



全国高等专科教育计算机类规划教材

计算机应用数学基础

王学军 主编

侯风波 主审



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



全国高等专科教育计算机类规划教材

计算机应用数学基础

主 编 王学军
副主编 刘 欣 刘全振 谢 懿
主 审 侯风波



机械工业出版社

本书内容主要包括行列式、矩阵、线性方程组等基础性知识;计算方法部分包括误差、插值、直线拟合、最小二乘法、数值积分、一元非线性方程的解、高阶线性方程组的解法等内容,以及算法原理、程序实现及工程应用;离散数学部分包括逻辑学中命题逻辑和谓词逻辑,关系学中包括集合、关系、函数;图论,代数系统,以及格与布尔代数等内容及应用.每章配有经典实例和相关习题,供学生复习时加深对理论内容的理解和掌握.

本书可作为高职高专计算机类各专业的教材,重点培养计算机类专业学生的数学思维能力、常用计算方法的理解和应用能力以及基本数学应用技巧等方面的知识和能力,为后续课程的学习打下基础.同时,该教材也可作为相关专业人员学习参考用书.

本书配有电子教案供教师使用,可发电子邮件至 wangyx@mail.machininfo.gov.cn 邮箱索取.

图书在版编目(CIP)数据

计算机应用数学基础/王学军主编. —北京:机械工业出版社, 2006. 7

全国高等专科教育计算机类规划教材

ISBN 7-111-19527-2

I. 计... II. 王... III. 电子计算机—应用数学—高等学校—教材 IV. TP301.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 075640 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑:王玉鑫 孔熹峻 责任编辑:王玉鑫 版式设计:张世琴

责任校对:刘志文

封面设计:姚毅

责任印制:李妍

北京铭成印刷有限公司印刷

2006 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 11.25 印张 · 271 千字

0001—4000 册

定价:17.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

本社购书热线电话(010)68326294

编辑热线电话(010)68354423

封面无防伪标均为盗版

前 言

科学技术的发展离不开基础研究和创新,尤其是进入21世纪的信息化时代以后,计算机及相关科学也在飞速发展,作为信息科学和计算机科学的数学基础,计算方法和离散数学受到越来越多的关注.这类课程也被高等院校的计算机相关专业列为重点课程.

全书共分12章.前3章介绍了行列式、矩阵和线性方程组等数学方面的基础性知识,为本书后面的知识应用打下基础;第4章重点介绍了计算方法中常用的基本算法、流程过程、程序实现和综合应用;第5~12章介绍了离散数学的内容,包括逻辑学(命题逻辑、谓词逻辑),关系学(集合、关系、函数),图论,代数系统,格与布尔代数等内容.本书除了介绍必需、够用的理论概述和相关定理之外,主要是以工程应用为主.本书配有大量经典的例题和针对性很强的课后习题,使读者能够对理论知识加深理解.同时本书还有配套的电子教案,以供学习者使用.

本书经过有关专家认真研讨,通过几届学生的使用,经过多次修改和润色,已经形成了一定的风格,具体特色如下:

(1) 定位准确.本书面向高职高专计算机类各专业,同时也可作为相关技术人员的参考用书.

(2) 内容组合得当.根据当前教育改革和课程改革的形势,将一些相关课程内容整合是本教材很突出的特色,虽然本书包括内容多,但是内容之间的联系紧密、过度自然,使前后内容形成了一个整体.

(3) 教材语言通俗易懂.本教材经过几轮的使用,进行了多次修改,使语言上更为精练,叙述更加简单明了,对读者来说,通俗易懂.

(4) 本教材实践性和实用性很强.在本书中,选取了一定数量的经典例题和工程实例,对理论内容的理解起到很大的帮助作用.

本书由王学军主编,刘欣、刘全振、谢懿担任副主编.全书由王学军统稿,在统稿过程中得到了谢懿老师的很大帮助,本书由河北省高校名师侯风波教授担任主审,在本书的编写过程中,侯风波教授对本书的编写思路、编写风格及内容组合等很多方面给予了指导,提出了很多宝贵意见.

