向量组的秩	(169)
(四) 含有参数的线性方程组的求解	(170)
(五) 线性方程组求解的逆问题或反问题	(176)
(六) 线性方程组有关命题的证明	(180)
第三章 矩阵	(186)
一、习题	(186)
(一) 抽象矩阵的可逆性问题	(186)
(二) 分块矩阵	(186)
(三) 涉及伴随矩阵的计算与证明	(187)
(四) 矩阵秩等式及不等式的证明	(187)

(五) 综合习题	(187)
二、答案、提示及解答	(188)
(一) 抽象矩阵的可逆性问题	(188)
(二) 分块矩阵	(190)
(三) 涉及伴随矩阵的计算与证明	(192)
(四) 矩阵秩等式及不等式的证明	(193)
(五) 综合习题	(194)
第四章 向量空间	(199)
一、习题	(199)
二、答案、提示及解答	(199)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(202)
一、习题	(202)
(一) 抽象矩阵求特征值及特征向量	(202)
(二) 矩阵特征值、特征向量逆问题的讨论	(202)
(三) 特征值、特征向量有关命题的证明	(203)
(四) 矩阵相似与对角化	(204)
(五) 有关相似矩阵命题的证明	(205)
(六) 特征值、特征向量及相似矩阵的综合习题	(205)
二、答案、提示及解答	(206)
(一) 抽象矩阵求特征值及特征向量	(208)
(二) 矩阵特征值、特征向量逆问题的讨论	(208)
(三) 特征值、特征向量有关命题的证明	(213)
(四) 矩阵相似与对角化	(215)
(五) 有关相似矩阵命题的证明	(219)
(六) 特征值、特征向量及相似矩阵的综合习题	(221)
第六章 二次型	(225)
一、习题	(225)
(一) 化二次型为标准形	(225)
(二) 有关正定二次型(正定矩阵)的讨论	(225)
二、答案、提示及解答	(226)
(一) 化二次型为标准形	(226)
(二) 有关正定二次型(正定矩阵)的讨论	(229)

概率统计部分

第一章 随机事件与概率	(232)
一、习题	(232)
(一) 古典概型与几何概型	(232)
(二) 全概率公式与贝叶斯公式	(233)

(三) 条件概率及事件的独立性	(233)
二、答案、提示及解答	(234)
(一) 古典概型与几何概型	(234)
(二) 全概率公式与贝叶斯公式	(238)
(三) 条件概率及事件的独立性	(240)
第二章 随机变量的分布和数字特征	(243)
一、习题	(243)
(一) 离散型随机变量的分布和数字特征	(243)
(二) 连续型随机变量的分布和数字特征	(244)
(三) 混合型随机变量的分布	(245)
(四) 随机变量函数的分布和数字特征	(246)
二、答案、提示及解答	(246)
(一) 离散型随机变量的分布和数字特征	(246)
(二) 连续型随机变量的分布和数字特征	(250)
(三) 混合型随机变量的分布	(254)
(四) 随机变量函数的分布和数字特征	(257)
第三章 随机向量	(265)
一、习题	(265)
(一) 离散型随机向量的分布和数字特征	(265)
(二) 连续型随机向量的分布和数字特征	(267)
(三) 连续型随机向量函数的分布和数字特征	(269)
(四) 混合型随机向量的分布	(270)
(五) 中心极限定理	(270)
二、答案、提示及解答	(271)
(一) 离散型随机向量的分布和数字特征	(271)
(二) 连续型随机向量的分布和数字特征	(277)
(三) 连续型随机向量函数的分布和数字特征	(289)
(四) 混合型随机向量的分布	(302)
(五) 中心极限定理	(303)
第四章 数理统计基础	(306)
一、习题	(306)
(一) 抽样分布	(306)
(二) 参数估计	(306)
(三) 假设检验	(307)
二、答案、提示及解答	(308)
(一) 抽样分布	(308)
(二) 参数估计	(310)
(三) 假设检验	(315)

