JS 揭示解题方法　探索解题规律

初中数学竞赛解题方法大全

主编　陶平生　张惠东

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

初中数学竞赛解题方法大全

主　　编　陶平生　张惠东
编　　委　张惠东　董乐华
　　　　　傅群跃　杨　军

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

初中数学竞赛解题方法大全/陶平生,张惠东主编. 杭州:浙江大学出版社,2007.6
ISBN 978-7-308-05368-6

Ⅰ.初… Ⅱ.①陶… ②张… Ⅲ.数学课 初中—解题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第082227号

责任编辑 沈国明
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路38号 邮政编码310027)
(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址: http://www.zjupress.com)
经　　销 浙江省新华书店
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 浙江省良渚印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 19
印　　数 0001—8000
字　　数 390千字
版 印 次 2007年6月第1版 2007年6月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-308-05368-6
定　　价 23.00元

编 写 说 明

古人云：授之以鱼，只供一饭之需；授之以渔，则一生受用无穷。这是我们编写“初中学科竞赛方法指导”丛书的宗旨。基于此，我们在编写过程中着力于方法的传授和学生自主学习、合作探究能力的培养，通过知识引导、及典型问题和复习巩固等栏目设置，充分渗透思想和方法，以期教会学生学习。

本丛书的内容包括：

一、知识梳理 着眼于梳理知识结构，构建知识网络，帮助学生理清知识脉络，使学生牢固掌握知识点和整体把握，为下一步的学习做好铺垫。

二、典例探究 分为中考类和奥赛类，通过具有示范价值的例题，展开发散思维，揭示解题规律，启发解题思路，点拨方法技巧，帮助学生寻求解决问题的突破口，教会学生运用知识解决实际问题的思维方法。

三、课外训练 按等第、层次设计A类、B类两组能力训练题，用于检测学生的学习效果与能力，指导学生循序渐进，提升学生自主学习的品格以及分析问题和解决问题的能力，使学生能够随机应变、从容应对纷繁多变的试题，提高学生的应试能力。

在编写丛书过程中，按少而精、新而精的原则，以初中新课程标准和初中学科竞赛大纲为依据，注入现代教学理念，大胆地实践探索，形成了独特的体系和编写风格。

目 录

第一讲　整数(一) …… 1
第二讲　整数(二) …… 9
第三讲　实数 …… 16
第四讲　整式 …… 28
第五讲　因式分解 …… 37
第六讲　分式 …… 47
第七讲　二次根式 …… 55
第八讲　一元一次方程(组) …… 62
第九讲　一元二次方程(组) …… 70
第十讲　不定方程(组) …… 82
第十一讲　不等式 …… 89
第十二讲　一次函数与反比例函数 …… 98
第十三讲　二次函数 …… 111
第十四讲　三角形 …… 123
第十五讲　四边形 …… 134
第十六讲　相似形 …… 145
第十七讲　解直角三角形 …… 157
第十八讲　几何变换与面积问题 …… 167
第十九讲　圆 …… 178
第二十讲　数学竞赛解题方法 …… 194
参考答案 …… 205

第一讲　整 数（一）

一、整数及进位位制表示法

整数的十进制是我们最常用、最熟悉的一种数的进位方法.用十进制位法表示一个数常用十个不同的数字符号 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,而且低位向高位进位是逢十进一.比如 2345 这个数,它包含着数位与运算的意思.我们可以理解为 2 个 1000,加上 3 个 100,加上 4 个 10,再加 5 个 1,用式子可以表示为：$2345=2\times10^3+3\times10^2+4\times10+5\times1$.

一般地,对于任意一个 n 位的正整数 A,都可以用这种形式表示：

$A=a_{n-1}10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\cdots+a_1 10+a_0$.这里,$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$取 0～9 这 10 个数字,且 $a_{n-1}\neq0$,为了方便我们可以将 A 记为：

$$A=\overline{a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0}$$

其中数码 a_0 叫做个位数,a_1 叫做十位数,…,a_{n-1}叫做首位数(第 n 位数).

数的进位有很多种,如十二进制、二进制等,若 A 能写成：

$A=a_{n-1}2^{n-1}+a_{n-2}2^{n-2}+\cdots+a_1\cdot2+a_0$,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}\in\{0,1\}$,且 $a_{n-1}\neq0$,则 A 就是一个 n 位的二进制数,简记为：$A=(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)_2$.

关于整数的十进制表示是数学竞赛的一个考点.

例1 如果一个三位数正好等于各个数位上的数字之和的 13 倍,试求这个三位数.