参加本书编写的教师都是长期从事该方面教学的一线骨干教师,且都曾主持或参与过公开教材的编写,有很丰富的经验.具体编写情况为:第1~4章由刘欣编写,第5~6章由刘全振编写,第7~9、11~12章由王学军编写,第10章由谢懿编写.

本书在编写过程中,得到了宋汉珍教授、马晓晨副教授的大力支持和帮助.在编写的过程中,作者们参考了国内外许多教材和相关资料,从中吸取了许多很好的思想和方法,在此一并表示感谢,希望广大读者对本书提出宝贵意见.

编者

目 录

前言

第1章 行列式 1

1.1 行列式的概念与性质 1

1.1.1 二阶、三阶行列式 1

1.1.2 n 阶行列式概念 1

1.1.3 行列式的性质 2

1.2 行列式的计算 3

1.2.1 余子式 3

1.2.2 特殊行列式的计算 3

1.2.3 行列式的展开式 4

1.3 克莱姆法则 5

习题 6

第2章 矩阵 8

2.1 矩阵的概念及其线性运算 8

2.1.1 矩阵的概念 8

2.1.2 矩阵的加减 9

2.1.3 矩阵的数乘 9

2.2 矩阵的乘法与转置 10

2.2.1 矩阵的乘法 10

2.2.2 矩阵乘法的特殊性 11

2.2.3 矩阵的转置 11

2.3 逆矩阵 11

2.3.1 逆矩阵的概念 11

2.3.2 方阵可逆的条件 12

2.3.3 逆矩阵的性质 13

2.4 矩阵的初等变换 13

2.4.1 矩阵的初等行变换 13

2.4.2 用初等变换法求逆矩阵 13

习题 14

第3章 线性方程组 16

3.1 矩阵消元法 16

3.2 矩阵的秩 17

3.2.1 秩的概念 17

3.2.2 秩的求法 17

3.3 秩与线性方程组的解 17

3.4 线性方程组解的结构 18

3.4.1 齐次线性方程组解的结构 18

3.4.2 非齐次线性方程组解的结构 19

习题 19

第4章 计算方法 21

4.1 误差 21

4.1.1 误差的来源 21

4.1.2 误差的概念 21

4.1.3 有效数字 22

4.1.4 数值运算的原则 22

4.2 插值问题 22

4.2.1 插值原则 22

4.2.2 线性插值问题 23

4.2.3 插值多项式的构造 24

4.2.4 均差 24

4.2.5 牛顿均差公式 25

4.3 曲线拟和的最小二乘法 26

4.4 数值积分 27

4.4.1 牛顿-柯特斯求积公式 27

4.4.2 复化梯形公式 28

4.4.3 变步长梯形公式 29

4.5 一元非线性方程的解 30

4.5.1 二分法 30

4.5.2 牛顿迭代法 31

4.5.3 单点弦截法 33

4.5.4 双点弦截法 33

4.6 线性方程组的迭代法 33

4.6.1 迭代法思想 34

4.6.2 简单迭代法 34

4.6.3 塞德尔迭代法	34		
习题	35		
第5章 命题逻辑	37	第6章 谓词逻辑	58
5.1 命题的概念	37	6.1 个体、谓词与量词	58
5.1.1 命题	37	6.1.1 个体与谓词	59
5.1.2 命题的表示	38	6.1.2 量词	60
5.1.3 命题的分类	38	6.2 谓词公式与解释	61
5.1.4 真值表	38	6.2.1 谓词公式的概念	61
5.2 命题联结词	38	6.2.2 约束变元与自由变元	62
5.2.1 否定联结词	38	6.2.3 谓词公式的解释	63
5.2.2 合取联结词	39	6.2.4 谓词公式的分类	64
5.2.3 析取联结词	39	6.3 谓词逻辑的等价式与蕴涵式	64
5.2.4 条件联结词	40	6.3.1 谓词逻辑的等价式	64
5.2.5 双条件联结词	41	6.3.2 谓词逻辑的蕴涵式	66
5.3 命题公式	42	6.4 前束范式	66
5.3.1 命题公式的概念	42	6.5 谓词逻辑的推理理论	67
5.3.2 命题公式的赋值	42	习题	69
5.4 命题公式的真值表及分类	43	第7章 集合	72
5.4.1 命题公式的真值表	43	7.1 集合及相关知识	72
5.4.2 命题公式的分类	44	7.1.1 集合的相关概念	72
5.5 等价式	44	7.1.2 集合的描述	72
5.5.1 等价式的概念	44	7.2 集合之间的特殊关系	73
