卫生部"十一五"规划教材 全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校医学成人学历教育（专科）配套教材

供药学专业用

高等数学
学习指导与习题集

主 编 陈铁生

人民卫生出版社

卫生部“十一五”规划教材
全国高等医药教材建设研究会规划教材
全国高等学校医学成人学历教育(专科)配套教材
供药学专业用

高等数学
学习指导与习题集

主 编 陈铁生

编 者(以姓氏笔画为序)

卢书成(牡丹江医学院) 李国荣(大连医科大学)
刘早清(华中科技大学数学系) 张喜红(长治医学院)
刘启贵(大连医科大学) 陈铁生(郑州大学数学系)
刘国良(赣南医学院) 赵可琴(郑州大学数学系)
李文华(郑州大学数学系) 彭友霖(赣南医学院)

人民卫生出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导与习题集/陈铁生主编. —北京:人民卫生出版社,2007.7

ISBN 978-7-117-08841-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学 - 成人教育:高等教育 - 习题 Ⅳ. O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 089742 号

高等数学学习指导与习题集

主　　编: 陈铁生
出版发行: 人民卫生出版社(中继线 010-67616688)
地　　址: 北京市丰台区方庄芳群园 3 区 3 号楼
邮　　编: 100078
网　　址: http://www.pmph.com
E - mail: pmph @ pmph.com
购书热线: 010-67605754　010-65264830
印　　刷: 北京蓝迪彩色印务有限公司
经　　销: 新华书店
开　　本: 787×1092　1/16　　**印张:** 9
字　　数: 205 千字
版　　次: 2007 年 7 月第 1 版　2007 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
标准书号: ISBN 978-7-117-08841-1/R·8842
定　　价: 14.00 元

前　　言

本书为卫生部“十一五”规划教材、全国高等学校医学成人学历教育（专科）《高等数学》（第2版）的配套教材。

高等数学是高等学校药学专业的一门重要的基础理论课，学生对该课程的掌握程度，不仅直接影响到后续课程的学习，而且对以后的工作也会有帮助，同时高等数学还是专升本入学考试的重要课程。为此，我们根据教学大纲的要求，编写了这本《高等数学学习指导与习题集》。本书与教材同步使用，希望本书能帮助学生加深对高等数学基本内容的理解，掌握解题的方法、技巧，巩固教学内容，提高分析问题，解决问题的能力。

本书包括了教材的各章内容，每章都先给出本章的主要内容，帮助学生对该章的内容进行复习、归纳；又给出了本章疑难解析，目的是为学生释疑解惑，澄清误解，更加准确地理解和掌握基本概念。典型例题进行分析，总结，归纳了各类门题的解题方法，提高读者解题能力。最后给出了教材习题的全部或部分解答。

本书的编写始终得到卫生部教材办公室和编者所在院校领导的关心和支持，特此一并表示衷心的感谢，敬请使用本书的师生及广大读者不吝赐教。

陈铁生

2007年5月

目　　录

第一章　函数与极限 …… 1
一、基本要求 …… 1
二、内容提要 …… 1
（一）函数的概念 …… 1
（二）反函数 …… 2
（三）分段函数 …… 2
（四）基本初等函数 …… 2
（五）复合函数 …… 2
（六）初等函数 …… 3
（七）函数的极限 …… 3
（八）无穷小量与无穷大量 …… 3
（九）极限的四则运算 …… 4
（十）两个重要极限 …… 4
（十一）连续函数的概念 …… 4
（十二）函数的间断点 …… 5
（十三）初等函数的连续性 …… 5
（十四）闭区间上连续函数的性质 …… 5
三、疑难解析 …… 5
四、典型例题 …… 7
五、习题解答 …… 10

第二章　导数与微分 …… 16
一、基本要求 …… 16
二、内容提要 …… 16
（一）导数 …… 16
（二）导数的应用 …… 18
（三）微分 …… 20
三、疑难解析 …… 20
四、典型例题 …… 21
五、习题解答 …… 31

第三章 不定积分 …… 46
一、基本要求 …… 46
二、内容提要 …… 46
（一）原函数与不定积分的概念 …… 46
（二）不定积分的性质 …… 46
（三）求不定积分的基本方法 …… 47
三、疑难解析 …… 47
四、典型例题 …… 48
五、习题解答 …… 54