微 积 分 部 分

第一章 函 数

一、习 题

- 函数 $f(x) = |x \cos x| e^{-\sin x}$ 为().
(A) 奇函数 (B) 偶函数 (C) 有界函数 (D) 以上都不对
- 函数 $f(x) = x \tan x e^{\sin x}$ 是() 函数.
(A) 偶 (B) 无界 (C) 周期 (D) 单调
- 设 $z = y + f(\sqrt{x} - y)$, 已知当 $y = 1$ 时 $z = x$, 则 $f(x) =$ _____.
- 已知 $f(x) = e^x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____, 它的定义域为 _____.
- 设 $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 则 $f[f(x)] =$ _____.
- $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - \ln(1 - x^2)$ 的定义域是 _____.
- 设 $f(x) = ax + b$, 当 $a =$ _____, b 为任意数时, $f[f(x)] = x$.
- 已知 $f(x) = \sin x$, $f[\varphi(x)] = 1 - x^2$, 则 $\varphi(x) =$ _____ 的定义域为 _____.
- 设 $y = f(x) = \begin{cases} e^x, & -\infty < x \leq 0; \\ x^2 - 1, & 0 < x \leq 1; \\ \arctan x, & 1 < x < +\infty, \end{cases}$ 则其反函数 $f^{-1}(x) =$ _____.
- 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 1; \\ x, & x \geq 1, \end{cases}$ $\varphi(x) = \begin{cases} x + 2, & x < 0; \\ x^2 - 1, & x \geq 0, \end{cases}$ 求 $f[\varphi(x)]$.

二、答案、提示及解答

1. D. 2. B. 3. $x(x+2)$. 4. $\ln(1-x^2)$, $(-1, 1)$. 5. x .
6. $[0, 1)$. 7. -1 . 8. $\arcsin(1-x^2)$, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

$$9. f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x, & 0 < x \leq 1; \\ \sqrt{x-1}, & -1 < x \leq 0; \\ \tan x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$10. \text{解 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)}, & \varphi(x) < 1; \\ \varphi(x), & \varphi(x) \geq 1. \end{cases}$$

1° 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

或 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = x + 2 < 1$, 即 $x < -1$;

或 $x \geq 0$ 时, $\varphi(x) = x^2 - 1 < 1$, 即 $0 \leq x < \sqrt{2}$.

2° 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

或 $x < 0$ 时, $\varphi(x) = x + 2 \geq 1$, 即 $-1 \leq x < 0$;

或 $x \geq 0$ 时, $\varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1$, 即 $x \geq \sqrt{2}$,

$$\text{所以 } f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2}, & x < -1; \\ x+2, & -1 \leq x < 0; \\ e^{x^2-1}, & 0 \leq x < \sqrt{2}; \\ x^2-1, & \sqrt{2} \leq x. \end{cases}$$

第二章 极限与连续

一、习 题

1. 下列结论中正确的是().

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}} = e^2$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = e$

(C) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan x)^{\cot x} = e$

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + n \frac{1}{x}\right)^x = e^n$

2. 设 $y = \sin \frac{1}{x} \cdot \sin x$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, y 是().

(A) 无穷大量 (B) 无穷小量 (C) 有界非无穷小 (D) 无界非无穷大

3. 下列各式中, 有一个正确的, 它是().

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \infty$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

(D) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$

4. 设数列通项为 $x_n = n \sin \frac{n\pi}{2}$, 则当 $n \rightarrow +\infty$ 时, x_n 是().

(A) 收敛的

(B) 无穷大

(C) 有界, 不收敛

(D) 无界但不是无穷大

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(4\pi \sqrt{n^2 + 1}) = ()$.

(A) $+\infty$

(B) 1

(C) π

(D) 2π

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arctan x)^2 \tan x} = ()$.

(A) 0

(B) 1

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{1}{2}$

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列四个无穷小量中, () 是比其他三个更高阶的无穷小量.

