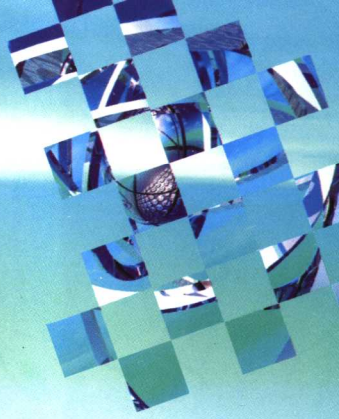
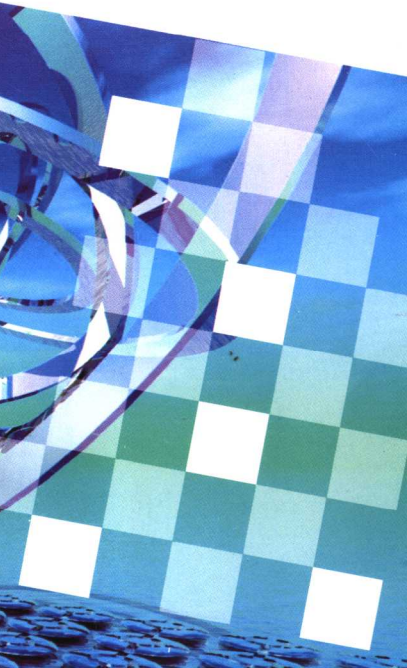




高等数学

练习与测试

南京工业大学应用数学系 编



苏州大学出版社

高等数学练习与测试

南京工业大学应用数学系 编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学练习与测试/南京工业大学应用数学系编.
苏州:苏州大学出版社,2007.7
面向 21 世纪高校教材
ISBN 978-7-81090-868-9

I. 高… II. 南… III. 高等数学-高等学校-习题
IV. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 096603 号

高等数学练习与测试
南京工业大学应用数学系 编
责任编辑 谢金海

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市干将东路 200 号 邮编:215021)
宜兴文化印刷厂印装
(地址:宜兴市南漕镇 邮编:214217)

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.5 字数 410 千
2007 年 7 月第 1 版 2007 年 7 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-81090-868-9 定价:21.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-67258835

前 言

要学好高等数学,总离不开解题,通过解题加深对所学课程内容的理解、灵活地掌握运算方法和提高自己的解题技巧,培养分析问题、解决问题的能力。因此如何帮助学生提高解题能力是当前高等数学课程教学改革的一项重要任务。

为了帮助学生更好地完成作业,也为了帮助学生比较系统地复习、巩固所学知识,我们组织部分教师针对《高等数学》课程的特点,编制了这本《高等数学练习与测试》。全书分“同步练习”“综合练习”“模拟测试”三个部分。其中“同步练习”包含各章学生应完成的作业(其中带“*”号的题为较难题,供学有余力的学生选做)以及本章自我测试题,起到一个检查督促的作用。“综合练习”则提供了大量习题,可帮助学生系统复习所学知识,提高解题能力。“模拟测试”提供了8套模拟试卷。对“同步练习”和“综合练习”提供了参考答案。

本书是在我系多年使用的讲义基础上形成的,是我系教师共同努力的结晶,前后参加编写的人员有施庆生、陈晓龙、许志成、朱耀亮、郭金吉、邓晓卫、周晓跃、张维荣、汤家凤、唐健、许丙胜、赵剑、王刚、马树建、杨赞、张国娟、张丽丽、张小平、鞠银等,最后由陈晓龙、施庆生负责统稿。

由于编者水平有限,书中的不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

编 者

2007年5月

目 录

第一部分 同步练习

第一章 函数、极限与连续	(1)
第二章 导数与微分	(14)
第三章 中值定理与导数的应用	(23)
第四章 不定积分	(38)
第五章 定积分	(49)
第六章 定积分的应用	(63)
第七章 向量代数与空间解析几何	(73)
第八章 多元函数微分学	(87)
第九章 重积分	(101)
第十章 曲线积分与曲面积分	(115)
第十一章 无穷级数	(130)
第十二章 微分方程	(143)

第二部分 综合练习

练习一	(158)
练习二	(159)
练习三	(160)
练习四	(161)
练习五	(163)
练习六	(164)
练习七	(166)
练习八	(167)
练习九	(169)
练习十	(170)

练习十一	(171)
练习十二	(172)
练习十三	(174)
练习十四	(175)
练习十五	(176)
练习十六	(177)
练习十七	(179)
练习十八	(180)
练习十九	(182)
练习二十	(183)
练习二十一	(184)
练习二十二	(186)
练习二十三	(187)
练习二十四	(188)

第三部分 模拟测试

测试卷一	(190)
测试卷二	(193)
测试卷三	(196)
测试卷四	(199)
测试卷五	(202)
测试卷六	(205)
测试卷七	(208)
测试卷八	(211)
参考答案	(214)

第一部分 同步练习

第一章 函数、极限与连续

练习 1-1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sin \sqrt{x}$;

(2) $y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x}$.