5.5.2 置换规则	45	7.3 集合的运算	74
5.6 蕴涵式	46	7.4 包含排斥原理	76
5.6.1 蕴涵的概念	46	习题	77
5.6.2 基本蕴涵式	46	第8章 关系	79
5.7 最小联结词组	47	8.1 序偶与笛卡儿积	79
5.8 对偶式	47	8.1.1 序偶	79
5.9 范式	48	8.1.2 笛卡儿积	79
5.9.1 范式的概念	48	8.2 二元关系	80
5.9.2 极小项与极大项的概念	49	8.2.1 二元关系及其相关概念	80
5.9.3 主范式的概念	50	8.2.2 二元关系的表示	81
5.9.4 主析取范式与主合取范式 的关系	51	8.3 关系的运算	82
5.10 命题逻辑的推理理论	52	8.3.1 关系的基本运算	82
5.10.1 前提与有效结论	52	8.3.2 关系的复合运算	82
5.10.2 构造论证法	52	8.3.3 关系的逆运算	84
习题	54	8.4 关系的性质及判定	85
		8.4.1 自反性及判定方法	85

8.4.2 反自反性及判定方法	86	10.5.2 哈密尔顿图	123
8.4.3 对称性及判定方法	86	10.6 树	125
8.4.4 反对称性及判定方法	87	10.6.1 树的概念	125
8.4.5 传递性及判定方法	88	10.6.2 生成树	126
8.5 关系的闭包运算	89	10.6.3 最小生成树	127
8.5.1 关系的闭包	89	10.7 根树及其应用	127
8.5.2 闭包的运算定理	89	10.7.1 根树、有序树、M叉树	127
8.6 特殊关系及应用	91	10.7.2 二叉树	129
8.6.1 等价关系	91	10.7.3 二叉树在计算机中的应用	132
8.6.2 相容关系	95	10.8 二部图和平面图	134
8.6.3 偏序关系	95	10.8.1 二部图	134
习题	97	10.8.2 平面图	134
		习题	136
第9章 函数	100		
9.1 函数的概念	100	第11章 代数系统	140
9.1.1 函数概述	100	11.1 二元运算及其性质	140
9.1.2 特殊函数	101	11.1.1 二元运算的定义	140
9.2 函数运算	101	11.1.2 二元运算的性质	141
9.2.1 复合函数	101	11.1.3 二元运算所对应集合中的 特殊元素	143
9.2.2 逆函数	103	11.2 代数系统	146
9.2.3 几个特殊函数	103	11.2.1 代数系统的定义	146
习题	104	11.2.2 代数系统的分类	147
		11.2.3 代数系统的同态和同构	147
第10章 图论	106	11.3 特殊的代数系统	148
10.1 基本概念	106	11.3.1 半群	148
10.1.1 图的基本概念	106	11.3.2 独异点	149
10.1.2 图中结点的度数	107	11.3.3 群	150
10.1.3 几种常见的图	108	11.3.4 子群	152
10.1.4 子图	109	11.3.5 典型群及其应用	153
10.1.5 图的同构	109	11.3.6 置换群	156
10.2 路与回路	110	11.3.7 陪集	157
10.2.1 路、回路和连通性	110	习题	159
10.2.2 有权图的最短路径问题	112		
10.3 图的矩阵表示	114	第12章 格与布尔代数	162
10.4 有向图和可达性矩阵	116	12.1 格的概述	162
10.4.1 有向图	116	12.1.1 格的定义	162
10.4.2 有向图的可达性	117	12.1.2 格的性质	164
10.5 欧拉图与哈密尔顿图	120	12.2 分配格和有补格	165
10.5.1 欧拉图	120		

12.2.1 分配格	165	12.3.3 布尔表达式	167
12.2.2 有补格	165	习题	167
12.3 布尔代数	166		
12.3.1 布尔代数及相关概念	166	参考文献	169
12.3.2 布尔代数的性质	166		

第1章 行列式

学习目标

了解行列式的概念；掌握行列式的基本性质及各种计算方法；掌握行列式的降阶算法；了解克莱姆法则及推论.