【分析】 解决这个题的关键是要用数字符号表示出这个三位数,再列出方程,并能从 $b=29a-4c$ 中分析出 a 只能为 1.把这个问题解决了,此题也就迎刃而解了.

解 设这个三位数可表示为$\overline{abc}$,根据题意得 $100a+10b+c=13(a+b+c)$,

$\therefore b=29a-4c$.

这里 a 只能为 1,否则不论 c 取什么数,b 均为两位数.

$\therefore$ 当 $a=1$ 时,$c=5,6,7$.而此时,$b=9,5,1$.

故所求的三位数是 195,156 或 117.

例1 已知一个四位数各位数字之和与这个四位数相加等于 2003,试求这个四位数.

【分析】 解决此类问题,除了要能找到相关关系列出方程外,关键是要对 a,b,c,d 的取值进行判定.

解 设所求的四位数为$\overline{abcd}$,根据题意得 $a+b+c+d+\overline{abcd}=2003$,

即 $1001a+101b+11c+2d=2003$.

若　$a=1$，则　$101b+11c+2d=1002$.

b 只能为 9，得　$11c+2d=93$.

$c\neq 9$，$c\neq 8$，c 只能为 7，故 $d=8$.

若　$a=2$，则 $b=c=0$，$2d=1$，d 无解.

∴ 这个四位数是 1978.

例3　将 2003 表示成二进制数.

【分析】　将一个十进制数 A 用二进制数表示，关键是先将 A 表示成 $1\times 2^n+A'$ 的形式，如 $2003=2^{10}+979$，然后将 A' 再仿照表示 A 的方法以此类推，最终写成 $A=a_{n-1}2^{n-1}+a_{n-2}2^{n-2}+\cdots+a_1 2+a_0$（其中 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_1,a_0\in\{0,1\}$），就可简记为：$A=(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0)_2$.

解　∵ $2^{10}=1024$，$2^9=512$，$2^8=256$，$2^7=128$，$2^6=64$，$2^5=32$，$2^4=16$，$2^3=8$，$2^2=4$，

$$\begin{aligned}\therefore 2003&=2^{10}+979\\&=2^{10}+2^9+467\\&=2^{10}+2^9+2^8+211\\&=2^{10}+2^9+2^8+2^7+83\\&=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+19\\&=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+2^4+2+1\\&=2^{10}+2^9+2^8+2^7+2^6+0\times 2^5+2^4+0\times 2^3+0\times 2^2+2+1.\end{aligned}$$

∴ 2003 的二进制可表示为 $2003=(11111010011)_2$.

二、整数的整除性的有关概念、性质

对于整数 a 和不为零的整数 b，总存在整数 m，n 使得 $a=bm+n(0\leqslant n<b)$，其中 m 称为商，n 称为余数，特别地，当 $n=0$ 时，即 $a=bm$，便称 a 被 b 整除（也称 a 是 b 的倍数或 b 是 a 的约数），记为 $b\mid a$.

整除有以下基本性质：

1. 若 $a\mid b$，$a\mid c$，则 $a\mid(b\pm c)$；
2. 若 $a\mid b$，$b\mid c$，则 $a\mid c$；
3. 若 $a\mid bc$，且 $(a,c)=1$，则 $a\mid b$，若质数 $p\mid bc$，则必有 $p\mid b$ 或 $p\mid c$；
4. 若 $b\mid a$，$c\mid a$，且 $(b,c)=1$，则 $bc\mid a$.

解整除有关问题常用到数的整除性常见特征：

1. 被 2 整除的数：个位数字是偶数；
2. 被 5 整除的数：个位数字是 0 或 5；
3. 被 4 整除的数：末两位组成的数被 4 整除；被 25 整除的数，末两位组成的数被 25 整除；
4. 被 8 整除的数：末三位组成的数被 8 整除；被 125 整除的数，末三位组成的数被 125 整除；
5. 被 3 整除的数：数字和被 3 整除；

6. 被 9 整除的数：数字和被 9 整除；

7. 被 11 整除的数：奇数位数字和与偶数位数字和的差被 11 整除.

(1) 利用数的整除性特征：

例 1,2,3,4,5,6 每个使用一次组成一个六位数$\overline{abcdef}$，使得三位数$\overline{abc}$，$\overline{bcd}$，$\overline{cde}$，$\overline{def}$依次能被 4,5,3,11 整除，求这个六位数.

解　由 $5 \mid \overline{bcd}$，得 $d = 5$，

由 $11 \mid \overline{def}$，得 $11 \mid (d + f - e)$.