2. 设 $g(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$ 求 $g\left(\frac{\pi}{6}\right), g\left(\frac{\pi}{4}\right), g\left(-\frac{\pi}{4}\right), g(-2)$ 的值, 并作出函数

$y = g(x)$ 的图形.

3. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 问: $f(x+a) + f(x-a) (a > 0)$ 的定义域是什么?

4. 证明: 定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的任意函数可表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

5. 设 $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} (x > 0)$, 求 $f(x)$.

6. 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}, x \neq 1$, 试求复合函数: $f(f\{f[f(x)]\})$, 并指出 x 的取值范围.

7. 收音机每台售价为 90 元, 成本为 60 元, 厂方为鼓励销售商大量采购, 决定凡是订购量超过 100 台以上的, 每多订购 1 台, 售价就降低 1 分, 但最低价为每台 75 元. (1) 将每台的实际售价 p 表示为订购量 x 的函数; (2) 将厂方所获的利润 P 表示成订购量 x 的函数; (3) 某商行订购了 1000 台, 厂方可获利润多少?

练习 1-2—练习 1-3

1. 用数列极限定义证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2};$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1.$

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = |a|$. 并举例说明: 当数列 $\{|x_n|\}$ 有极限时, 数列 $\{x_n\}$ 的极限却不一定存在.

3. 用函数极限的定义证明:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} (5x+2) = 12;$

(2) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = -4;$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0.$

4. 求 $f(x) = \frac{x}{x}$, $g(x) = \frac{|x|}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 时的极限是否存在.

练习 1-4

1. 两个无穷小的商是否一定是无穷小? 试举例说明之.
2. 函数 $y = x \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界? 又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 这个函数是否为无穷大? 为什么?
3. (思考) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$, 则下面命题正确的是_____.
- ① 若 x_n 发散, 则 y_n 必发散;
 - ② 若 x_n 无界, 则 y_n 必无界;
 - ③ 若 x_n 有界, 则 y_n 必为无穷小;
 - ④ 若 $\frac{1}{x_n}$ 为无穷小, 则 y_n 必为无穷小.

练习 1-5

计算下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x - 3};$

(2) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h};$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right);$

(4) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right);$

(5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{5n^3};$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$

练习 1-6

1. 计算下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} \quad (x \text{ 为非零常数});$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{kx} \quad (k \text{ 为正整数});$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x.$$

2. 利用极限存在准则证明:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

练习 1-7

1. 证明: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{\sin 4x};$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1};$

(4) $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\sin^2 x - \sin^2 \alpha}{x - \alpha};$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\tan x}.$

练习 1-8

1. 指出下列函数在给定点属于哪类间断点,如果是可去间断点,补充或改变函数的定义使其连续:

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}, x=1, x=2;$$

$$(2) f(x) = \frac{x}{\tan x}, x=k\pi, x=k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1, \end{cases} \quad x=1.$$

2. 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ 的连续性,若有间断点,判断其类型.

练习 1-9

1. 求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \ln(2\cos 2x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x\sin x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x}); \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} (1+3\tan^2 x)^{\cot^2 x}.$$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ x+a, & x \geq 0, \end{cases}$ 欲使函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 数 a 应取何值?

3. 若 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - ax^2 - x + 4}{x+1} = L$ (有限数), 求 a, L .

院(系)_____ 班级_____ 学号_____ 姓名_____

练习 1-10

1. 证明: 方程 $x^5 - 3x = 1$ 至少有一根介于 1 和 2 之间.

2. 证明: 方程 $x = a \sin x + b$ (其中 $a > 0, b > 0$) 至少有一个正根, 并且它不超过 $a + b$.

3. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 则在 $[x_1, x_n]$ 上必有一点 ξ , 使

$$f(\xi) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}.$$

4. 证明: 方程 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

自我测试一

一、填空题(5分×2=10分)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{4x+1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

二、选择题(5分×2=10分)

1. $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x < 1, \\ 2x, & x \geq 1, \end{cases}$ 则 $x=1$ 是 $f(x)$ 的 ()

(A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 无穷间断点

2. 当 $x \rightarrow 1$ 时, 函数 $f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}$ 的极限是 ()

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $-\frac{\pi}{2}$ (C) 0 (D) 不存在

三、综合题

1. 求下列极限(10分×2=20分):

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x);$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}.$

2. (12分) 已知 $f\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, 求 $f(x)$.