(A) x^2

(B) $1 - \cos x$

(C) $\sqrt{1-x^2} - 1$

(D) $x - \tan x$

8. 设 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0; \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1; \\ \arctan x - \frac{\pi}{4}, & x > 1 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 a, b 分别等于

().

(A) 1, 1

(B) 0, 1

(C) -1, 1

(D) 1, -1

9. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}}$, 讨论函数 $f(x)$ 的间断点, 其结论为().

(A) 不存在间断点

(B) 存在间断点 $x=1$ (C) 存在间断点 $x=0$ (D) 存在间断点 $x=-1$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}] = \underline{\hspace{2cm}}.$

11. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

13. $|x| < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} (1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+3}\sqrt{n} - \sqrt{n-\sqrt{n}}) = \underline{\hspace{2cm}}.$

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \sin \frac{2}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] = \underline{\hspace{2cm}}.$$

17. 已知 $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0; \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1; \\ \sin \pi x, & x > 1 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、答案、提示及解答

1. C. 2. B. 3. B. 4. D.

5. 解 原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(4\pi\sqrt{n^2+1} - 4n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin[4\pi(\sqrt{n^2+1} - n)]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{4\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \cdot \frac{\sin \frac{4\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}}{\frac{4\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n\pi}{\sqrt{n^2+1} + n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{4\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}}{\frac{4\pi}{\sqrt{n^2+1} + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

$$= 2\pi.$$

(答案为 D)

小结 凡是表达式中含有 $a \pm \sqrt{b}$ 或 $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$, 则在运算前通常要在分子分母乘以其共轭根式, 然后再做有关分析计算.

$$6. \text{解 原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{x^2 \cdot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x(\sqrt{1-x^2}-1)}{\sqrt{1-x^2}}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)} = -\frac{1}{2}. \quad (\text{答案为 D})$$

$$7. \text{ 解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2(\sqrt{1-x^2}+1)} = -\frac{1}{2}. \quad (\text{答案为 D})$$

8. 解 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 所以, 必有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \cos x = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax+b) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax+b) = a+b = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

从而得 $a = -1, b = 1$.

(答案为 C)

$$9. \text{ 解 } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+x}{1+x^{2n}} = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq -1 \text{ 时;} \\ 1+x, & \text{当 } -1 < x < 1 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } x = 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

因为 $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = 0$, 所以 $x = -1$ 为连续点.

因为 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 0 = 0$, 所以, $x = 1$ 为间断点.

(答案为 B)

小结 极限函数或绝对值函数, 通常要先变成分段函数, 然后再做有关的分析运算.

$$\begin{aligned} 10. \text{ 解 } \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt{\frac{n(1+n)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{n(1+n)}{2}} + \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

11. 解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$12. \text{ 解 原式 } \stackrel{\text{令 } -x=t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-t} - e^t}{e^{-t} + e^t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(e^{-t} - e^t)e^{-t}}{(e^{-t} + e^t)e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2t} - 1}{e^{-2t} + 1} = -1.$$

$$\begin{aligned} 13. \text{ 解 原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-x^2)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x} = \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

14. 解

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3}\sqrt{n}-\sqrt{n-\sqrt{n}})(\sqrt{n+3}\sqrt{n}+\sqrt{n-\sqrt{n}})}{\sqrt{n+3}\sqrt{n}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}\sqrt{n}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}} \\ &= 2. \end{aligned}$$

小结 第 5、10、11、14 题属于同种类型—— $(\infty - \infty)$ 型(分子或分母), 通常要先变成 $(\infty + \infty)$ 型(分子分母乘以其共轭根式), 然后再做极限运算.

$$15. \text{ 解 原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x+3} \cdot \frac{2}{x} \cdot \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+5}{5x^2+3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{x}}{\frac{2}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{5}{x^2}}{5+\frac{3}{x}} = \frac{6}{5}.$$

$$\begin{aligned} 16. \text{ 解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[a \cdot a^2 \cdots a^n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln a^{\frac{n(n+1)}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} \ln a = \ln a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{2n^2} = \frac{1}{2} \ln a. \end{aligned}$$

17. 解 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x} = 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\sin \pi x) = 0$$

从而得 $a = -1, b = 1$.