$\because 3 \leqslant d + f \leqslant 11$，$1 \leqslant e \leqslant 6$，

$\therefore -3 \leqslant d + f - e \leqslant 10$，即有 $d + f - e = 0, 5 + f = e$.

又 $e \leqslant 6$，$f \geqslant 1$，$\therefore e = 6$，$f = 1$.

由 $3 \mid \overline{cde}$，得 $3 \mid (c + 5)$，

由 $4 \mid \overline{abc}$，得 c 为偶数，

$\therefore c = 4$.

从而 $a = 3$，$b = 2$，故$\overline{abcdef} = 324561$.

(2) 利用连续整数之积的性质：

① 任意两个连续整数之积必定是一个奇数与一个偶数之积，因此一定可被 2 整除.

② 任意三个连续整数之中至少有一个偶数且至少有一个是 3 的倍数，所以它们之积一定可以被 2 整除，也可被 3 整除，所以也可以被 $2 \times 3 = 6$ 整除.

这个性质可以推广到任意个整数连续之积.

例 一整数 a 若不能被 2 和 3 整除，则 $a^2 + 23$ 必能被 24 整除.

证明　$\because a^2 + 23 = (a^2 - 1) + 24$，只需证 $a^2 - 1$ 可以被 24 整除即可.

$\because$ 2 不能整除 a，$\therefore a$ 为奇数. 设 $a = 2k + 1$（k 为整数），

则　$a^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.

$\because k, k + 1$ 为二个连续整数，故 $k(k + 1)$ 必能被 2 整除，

$\therefore 8 \mid 4k(k + 1)$，即　$8 \mid (a^2 - 1)$.

又　$\because (a - 1), a, (a + 1)$ 为三个连续整数，其积必被 3 整除，即

$3 \mid a(a - 1)(a + 1) = a(a^2 - 1)$，

$\because$ 3 不能整除 a，$\therefore 3 \mid (a^2 - 1)$.

3 与 8 互质，$\therefore 24 \mid (a^2 - 1)$，即 $a^2 + 23$ 能被 24 整除.

(3) 其他方法：

整数 a 整除整数 b，即 b 含有因子 a. 这样，要证明 a 整除 b，运用公式和变形等方法从 b 中分解出因子 a 就成了一条极自然的思路.

例 设 a, b, c 为满足不等式 $1 < a < b < c$ 的整数，且 $(ab - 1)(bc - 1)(ca - 1)$ 能被 abc

整除,求所有可能数组(a,b,c).

解 $\because (ab-1)(bc-1)(ca-1)$

$$= a^2b^2c^2 - abc(a+b+c) + ab + ac + bc - 1, \quad ①$$

$\because abc \mid (ab-1)(bc-1)(ca-1)$,

$\therefore$ 存在正整数 k,使 $ab+ac+bc-1=kabc$. ②

$k=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{3}{a}\leqslant\frac{3}{2}$,

$\therefore k=1$.

若 $a\geqslant 3$,此时 $1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}$ 矛盾.

已知 $a>1$, $\therefore$ 只有 $a=2$.

当 $a=2$ 时,代入 ② 中得 $2b+2c-1=bc$,

即 $1=\frac{2}{b}+\frac{2}{c}-\frac{1}{bc}<\frac{2}{b}+\frac{2}{b}=\frac{4}{b}$.

$\therefore 0<b<4$,知 $b=3$,从而易得 $c=5$.

点评 在此例中通过对因数 k 的范围讨论,从而逐步确定 a,b,c 是一项重要解题技巧.

例7 (第 15 届江苏省竞赛题)已知 7 位数$\overline{1287xy6}$是 72 的倍数,求出所有的符合条件的 7 位数.

【分析】 7 位数$\overline{1287xy6}$能被 8,9 整除,运用整数能被 8,9 整除的性质求出 x,y 的值.

解 因为 $72 \mid \overline{1287xy6}$,所以 $8 \mid \overline{1287xy6}$, $9 \mid \overline{1287xy6}$,

由此得 $1+2+8+7+x+y+6=24+x+y$ 是 9 的倍数,

而 $0\leqslant x+y\leqslant 18$,则 $x+y=3$ 或 12,又$\overline{xy6}$必是 8 的倍数,$\overline{y6}$必是 4 的倍数,

则 $y=1,3,5,7$ 或 9,

当 $y=1$ 时,$x=2$,$8 \mid 216$;

当 $y=3$ 时,$x=0$,8 不整除 36;$8 \mid 936$;

当 $y=5$ 时,$x=7$,8 不整除 756;

当 $y=7$ 时,$x=5$,$8 \mid 576$;

当 $y=9$ 时,$x=3$,8 不整除 396,

所以符合条件的 7 位数是 1287216,1287576.