1.1 行列式的概念与性质

行列式是一种应用广泛的数学工具，本章介绍行列式的定义及计算方法，进一步讨论其在线性方程组方面的应用，由此得出齐次线性方程组有非零解的必要条件.

二阶行列式是由解二阶线性方程组系数得来的. 下面让我们来回顾一下初等数学里的关于二阶、三阶行列式的一些知识. 我们把这两行两列数(即方程组中作未知数系数的两行两列数)的两边加两道竖杠来表示它，即用记号

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 来表示.

1.1.1 二阶、三阶行列式

行列式是代数式的简要记号，行列式的元素有两个下标，分别称为行标和列标. 如 a_{11} 表示该元素位于第1行、第1列. 二阶、三阶行列式的全面展开计算式可依据对角线法如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$\text{例如：} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 14 = -5, \quad \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 + 0 - 2 - 0 - (-8) = 11.$$

1.1.2 n 阶行列式概念

在二阶，三阶行列式定义的基础上，可给出由 n^2 个元素构成的 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式可简记为 D 或 $|a_{ij}|$. 其中, 特别的, 一阶行列式 $|a|$ 值为 a . 高于 3 阶的行列式则不能用对角线法展开. n 阶行列式也可表示为取自不同行、不同列的 n 个元素的展开式, n 个自然数的全部展开式共有 $n!$ 项. 显然, 借此来计算行列式是很复杂的, 下面将学习行列式的性质, 找到计算行列式的简便方法.

1.1.3 行列式的性质

将行列式 D 的行与列互换后得到的行列式, 称为 D 的转置行列式, 记为 D^T . D 的转置行列式为

$$D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

实际书写时, “行元素改为列元素” 便可得到转置行列式. 行列式具有如下性质:

性质 1 行列式转置后, 其值不变, 即 $D^T = D$.

验证: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 14 = -5$, 而 $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 14 = -5$

说明 若行列式的行具有某一性质, 它们的列也具有相同的性质, 因此, 以下各个性质均为行列共有的.

性质 2 交换行列式的两行(列), 行列式的值仅改变符号.

性质 3 行列式的某一行(列)元素有公因子, 可以提到行列式的外面.

这条性质也可以反向运用: 行列式乘数 k , 等于把 k 乘到行列式的某一行(列)上去.

推论 1 行列式有两行(列)完全相同, 行列式值为零.

推论 2 行列式有两行(列)的元素成比例, 行列式值为零.

性质 4 如果一个行列式某一行(列)所有元素可以拆分成两个数的和, 则此行列式可以拆分成两个行列式的和, 其中除此行(列)外, 其他行(列)的对应元素都与原行列式相同. 用三阶行列式表示为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a+d & b+e & c+f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ d & e & f \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质 4 称作行列式的拆分规则. 反向运用, 同样成立, 可叫做合并规则. 特别强调: 除某一对应行(列)拆分外, 其余元素均与原行列式相同. 此性质在证明或计算某些行列式时, 提供一定的技巧. 例如:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

性质 5 把行列式某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去, 行列式的值不变.

用三阶行列式表示为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{31} & a_{22} + ka_{32} & a_{23} + ka_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

实际上, 按照性质 5 做变换后的行列式可拆分成两个行列式的和, 一个是原行列式, 另一个行列式有两行元素成比例, 其值为零.

1.2 行列式的计算

1.2.1 余子式

在 n 阶行列式中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后, 余下的元素按原次序构成一个 $n-1$ 阶行列式, 称做元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} . 对 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 称做 a_{ij} 的代数余子式.

1.2.2 特殊行列式的计算

若行列式第一行元素除 a_{11} 外均为零, 则有如下计算式:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理 1-1 如果行列式的某行(或某列)中, 仅有一个元素非零, 那么行列式的值等于该非零元素与它的代数余子式的乘积.