第三章 导数与微分

一、习 题

(一) 导数概念

1. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().

(A) 连续, 不可导

(B) 可导, 导数不连续

(C) 可导, 导数连续

(D) 不连续, 不可导

2. 曲线 $y = \ln x$ 与 x 轴正向相交的角度为_____.

3. 设曲线 $y = ax^2$ 与 $y = \ln x$ 相切, 求 a 及切点坐标.

4. 设曲线 $y = ke^x$ 与 $y = x^2 + ax + b$ 相交于 $(0, 2)$, 且在该点的切线相互垂直, 则 k
= _____, a = _____, b = _____.

5. 求 a 和 b , 使

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 1; \\ x^2, & x \leq 1 \end{cases}$$

处处可导.

6. 设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处().

(A) 极限不存在

(B) 极限存在, 但不连续

(C) 连续, 但不可导

(D) 可导

7. 已知 $f'(x_0) = -1$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} = \text{_____}.$$

8. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$$

则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率为().

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 0

(C) -1

(D) -2

9. 设曲线 $f(x) = x^n$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\xi_n) =$
_____.

10. 曲线 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形, 记切点的横坐标为 a , 试求切线方程和这个图形的面积. 当切点沿曲线趋于无穷远时, 该面积的变化趋势如何?

11. 设 $f(x)$ 可导, $F(x) = f(x)(1 + |\sin x|)$, 则 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的 ().

(A) 充分必要条件

(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件

(D) 既非充分又非必要条件

(二) 导数与微分的计算

1. 设 $y = x[\cos(\ln x) + \ln(\sin x)]$, 求 y' .

2. 设 $y = f^n[\varphi^n(\cos x^n)]$, 求 y' .

3. 设 $xy^2 + e^y = \cos(x + y^2)$, 求 y'_x .

4. 设 $\ln y = f(x + y)$, 求 y'_x .

5. 设 $y = x^{a^x} + a^{x^x} + x^{x^a}$, 求 y' .

6. 设函数 $y = f(x)$ 是由方程 $x^y = y^x$ 确定的, 求 $\frac{dy}{dx}$.

7. 设 $y = y(x)$ 由 $y - xe^y = 1$ 所确定, 求 $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0}$.

8. 设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$, 其中 f 可微, 求 dy .

9. 设 $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ \frac{\sin^2 x}{x}, & x < 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

10. 设 $\varphi(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 又函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处可导, 求 $F(x) = f[\varphi(x)]$ 的导数.

11. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 e^{n(x-1)} + ax + b}{1 + e^{n(x-1)}}$, 其中 a, b 为常数, 讨论 $f(x)$ 的连续性与可导性.

12. 设 $f(x) = |\ln|x||$, 求 $f'(x)$.

13. 设 $f(x)$ 具有任意阶导数, 且 $f(x)f'(x) = -1$, $f(x) \neq 0$, $n > 1$, 则 $f^{(n)}(x) =$ ().

(A) $(-1)^n(n-1)![f(x)]^{-n}$

(B) $(-1)^{n-1}(n-1)![f(x)]^{-n-1}$

(C) $-(2n-3)!![f(x)]^{-2n+1}$

(D) $(-1)^{n-1}(2n-3)!![f(x)]^{-2n+1}$

14. 设 $y = \sin[f(x^2)]$, 其中 f 二阶可导, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

15. 设 $f(x) = 3x^3 + x^2|x|$, 求 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数.

16. 设 $y = f(x + y)$, 其中 f 二阶可导, 且 $f' \neq 1$, 求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.