三、带余除法和利用余数分类

用一个整数 a 去除整数 b,且 $a>0$,则必有并且只有两个整数 q 与 r,使 $b=aq+r$,$0\leqslant r<a$. 这就是带余数除法的一般表达式. 当 $r\neq 0$ 时,记为 $a\nmid b$. b 不能被 a 整除,或者说,b 除以 a 有余数.

利用余数将自然数分类，在解决实际问题中有广泛应用. 我们说，任何一个自然数 b 被正整数 a 除时，余数只可能是 $0,1,2,\cdots,a-1$. 这样就可以把自然数分为 a 类. 例如，一个自然数被 4 除，余数只能是 0，1，2，3 中的一个. 因此，所有自然数按被 4 除时的余数分为四类，即 $4k$，$4k+1$，$4k+2$，$4k+3$，任何自然数都在这四类之中.

我们还关心带余除法中的另一个问题，即当两个整数 a，b 去除不为 0 的同一整数 n 时，余数相同，称为同余问题. 一般地，记为 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$. 记号“$\equiv$”读作“同余于”，“mod”读作“模”. 此式读作“a 同余于 b 模 n”或“a 与 b 对模 n 同余”.

例如：$32\equiv 7(\mathrm{mod}\ 5)$，是由于 32 与 7 分别被 5 除，余数都是 2，读作“32 与 7 对模 5 同余”.

在同余问题中，常用的性质有：

(1) 同一模的同余式可以相加，就是

如果　$a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\ n)$，$a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}\ n)$，

那么　$a_1+a_2\equiv b_1+b_2(\mathrm{mod}\ n)$.

(2) 同一模的同余式可以相乘，就是

如果　$a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\ n)$，$a_2\equiv b_2(\mathrm{mod}\ n)$，

那么　$a_1a_2\equiv b_1b_2(\mathrm{mod}\ n)$.

(3) 同余式双方可乘以同一整数，就是

如果　$a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，对于任何整数 k，那么 $ak\equiv bk(\mathrm{mod}\ n)$.

(4) 同余式双方可“约去”一个共同的因子（与模数互质的因数）. 就是

如果　$a\equiv b(\mathrm{mod}\ n)$，$a_1q=a$，$b_1q=b$，$q$ 与 n 互质，那么 $a_1\equiv b_1(\mathrm{mod}\ n)$.

例8　求 $13^{13}+14^{14}+15^{15}$ 被 13 除的余数.

【分析】 直接计算求余数非常困难. 因为 $13\mid 13^{13}$，所以只需算 $14^{14}+15^{15}$ 被 13 除的余数. 注意到 $14\div 13$ 余 1，$15\div 13$ 余 2，利用同余性质，问题可大大简化.

解　$\because$ 13^{13} 能被 13 整除，余数为 0.

而　$14\equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$，$15\equiv 2(\mathrm{mod}\ 13)$.

由同余性质(2)，得　$14^{14}\equiv 1^{14}\equiv 1(\mathrm{mod}\ 13)$，

$15^{15}\equiv 2^{15}\equiv 8(\mathrm{mod}\ 13)$.

由同余性质(1)，得　$13^{13}+14^{14}+15^{15}\equiv 0+1+8(\mathrm{mod}\ 13)$.

即　$13^{13}+14^{14}+15^{15}$ 被 13 除的余数为 9.

点评　利用同余式的性质求余数，使求余数的问题大大简化.

例8　求 $x(0\leqslant x<100)$，使 $x\equiv 14(\mathrm{mod}\ 15)$，且 $x\equiv 5(\mathrm{mod}\ 8)$.

【分析】 所求的 x 是不小于 0 且小于 100 的整数，x 满足被 15 去除余 14，被 8 去除余 5. 根据这两个条件，容易找出整数 x.

解　$\because$ $0\leqslant x<100$，满足 $x\equiv 14(\mathrm{mod}\ 15)$ 的整数有 14，29，44，59，74，89；

满足 $x \equiv 5 \pmod 8$ 的整数有 5,13,21,29,37,45,53,61,69,77,85,93.

则同时满足上述两个条件的只有 $x=29$.

点评 注意到满足条件的各个数,依次相差的就是“模数”,找出这些数以及同时满足两个条件的数,就不困难了.

例10 今有物,不知其数,三三数之,剩二;五五数之,剩三;七七数之,剩二,问物几何?

【分析】 本问题是有一个数,被 3 除余 2,被 5 除余 3,被 7 除余 2,求此数.利用带余除法表达式表示这个数,然后求出各除数 3,5,7 的最小公倍数 105,求出满足条件的最小整数.

