



2008年 李永乐·李正元
考 研 数 学 9

数学

数学一
【理工类】

全真模拟 经典400题

○主编 清华大学 李永乐
北京大学 李正元
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社



2008 年李永乐·李正元考研数学⑨

数学全真模拟经典 400 题

(理工类·数学一)

主 编 清 华 大 学 李永乐
北 京 大 学 李正元
中 国 人 民 大 学 袁荫棠

编 者 (以姓氏笔画为序)

北 京 大 学	刘西垣
北 京 大 学	李正元
清 华 大 学	李永乐
中 国 人 民 大 学	严 颖
北 京 大 学	范培华
中 国 人 民 大 学	袁荫棠
空 军 雷 达 学 院	徐宝庆
东 北 财 经 大 学	龚兆仁
天 津 财 经 学 院	鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学全真模拟经典400题:理工类/李永乐,李正元,袁荫棠主编.
-北京:国家行政学院出版社,2001

(考研必备)

ISBN 978-7-80140-174-8



I. 数… II. ①李… ②李… ③袁… III. 高等数学-研究生-入学考试-试题
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 044469 号

书 名 数学全真模拟经典 400 题 [理工类·数学一]
作 者 李永乐 李正元 袁荫棠
出版发行 国家行政学院出版社
(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)
电 话 (010) 88517082
经 销 新华书店
印 刷 北京市朝阳印刷厂
版 次 2007 年 8 月北京第 8 版
印 次 2007 年 8 月北京第 1 次印刷
开 本 787 毫米×1092 毫米 16 开
印 张 13
字 数 350 千字
书 号 ISBN 978-7-80140-174-8/O·13
定 价 22.00 元

前 言

本套书（李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典 400 题》等，国家行政学院出版社）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《2008 年考研数学全真模拟经典 400 题》根据 2008 年考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

本书特点：

1. 每题均全新优化设计，综合性强

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了 10 套模拟试题，这 10 套题完全不同，没有重复题；在内容设计上，每道题均涉及两个以上知识点，有些综合题甚至涉及到 3 个考点或更多，这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这 10 套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细

我们在设计这 10 套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据 2008 年考研数学大纲为 2008 年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练题集，本书中的试题难度略高于 2007 年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前, 应仔细阅读《2008 年考研数学复习全书》(数学一), 弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法, 掌握《2008 年考研数学复习全书》(数学一) 中所介绍的解题方法、技巧和思路。

特别提醒考生注意: ①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学, 考研辅导经验丰富, 并且是各自领域的专家学者, 具有足够的专业素养。更重要的是, 本书编撰者不辞辛苦, 认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求, 归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律, 尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。在编写本书的过程中, 编撰者都从头到尾坚持自己亲自完成本书的编写任务, 决不假手他人, 更不会“借”他人的东西。在这个意义上, “经典”两字实际上是本书编撰者对自己的严格要求。

②为了提高同学数学分析和解决问题的能力, 本书所编题目难度较大, 有的题目涉及 3 个以上的考点、综合运用性比较高, 概念运用性较强, 如果考生在做本书试题感到棘手时, 请不要急, 更不要泄气, 应静下心来, 仔细分析题目所考查的是哪些知识点, 回忆《数学复习全书》(数学一) 所介绍的解题方法, 然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题, 不要一看了事。

鉴于以上两点, 我们希望考生认真对待本书中每道题, 对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在 2008 年考研数学考试中, 您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中, 由于时间紧、任务重, 尽管我们认真对待和严格要求, 仍难免有不尽如意的地方, 诚请广大读者和同行批评指正。

愿这本《经典 400 题》能对广大考生有所帮助, 为实现考研目标助一臂之力!

说明: 为了使本书更具有针对性, 减轻考生的经济负担, 我们将原《数学全真模拟经典 400 题》(数学一、数学二合订本) 改为数学一、数学二单行本, 书名继续沿用《数学全真模拟经典 400 题》。

编 者

2007 年 8 月

目 录

第 1 部分 考生必须了解的信息

一、2008 年考研数学一考试大纲修订情况	1
二、2008 年考研数学一新增考点讲解	2

第 2 部分 全真模拟经典试题

模拟试题(一)	4
模拟试题(二)	11
模拟试题(三)	18
模拟试题(四)	25
模拟试题(五)	32
模拟试题(六)	39
模拟试题(七)	46
模拟试题(八)	52
模拟试题(九)	59
模拟试题(十)	66

第 3 部分 全真模拟经典试题答案及详解

模拟试题(一) 答案及详解	74
模拟试题(二) 答案及详解	85
模拟试题(三) 答案及详解	99
模拟试题(四) 答案及详解	112

模拟试题(五)	答案及详解	125
模拟试题(六)	答案及详解	138
模拟试题(七)	答案及详解	151
模拟试题(八)	答案及详解	162
模拟试题(九)	答案及详解	175
模拟试题(十)	答案及详解	189

考生必须了解的信息

一、2008 年考研数学一考试大纲修订情况

(一) 关于试卷结构

1. 内容比例

2008 年考研数学一的内容比例与 2007 年相同,即高等数学约占 56%,线性代数和概率论与数理统计各约占 22%.