根据上述定理, 下面 n 阶行列式, 经逐次降阶, 很容易得到它的值:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$$

称这种行列式为上三角行列式. 类似方法可求得下三角行列式及对角行列式的算式, 上述特殊行列式与行列式性质结合, 即利用性质使某行(列)尽多出现零, 或将其化为上(下)三角行列式来简化运算, 这种方法称作化零运算.

例 1-1 计算下列高阶行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 7 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 5 & -8 \\ 1 & 3 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 1 \times (-1) \times 2 \times 5 = -10 \end{aligned}$$

例 1-2 解下面的方程

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0 \\ \text{解 } D &= \begin{vmatrix} 3a+x & 3a+x & 3a+x & 3a+x \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \\ &= (3a+x) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} \\ &= (3a+x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & x-a & 0 & 0 \\ a & 0 & x-a & 0 \\ a & 0 & 0 & x-a \end{vmatrix} \\ &= (3a+x)(x-a)^3 = 0 \end{aligned}$$

所以方程的解为: $x_1 = -3a$, $x_2 = x_3 = x_4 = a$

1.2.3 行列式的展开式

按照行列式的拆分规则, 一个三阶行列式可作如下拆分:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

再根据定理 1-1, 得到

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

这叫做行列式按第 1 行展开. 同理, 将三阶行列式按照各行展开为:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \\ &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} \\ &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{aligned}$$

其中 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, 行列式也可以按各列展开, 这种展开也可推广到任意阶行列式. 一般地, 对于 n 阶行列式 D , 也有如下展开式

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

这两个公式分别称为行列式的按行展开式和按列展开式, 这定理又称拉普拉斯展开. 展开式右端是某行(列)元素与它们的代数余子式乘积之和. 可验证行列式的某行元素与另一行元素的代数余子式相组合, 结果等于零. 即

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}A_{ij} = \begin{cases} D, & k=i \\ 0, & k \neq i \end{cases}$$

行列式的按行或按列展开, 起到了降阶的效果, 可以用来计算行列式的值. 如:

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} -10 & 8 & -7 & 2 \\ 7 & -9 & 13 & 1 \\ -5 & -1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} &= (-5) \begin{vmatrix} 8 & -7 & 2 \\ -9 & 13 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -10 & -7 & 2 \\ 7 & 13 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &+ 5 \begin{vmatrix} -10 & 8 & 2 \\ 7 & -9 & 1 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -10 & 8 & -7 \\ 7 & -9 & 13 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

显然, 用这种方法计算量大, 容易出错.

1.3 克莱姆法则

含有 n 个未知量、 n 个方程的线性方程组记为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1-1)$$

未知量的所有系数构成的行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为方程组(1-1)的系数行列式. 若线性方程组(1-1)的常数项全为零, 即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases} \quad (1-2)$$

则称式(1-2)为齐次线性方程组; 而方程组(1-1)当常数项不全为零时, 称为非齐次线性方程组. 以下为线性方程组的克莱姆法则.

定理 1-2 线性方程组(1-1)当其系数行列式 $D \neq 0$ 时, 有且仅有惟一解

$$x_j = \frac{D_j}{D}, j=1, 2, \dots, n$$

其中 D_j 是以方程组的常数项 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 替换 D 的第 j 列元素后形成的行列式.

例 1-3 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{解 } D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 30; \quad D_1 = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 30;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -60; \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -30;$$

$$\text{解之, } x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, x_2 = \frac{D_2}{D} = -2, x_3 = \frac{D_3}{D} = -1.$$

用克莱姆法则解线性方程组要计算 $n+1$ 个 n 阶行列式, 计算量很大, 所以它一般用于理论推导, 不做为计算方法使用. 以后将介绍解线性方程组更好的方法.

对于齐次线性方程组, 系数行列式 $D \neq 0$ 时, 它只有零解; 如果系数行列式 $D = 0$, 则方程组一定有非零解, 以后将做证明.

习题

1-1 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

1-2 利用行列式的性质证明下式:

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

1-3 已知行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ a & b & c & d \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

求出元素 a, b 的代数余子式的值.