解 设此物为 x,根据题意,得

$x=3a+2, x=5b+3, x=7c+2$.

$\because 3\times5\times7=105$,且 3,5,7 互质,所以最小公倍数为 105.

上三式变形为
$$\begin{cases}35x=105a+70, & ①\\ 21x=105b+63, & ②\\ 15x=105c+30. & ③\end{cases}$$

由 ②+③−①,得 $x=105(b+c-a)+23$.

取 $b+c-a=0$,则 $x=23$.

点评 这是我国古代一个典型的余数问题.这类问题通常是先求出各除数的最小公倍数,然后写出要求数的表达式.当该数是最小公倍数的倍数加上一个常数,就可取与最小公倍数相乘的这个数为 0;当该数是最小公倍数的倍数减去一个常数,可取这个乘数为 1.另外,$x=23$ 只不过是满足本例条件的最小正整数而已.

A 组

1. 把一个两位数 m,放在一个三位数 n 的前面组成一个五位数,可表示为 ( )

   A. mn B. $m+n$

   C. $10m+n$ D. $1000m+n$

2. 一个六位数 $\overline{a1988b}$ 能被 12 整除,这样的六位数共有 ( )

   A. 9 个 B. 12 个 C. 15 个 D. 20 个

3. 有棋子若干,三个三个地数余 1,五个五个地数余 3,七个七个地数余 5,则棋子至少有 ( )

   A. 208 个 B. 110 个 C. 103 个 D. 100 个

4. (“五羊杯”竞赛题)若 1059,1417,2312 分别被自然数 x 除时,所得的余数都是 y,则 $x-y$ 的值等于 ( )

   A. 15 B. 1 C. 164 D. 174

5. 在 2006 的中间放一个数字得到五位数 20□06,若此五位数能被 7 整除,则嵌入的数字□为________.

6. 把 100000 表示为两个整数的乘积,使其中没有一个是 10 的整倍数的表达式为________.

7. 如果五位数$\overline{12a34}$是 3 的倍数,那么 a 是________.

8. 军训基地购买苹果慰问学员,已知苹果总数用八进位制表示为$\overline{abc}$,七进位制表示为$\overline{cba}$,那么苹果的总数用十进位制表示为________.

9. (北京市竞赛题)一个自然数 N 被 10 除余 9,被 9 除余 8,被 8 除余 7,被 7 除余 6,被 6 除余 5,被 5 除余 4,被 3 除余 2,被 2 除余 1,则 N 的最小值是________.

10. 求使 $\sqrt{2000a}$为整数的最小自然数 a 的值.

11. 甲数为两位数,乙数为一位数,且甲数是乙数的 9 倍多 3. 现将乙数接于甲数的左边,那么所得的数比甲、乙两数的和的 9 倍少 5,求甲、乙两数.

12. x,y,z 均为整数,若 $11|(7x+2y-5z)$,求证:$11|(3x-7y+12z)$.

13. 求证:$7|\overline{abcabc}$.

14. (1) 若 a,b,c,d 是互不相等的整数,且整数 x 满足等式$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-9=0$,求证:$4\mid(a+b+c+d)$.

(2) 已知两个三位数$\overline{abc}$与$\overline{def}$的和$\overline{abc}+\overline{def}$能被 37 整除,求证:六位$\overline{abcdef}$也能被 37 整除.

15. 已知一个三位数,它的数码是顺序相继的三个数码,例如 123,456 等等,将数码反序排成一个新三位数,证明其中较大的三位数减去较小的三位数的差一定是 198.

B 组

16. 若数 $n=20\cdot30\cdot40\cdot50\cdot60\cdot70\cdot80\cdot90\cdot100\cdot110\cdot120\cdot130$,则不是 n 的因数的最小质数是 ( )

A. 19　　B. 17

C. 13　　D. 非上述答案

17. 可除尽 $3^{11}+5^{13}$ 的最小整数是 ( )

A. 2　B. 3　C. 5　D. $3^{11}+5^{13}$　E. 以上都不是

18. 今有自然数带余除法算式:$A\div B=C\cdots\cdots8$,如果 $A+B+C=2178$,那么 A 等于 ( )

A. 2000　B. 2001　C. 2071　D. 2100

19. 1997^{2000}被 7 除的余数是 ( )

A. 1　B. 2　C. 4　D. 6

20. n 为正整数,302 被 $n(n+1)$除所得商数 q 及余数 r 都是正值,则 r 的最大值与最小值的和 ( )

A. 148　B. 247　C. 93　D. 122

21. 一个自然数与 3 的和是 5 的倍数,与 3 的差是 6 的倍数,这样的自然数中最小的是________.