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题由去年的“约 45%”调整为“约 37%”.

说明:选择题由去年的“10 个小题(共 40 分)”调整为“8 个小题(共 32 分)”,即 2008 年考研数学一减少了 2 道关于高等数学的选择题.填空题的题量、分值等没有变化.

(2) 解答题(包括证明题)由去年的“约 55%”调整为“约 63%”.

说明:解答题由去年的“8 道题(共 86 分)”调整为“9 道题(共 94 分)”,即 2008 年考研数学一增加了 1 道关于高等数学的解答题.

(二) 关于考试内容与考试要求

1. 高等数学

(1) 在“二、一元函数微分学”考试内容中增加了“曲率圆”,在其考试要求中增加了“了解曲率圆的概念”.

(2) 在“三、一元函数积分学”考试要求中增加了“掌握用定积分表达和计算‘形心’”.

(3) 将“四、向量代数和空间解析几何”考试内容中的“母线平行于坐标轴的柱面”、“旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程”分别修订为“柱面”、“旋转曲面”.同时,将其考试要求中的“会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面及母线平行于坐标轴的柱面方程”修订为“会求简单的柱面和旋转曲面的方程”.

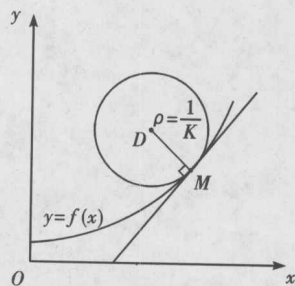
(4) 在“六、多元函数积分学”考试要求中增加了“会用重积分求形心”.

2. 概率论与数理统计

将“六、数理统计的基本概念”考试要求中的“了解分位数的概念并会查表计算”修订为“了解上侧 α 分位数的概念并会查表计算”.

► 关于曲率圆的概念

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x, y)$ 处的曲率为 $K (K \neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凹的一侧取一点 D , 使 $|DM| = \frac{1}{K} = \rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆 (如右图), 这个圆叫做曲线在点 M 处的曲率圆, 曲率圆的圆心 D 叫做曲线在点 M 处的曲率中心, 曲率圆的半径 ρ 叫做曲线在点 M 处的曲率半径.



按上述规定可知, 曲率圆与曲线在点 M 有相同的切线和曲率, 且在点 M 邻近有相同的凹向. 因此, 在实际问题中, 常常用曲率圆在点 M 邻近的一段圆弧来近似代替曲线弧, 以使问题简化.

按上述规定, 曲线在点 M 处的曲率 $K (K \neq 0)$ 与曲线在点 M 处的曲率半径 ρ 有如下关系:

$$\rho = \frac{1}{K}, \quad K = \frac{1}{\rho}.$$

这就是说: 曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数.

► 关于形心的概念及其计算

我们知道均匀薄片的质心的坐标为

$$\bar{x} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma, \quad (1)$$

其中 $A = \iint_D d\sigma$ 为闭区域 D 的面积. 这时薄片的质心完全由闭区域 D 的形状所决定. 我们把均匀平面薄片的质心叫做这平面薄片所占的平面图形的形心. 因此, 平面图形 D 的形心的坐标, 就可用公式(1) 计算.

全真模拟经典试题

要求与建议

1. 考生一定要在全面复习之后,再做本书中的模拟训练试题。
2. 考生做本书模拟试题时,一定要动手做,而且要写出来。这样有利于提高解题速度和解答正确性。
3. 不会的题目不要马上看答案,也不要一边查公式定理一边做。
4. 每套题要独立完成,做完后最好约几个同学一起讨论。
5. 对于本书十套经典模拟试题,考生最好用考试规定时间(180分钟)完成每套试题,以便较真实地检查自己的水平,查漏补缺,从而在后面冲刺复习阶段有的放矢。
6. 做完题要注意归纳总结,千万不可就题做题。建议考生对每道试题做以下事情(写在本书每道试题的空白处):
 - (1) 概括每道试题的考查知识点(注:本书每道试题至少包含两个知识点);
 - (2) 总结每道试题所属题型的解题思路、方法和技巧(注:本书解答部分编者已给出,建议考生用自己的语言进行总结);
 - (3) 做对的题再探究本书介绍以外的解题方法(注:本书对绝大部分试题均介绍了几种解题方法);
 - (4) 做错的题查找错因(注:本书对部分试题给出了错误的解法);
 - (5) 归纳每道试题所考查知识点的衔接点。
7. 由于本书所编试题综合性较强,难度要高于2007年考研试题,因此希望考生遇到难题不要气馁,记住“失败是成功之母”,胜利往往在于再坚持。