1-4 运用行列式的降阶算法计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

1-5 计算下列行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

1-6 解下列方程

$$(1) \begin{vmatrix} a & a & x \\ b & b & b \\ c & x & c \end{vmatrix} = 0$$

$$(2) \begin{vmatrix} x & 2x & 9 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

1-7 用克莱姆法则解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -2 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

第2章 矩 阵

学习目标

了解矩阵的概念；掌握矩阵的线性运算与乘法运算，能够用程序实现该算法；逆矩阵的概念、存在条件及简单求解方法。学习中要注意矩阵与行列式的区别。

2.1 矩阵的概念及其线性运算

2.1.1 矩阵的概念

我们将引入数学中一个重要的数学工具——矩阵。先看个生活中的例子，在物资运输中，要考虑如何选择路径使运费最低，如产品的产地为甲、乙两个厂，销售点为A、B、C三处，产地与销售点之间的运费情况可用表2-1来表示。

表 2-1

	甲 厂	乙 厂		甲 厂	乙 厂
A	120	115	C	60	45
B	80	95			

上述问题可用一个按一定次序排列的数表来表示运费：

$$\begin{pmatrix} 120 & 115 \\ 80 & 95 \\ 60 & 45 \end{pmatrix}$$

这种类似矩形的数据表，在工程、经济领域中常常被使用，在数学中称作矩阵，下面给出它的定义，一般地

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m \times n$ 矩阵，它有 m 行、 n 列，共 $m \times n$ 个元素，其中第 i 行、第 j 列的元素用 a_{ij} 表示。矩阵通常用大写黑体字母 A 、 B ... 表示，或用 $A_{m \times n}$ 或 $(a_{ij})_{m \times n}$ 表示。 $1 \times n$ 矩阵称为 n 维行向量； $n \times 1$ 矩阵称为 n 维列向量。行向量、列向量统称为向量。向量通常用小写黑体字母 a ， b ， x ， y ... 表示，向量中的元素又称为向量的分量。所有元素均为 0 的矩阵，称为零矩阵，记作 O ，类似于普通的数零。

如果矩阵 A 的行数、列数都是 n ，则称 A 为 n 阶矩阵，或称为 n 阶方阵。 n 阶矩阵从左

上角到右下角的元素称为主对角线元素. n 阶矩阵 A 的元素按原次序构成的 n 阶行列式, 称为矩阵 A 的行列式, 记作 $|A|$.

在 n 阶矩阵中, 若主对角线左下(上)侧的元素全为零, 则称之为上(下)三角矩阵, 如三阶上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -7 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

主对角线上元素全为 1 其余全为 0 的对角矩阵, 叫做 n 阶单位矩阵, 记为 E , 即

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.2 矩阵的加减

如果矩阵 A 、 B 的行数和列数都相同, 那么它们可以相加、减, 记为 $A+B$ 、 $A-B$. 分别称为矩阵 A 、 B 的和与差. $A \pm B$ 表示将 A 、 B 中所有对应位置的元素相加、减得到的矩阵. 例如

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A+B = \begin{pmatrix} -1+1 & 2+3 & 3+0 \\ 0+5 & 3+(-4) & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

同理, 可计算 $A-B$.

说明: 只有行数和列数都相同的两个矩阵, 即同型矩阵, 才能做加(减)运算.

2.1.3 矩阵的数乘

矩阵 A 与数 k 相乘记为 kA 或 Ak . kA 表示将 k 乘 A 中的所有元素得到的矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 4 \\ 3 \times 3 & 3 \times 0 \\ 3 \times 5 & 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 9 & 0 \\ 15 & 3 \end{pmatrix}$$

当 $k = -1$ 时, 记 $(-1)A = -A$, 称为 A 的负矩阵.

矩阵的加减与数乘统称为线性运算. 由于线性运算满足交换律、结合律与分配律, 这与数量的运算规律相同, 在数量运算中形成的诸如提取公因子、正负抵消等算法, 在矩阵的线性运算中都适用.

例 2-1 设

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

已知 $A+2X=B$, 求 X .