22. 在十进制中,各位数码是 0 或 1,并且能被 225 整除的最小自然数是________.

23. 求证:$n^3+\frac{3}{2}n^2+\frac{1}{2}n-1$ 对任何整数 n 都为整数,且用 3 除时余 2.

24. 两整数 a,b,a 除以 7 余 2,b 除以 7 余 5,当 $a^2>3b$ 时,求 a^2-3b 的差除以 7 的余数.

25. 求证:任何一个不小于 24 的自然数,都可以由若干个 5 和 7 相加而得.

26. 使 n^3+100 能被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值是多少?

27. 求 1273×465 的积,被 7 除的余数.

28. 已知 7 位自然数 $\overline{62xy427}$ 是 99 的倍数,求代数式 $950x+24y+1$ 的值.

29. 有一个英文单词由 5 个字母组成,如果将 26 个英文字母 $a,b,c,\cdots,y,z$ 按顺序依次对应 0 到 25 这 26 个整数,那么这个单词中的 5 个字母对应的整数按从左到右的顺序分别为 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5. 已知 $x_1+3x_2,4x_2,x_3+2x_4,5x_4,6x_4+x_5$ 除以 26 所得的余数分别为 15,6,20,9,9. 则该英文单词是________.

30. 重排任一个三位数三个数位上的数字,得到一个最大的数和一个最小的数,它们的差构成另一个三位数(允许百位数字为 0),再重复以上的过程,问重复 2006 次后所得的数是多少?证明你的结论.

第二讲 整数(二)

一、质数与合数的定义与性质

1. 质数与合数.

定义 1：一个大于 1 的整数 a,如果只有 1 和 a 这两个约数,那么 a 叫做质数.

定义 2：一个大于 1 的整数 a,如果除 1 和 a 这两个约数外,还有其他正约数,那么 a 叫做合数.

1 既不是质数也不是合数.

2. 质数与合数的有关性质.

(1) 质数有无数多个.

(2) 2 是惟一的既是质数,又是偶数的整数,即是惟一的偶质数. 大于 2 的质数必为奇数.

(3) 若质数 $p|a\cdot b$,则必有 $p|a$ 或 $p|b$.

(4) 若正整数 a、b 的积是质数 p,则必有 $a=p$ 或 $b=p$.

(5) 惟一分解定理：任何整数 $n(n>1)$ 可以惟一地分解为：$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$,其中 $p_1<p_2<\cdots<p_k$ 是质数,$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是正整数.

例1 (第 15 届江苏省竞赛题)已知三个不同的质数 a,b,c 满足 $ab^3c+a=2000$,那么 $a+b+c=$________.

【分析】 运用乘法分配律、算术基本定理,从因数分解入手,突破 a 的值.

解 由 $a(b^3c+1)=2^4\times5^3$,得 $a=2,b=3,c=37$. ∴ $a+b+c=42$.

例1 (第五届加拿大数学奥林匹克试题)如果 p 与 $p+2$ 都是大于 3 的质数,那么 6 是 $p+1$ 的因数.

【分析】 任何一个大于 3 的整数都可以表示成 $6n-2,6n-1,6n,6n+1,6n+2,6n+3$($n$ 是大于 0 的整数)中的一种,显然 $6n-2,6n,6n+2,6n+3$ 都是合数,所以大于 3 的质数均可以写成 $6n+1$ 或 $6n-1$ 的形式,问题即证明 p 不能写成 $6n+1$ 的形式.

解 因为 p 是大于 3 的质数,所以可设 $p=6n+1$(n 是大于 0 的整数),那么

$p+2=6n+1+2=6n+3=3(2n+1)$ 与 $p+2$ 是大于 3 的质数矛盾.

于是 $p\neq 6n+1$,所以 $p=6n-1$(n 是大于 0 的整数),从而 $p+1=6n$,即 6 是 $p+1$ 的因数.

点评 对大于 3 的整数合理分类是解决这个问题的关键. 对无限多个整数进行讨论时,将其转化为有限的几类是一种常用的处理方法.

例3 求证：$2^{2001}+3$ 是合数.

【分析】 $2^{2001}+3$ 不能分解，2^{2001} 次数又太高，无法计算. 我们可以探索 2^n 的末位数字出现的规律，从而得出 $2^{2001}+3$ 的末位数字，由此来证明 $2^{2001}+3$ 是合数.