模拟试题(一)

一、选择题:1~8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

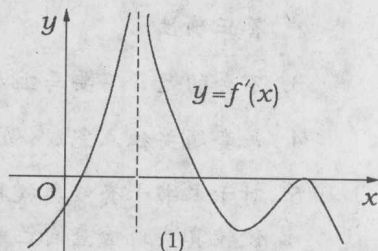
(1) 下列命题

- ① 若 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 存在左、右导数且 $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, 则 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续
- ② 若函数极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, 则数列极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = A$
- ③ 若数列极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(2n-1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(2n) = A$, 则函数极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = A$
- ④ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ 不存在, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x))$ 不存在

中正确的个数是

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

(2) 设函数 $f(x)$ 连续, 除个别点外二阶可导, 其导函数 $y = f'(x)$ 的图像如右图(1), 令函数 $y = f(x)$ 的驻点的个数为 p , 极值点的个数为 q , 曲线 $y = f(x)$ 拐点的个数为 r , 则



- (A) $p = q = r = 3$.
 (B) $p = 3, q = r = 2$.
 (C) $p = 3, q = 2, r = 3$.
 (D) $p = 3, q = 2, r = 1$.

(3) 下列函数中在区间 $[-2, 3]$ 上不存在原函数的是

(A)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2) - x^2}{x^4}, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

(B) $f(x) = \max\{|x|, 1\}$.

(C)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{\tan x - \sin x}{x^3}, & x < 0. \end{cases}$$

(D)
$$f(x) = \int_0^x g(t) dt, \text{ 其中 } g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & x < 1, \\ \frac{1}{3}(x-1), & 1 \leq x. \end{cases}$$

- (4) 设 $u(x, y)$ 在 $M_0(x_0, y_0)$ 取极小值, 并且 $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2}$ 均存在, 则
- (A) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \geq 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \geq 0$. (B) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} > 0$.
- (C) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \geq 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \leq 0$. (D) $\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x^2} \leq 0, \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y^2} \geq 0$.
- (5) 已知 4 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 若 $\beta_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 非零且与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均正交, 则 $r(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) =$
- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.
- (6) 设 A 为 n 阶矩阵, 对于齐次线性方程 (I) $A^n x = 0$ 和 (II) $A^{n+1} x = 0$, 必有
- (A) (II) 的解是 (I) 的解, (I) 的解也是 (II) 的解.
- (B) (I) 的解是 (II) 的解, 但 (II) 的解不是 (I) 的解.
- (C) (II) 的解是 (I) 的解, 但 (I) 的解不是 (II) 的解.
- (D) (I) 的解不是 (II) 的解, (II) 的解也不是 (I) 的解.
- (7) 在考核中, 若学员中靶两次, 则认定合格而停止射击, 但限定每人最多只能射击三次. 设事件 $A =$ “中靶两次”, $B =$ “最多中靶一次”, $C =$ “射击三次”, 设学员中靶率为 $p, 0 < p < 1$, 则
- (A) AB 与 C 独立. (B) BC 与 A 独立.
- (C) AC 与 B 独立. (D) A, B, C 相互独立.
- (8) 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, a < x < +\infty$, 则
- (A) $EX = 0$. (B) $EX = 1$.
- (C) $EX = a (a \neq 0, 1)$. (D) EX 不存在.

二、填空题: 9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

- (9) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \arctan \frac{1}{x})^{x^2} =$ _____.
- (10) 质量为 M , 长为 l 的均匀杆 AB 吸引着质量为 m 的质点 C , C 位于 AB 的延长线上并与近端距离为 a , 已求得杆对质点 C 的引力 $F = \frac{kMm}{a(l+a)}$, 其中 k 为引力常数. 将质点 C 在杆的延长线上从距离近端 r_0 处移至无穷远时, 则引力作的功为 _____.
- (11) 函数 $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 在点 $M_0(1, 1, 1)$ 处沿曲面 $2z = x^2 + y^2$ 在点 M_0 处外法线方向 n 的方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{M_0} =$ _____.