证明 $\because 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, 2^7=128, 2^8=256, \cdots$

$\therefore 2^{4k+1}$ 的末位数字是 2，2^{4k+2} 的末位数字是 4，2^{4k+3} 的末位数字是 8，2^{4k+4} 的末位数字是 6（k 为非负整数）.

而 $2001=4\times250+1$，$\therefore 2^{2001}$ 的末位数字是 2，$\therefore 2^{2001}+3$ 的末位数字是 5，

$\therefore 5 \mid 2^{2001}+3$，显然 $2^{2001}+3\neq5$，所以 $2^{2001}+3$ 是合数.

点评 本题另辟蹊径，通过探索 2^n 的末位数字的规律来得出 $2^{2001}+3$ 的末位数字，从而证明 $2^{2001}+3$ 是合数. 解数学竞赛题，思路要开阔.

例4 已知质数 p，q 使得表达式 $\frac{2p+1}{q}$ 及 $\frac{2q-3}{p}$ 都是自然数，试确定 p^2q 的值.

解 先设 $p\geqslant q$，则有 $1\leqslant\frac{2q-3}{p}=2\times\frac{q}{p}-\frac{3}{p}<2$，于是只能 $\frac{2q-3}{p}=1$，即 $p=2q-3$，

而这时 $\frac{2p+1}{q}=\frac{4q-5}{q}=4-\frac{5}{q}$，要 $\frac{2p+1}{q}$ 为自然数，只能 $q=5$，从而 $p=7$，

再设 $p<q$，这时 $1\leqslant\frac{2p+1}{q}=2\times\frac{p}{q}+\frac{1}{q}<3$，于是我们有以下两种情况：

① $\frac{2p+1}{q}=1$，$q=2p+1$，此时 $\frac{2q-3}{p}=\frac{4p-1}{p}$，得 $p=1$，不合题意；

② $\frac{2p+1}{q}=2$，$2p+1=2q$，左边为奇数，右边为偶数，矛盾.

故 $p^2q=7^2\times5=245$.

二、完全平方数

完全平方数是指自然数范围内的平方数，如 $0=0^2$，$1=1^2$，$4=2^2$，$9=3^2$，…，完全平方数用 n^2 表示（n 是自然数）.

在自然数范围内，完全平方数有如下一些性质，可以作为判断完全平方数的依据.

(1) 平方数的约数个数只能是奇数；反之，一个正整数的约数个数是奇数，则这个正整数一定是完全平方数.

(2) 形如 $4k+2$ 或 $4k+3$ 的数，不是完全平方数. 即任何一个完全平方数必定是 4 的倍数，或被 4 除余 1 的数.

(3) 从完全平方数的末位数字看，只可能是 0，1，4，5，6，9 这 6 个数字；而个位数字是 2，3，7，8 的数，一定不是完全平方数. 这可以作为判断完全平方数的一种方法.

(4) 两个连续自然数的平方之间，没有完全平方数，即自然数 a 满足 $n^2<a<(n+1)^2$，则 a 不是完全平方数.

(5) 任何大于 4 的完全平方数,必可表示成两个自然数的平方差的形式.

例5 若 a 是正整数,说明 $a(a+1)$ 不是完全平方数.

【分析】 a^2 与 $(a+1)^2$ 是两个连续的正整数的平方数,只要说明 $a(a+1)$ 是介于 a^2 与 $(a+1)^2$ 之间的数即可.

解 $\because a^2 < a^2 + a < a^2 + 2a + 1$（$a$ 为正整数）,

即 $a^2 < a(a+1) < (a+1)^2$.

$\therefore a(a+1)$ 不是完全平方数.

点评 利用完全平方数的性质(3),来判断一个数是否为完全平方数,也是常用的一种判断方法.

例5 已知一个自然数的平方的十位数字是 7,求这个自然数的个位数字.

【分析】 设这个自然数 N 的末两位数为 $\overline{ab}$,那么 $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$.
知道 N^2 的十位数字为 7,就可求出个位数字.

解 设所求自然数为 N,十位数字为 a,个位数字为 b.

且 $(10a+b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2 = 100a^2 + 2ab \times 10 + b^2$.

$\because N^2$ 的十位数字为 7,而 $2ab$ 是偶数,所以 b^2 必进位,且所进位的数是奇数.

$\because$ 只有 $4^2 = 16, 6^2 = 36$,进到十位上的数才是奇数 1,3,$\therefore b$ 只能是 4 或 6.

点评 一个整数的平方数的末两位数字,只能由这个整数的末两位数字确定.因此,本例只关心该自然数的末两位数的末两位数字组成的数的平方.