- (12) 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 且 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x < 2, \end{cases}$ $f(x)$ 的傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x), \text{ 则 } n \geq 1 \text{ 时, } a_n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- (13) 设 α, β 均为 n 维非 0 列向量, 矩阵 $A = \alpha \beta^T - E$, 且 $A^2 - 3A = 4E$, 则 $\alpha^T \beta = \underline{\hspace{2cm}}.$

- (14) 设总体 $X \sim N(\mu, 8)$, μ 未知, $X_1, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 如果在检验水平 $\alpha = 0.05$ 上检验 $H_0: \mu = 1; H_1: \mu \neq 1$, 其拒绝域 $R = \{|\bar{X} - 1| \geq 1.96\}$, 则样本容量应取 $n = \underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题: 15 ~ 23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

- (15) (本题满分 10 分)

作变换 $t = \tan x$, 把方程

$$\cos^4 x \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \cos^2 x (1 - \sin x \cos x) \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

变换成 y 关于 t 的微分方程, 并求原方程的通解.

(16) (本题满分 10 分)

设有一容器由平面 $z = 0, z = 1$ 及介于它们之间的曲面 S 所围成. 过 z 轴上 $\forall$ 点 $(0, 0, z) (0 \leq z \leq 1)$ 作垂直于 z 轴的平面与该立体相截得水平截面 $D(z)$, 它是半径 $r(z) = \sqrt{(1-z)^2 + z^2}$ 的圆面. 若以每秒 v_0 体积单位的均匀速度往该容器注水, 并假设开始时容器是空的.

- (I) 求注水过程中水面高度 z 与时间 t 的函数关系.
- (II) 求水表面上升速度最大时的水面高度.
- (III) 求灌满容器所需时间.

(17) (本题满分 10 分)

求函数 $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$ 的麦克劳林展开式.

(18) (本题满分 10 分)

设 $A(2,2), B(1,1)$, Γ 是从点 A 到点 B 的线段 $\overline{AB}$ 下方的一条光滑定向曲线 $y = y(x)$, 且它与 $\overline{AB}$ 围成的面积为 2, 又 $\varphi(y)$ 有连续导数. 求曲线积分

$$I = \int_{\Gamma} [\pi\varphi(y)\cos\pi x - 2\pi y]dx + [\varphi'(y)\sin\pi x - 2\pi]dy.$$

(19) (本题满分 10 分)

设函数 $u = f(x, y, z)$ 在球域 $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 有连续的一阶偏导数, 且在 Ω 的边界 S 上取值为零. 求证:

$$(I) \quad \iiint_{\Omega} \left[3f(x, y, z) + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right] dV = 0.$$

$$(II) \quad \left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \right| \leq \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2} dV.$$

$$(III) \quad \left| \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dV \right| \leq \frac{\pi}{3} \max_{\Omega} \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}.$$

(20) (本题满分 11 分)

设有向量组 $\alpha_1 = (1, 1, 1, 2)^T$, $\alpha_2 = (3, a+4, 2a+5, a+7)^T$, $\alpha_3 = (4, 6, 8, 10)^T$, $\alpha_4 = (2, 3, 2a+3, 5)^T$.

- (I) 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩及其一个极大线性无关组;
- (II) 若 $\beta = (0, 1, 3, b)^T$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 试求 a, b 的取值;
- (III) 若任何 4 维向量 γ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 线性表出, 试求 a, b 的值.

(21) (本题满分 11 分)

设二次型

$$x^T A x = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2bx_1x_3 + 2cx_2x_3,$$

矩阵 A 满足 $AB = 0$, 其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

- (I) 用正交变换化二次型为标准形, 并写出所用正交变换;
- (II) 求 $(A - 3E)^6$.

(22) (本题满分 11 分)

设随机变量 X_1 与 X_2 相互独立同分布, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

令 $Y_1 = \max(X_1, X_2)$, $Y_2 = \min(X_1, X_2)$, 求:

(I) Y_1, Y_2 的分布函数; (II) $E(Y_1 + Y_2)$.

(23) (本题满分 11 分)

设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0.05	0.16	0.09	0.30
0	0.08	0.20	0.12	0.40
1	0.07	0.14	0.09	0.30
$p_{\cdot j}$	0.20	0.50	0.30	

- (I) 判断 X 与 Y 是否独立;
(II) 判断 X^2 与 Y^2 是否独立;
(III) 计算 $\text{cov}(X, X+Y)$ 与 $\text{cov}(X^2, X^2+Y^2)$.