三、奇数与偶数

整数中,能被 2 整除的数是偶数,反之是奇数,偶数可用 $2k$ 表示,奇数可用 $2k+1$ 表示,这里 k 是整数.

关于奇数和偶数,有下面的性质:

(1) 奇数不会同时是偶数;两个连续整数中必是一个奇数一个偶数;

(2) 奇数个奇数的和是奇数;偶数个奇数的和是偶数;任意多个偶数的和是偶数;

(3) 两个奇(偶)数的差是偶数;一个偶数与一个奇数的差是奇数;

(4) 若 a, b 为整数,则 $a+b$ 与 $a-b$ 有相同的奇偶性;

(5) n 个奇数的乘积是奇数,n 个偶数的乘积是 2^n 的倍数;若乘式中有一个是偶数,则乘积是偶数.

奇偶性是整数的固有属性,通过分析整数的奇偶性来解决问题的方法叫奇偶分析法.

例7 (1) 设 $1,2,3,\cdots,9$ 的任一排列为 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$.求证:$(a_1-1)\cdot(a_2-2)\cdot\cdots\cdot(a_9-9)$ 是一个偶数.

(2) 在数 $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, 5^5, \cdots, 2002^{2002}, 2003^{2003}$ 的前面任意放置“+”或“−”号,并顺次完成

所指出的运算,求出代数和,求证:这个代数和必定不等于 2003.

【分析】 (1) 转换角度考察问题,化积的奇偶性为和的奇偶性来研究;

(2) 由于任意添"+"号或"−"号,形式多样,因此不可能一一尝试再作解答,故选择从奇数、偶数的性质入手.

解 (1) 因为 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_9-9)$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_9)-(1+2+\cdots+9)=0,$$

故 $a_1-1,a_2-2,\cdots,a_9-9$ 这 9 个数不可能全为奇数,即这 9 个数中至少有一个为偶数,从而它们的积必为偶数.

(2) $1^1,2^2,3^3,\cdots,2002^{2002},2003^{2003}$ 的奇偶性依次与 $1,2,3,\cdots2002,2003$ 的奇偶性相同.因此,在 $1^1,2^2,3^3,\cdots,2002^{2002},2003^{2003}$ 的前面任意放置"+"或"−"的代数和的奇偶性与 $1+2+3+\cdots+2003$ 的奇偶性相同为偶数,而 2003 为奇数.故这个代数和必定不等于 2003.

例8 设 a,b 是自然数,且有关系式 $123456789=(11111+a)(11111-b)$,① 求证:$a-b$ 是 4 的倍数.

证明 由 ① 式可知 $11111(a-b)=ab+4\times617$. ②

$\because a>0,b>0,\therefore a-b>0$.

首先,易知 $a-b$ 是偶数,否则 $11111(a-b)$ 是奇数,从而知 ab 是奇数,进而知 a,b 都是奇数.可知$(11111+a)$ 及$(11111-b)$ 都为偶数,这与式 ① 矛盾.

其次,从 $a-b$ 是偶数,根据 ② 可知 ab 是偶数,进而易知 a,b 皆为偶数,从而 $ab+4\times617$ 是 4 的倍数,由 ② 知 $a-b$ 是 4 的倍数.

例9 书店有单价为 10 分,15 分,25 分,40 分的四种贺年卡,小华花了数枚壹圆钱,正好买了 30 张,其中某两种各 5 张,另两种各 10 张,问小华买贺年卡花去多少钱?

解 设买的贺年卡分别为 a,b,c,d(张),用去 k 枚壹圆的人民币,依题意有 $10a+15b+25c+40d=100k$,(k 为正整数),

即 $2a+3b+5c+8d=20k$,

显然 b,c 有相同的奇偶性.

若同为偶数,则 $b-c=0$ 即 $b=c=10$ 和 $a=b=5$,$k=\dfrac{13}{2}$不是整数;

若同为奇数,则 $b=c=5$ 和 $a=d=10$,$k=7$.

例9 (2001 年北京市竞赛题)在 6 张纸片的正面分别写上整数 1,2,3,4,5,6,打乱次序后,将纸片翻过来,在它们的反面也随意分别写上 1~6 这 6 个整数,然后计算每张纸片正面与反面所有数字之差的绝对值,得出 6 个数,请你证明:所得的 6 个数中至少有两个是相同的.

【分析】 从反面入手,即设这 6 个数两两都不相等,利用 $|a_i-b_i|$ 与 $a_i-b_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 的奇偶性相同,引入字母进行推理证明.

解 设 6 张卡片正面写的数是 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,反面写的数对应为 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,