第四章 定积分及其应用 …… 63
一、基本要求 …… 63
二、内容提要 …… 63
（一）定积分的概念及性质 …… 63
（二）变上限定积分 …… 64
（三）定积分的计算 …… 64
（四）广义积分 …… 64
（五）定积分的几何应用 …… 65
（六）定积分的物理应用 …… 65
三、疑难解析 …… 65
（一）定积分的概念 …… 65
（二）应用牛顿-莱布尼兹公式计算定积分时应注意的问题 …… 66
（三）定积分的换元积分法 …… 67
（四）广义积分中的敛散性和计算 …… 68
四、典型例题 …… 68
五、习题解答 …… 74

第五章 微分方程基础 …… 81
一、基本要求 …… 81
二、内容提要 …… 81
（一）基本概念 …… 81
（二）可分离变量的微分方程 …… 81
（三）一阶线性微分方程 …… 82
（四）可降阶的高阶微分方程 …… 82
（五）二阶常系数线性齐次微分方程 …… 83
（六）拉普拉斯变换 …… 83
（七）微分方程在医学中的应用 …… 83
三、疑难解析 …… 83
四、典型例题 …… 84

五、习题解答 …… 86

第六章　概率论基础 …… 94
一、基本要求 …… 94
二、内容提要 …… 94
（一）排列与组合 …… 94
（二）随机事件及其运算 …… 94
（三）概率的定义 …… 95
（四）概率计算的基本公式 …… 96
（五）随机变量及其分布 …… 96
（六）随机变量的数字特征 …… 98
（七）大数定律与中心极限定理 …… 99
三、疑难解析 …… 100
四、典型例题 …… 101
五、习题解答 …… 104

第七章　数理统计初步 …… 117
一、基本要求 …… 117
二、内容提要 …… 117
（一）基本概念 …… 117
（二）基本公式 …… 117
三、习题解答 …… 118

模拟试题 …… 129
模拟试题一 …… 129
模拟试题二 …… 130

参考答案 …… 133

参考书目 …… 136

第一章 函数与极限

一、基本要求

1. 掌握基本初等函数的定义及其图像、定义域及简单性质；掌握极限四则运算法则，两个重要极限应用。

2. 理解函数的概念、函数极限的概念；理解复合函数、初等函数概念。

3. 了解无穷小量及其比较；了解初等函数的连续性及闭区间上连续函数的性质，会求函数的间断点并判定其类型。

二、内容提要

（一）函数的概念

1. 函数的定义　设 x 和 y 是两个变量，如果变量 x 在其变化范围内任意取定一个数值，变量 y 按照一定的规律总有确定的数值与它对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

称 x 为自变量，y 为因变量。自变量 x 的变化范围称为这个函数的定义域。如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一个点，则与 x_0 对应的函数值记作 $f(x_0)$，所有函数值的集合称为这个函数的值域。

2. 函数的基本性质

（1）函数的有界性：对函数 $f(x)$ 的定义域内的一切 x，若存在正数 M，使函数值都有

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称函数 $f(x)$ 在定义域内有界，如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在定义域内无界。

（2）函数的单调性：如果函数 $f(x)$ 对区间 (a,b) 内任意两点 x_1、x_2，且 $x_1<x_2$ 时有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或} f(x_1)>f(x_2))$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内单调增加（或单调减少）。

单调增加或单调减少的函数统称为单调函数。

（3）函数的奇偶性：对函数 $f(x)$ 的定义域内的一切 x，恒有 $f(x)=f(-x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；如果对函数 $f(x)$ 的定义域内的一切 x，恒有 $f(x)=-f(-x)$，则称 $f(x)$

为奇函数。

偶函数$f(x)$的图像关于y轴对称;奇函数$f(x)$的图像关于坐标原点对称。

(4) 函数的周期性:对函数$f(x)$的定义域内的一切x,如果存在一个与x无关的数$T\neq0$,使$f(x+T)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,T称为$f(x)$的周期,通常把满足关系式$f(x+T)=f(x)$的最小正数称为函数$f(x)$的周期。

(二) 反函数

在函数$y=f(x)$中,x是自变量,y是因变量,如果从方程$y=f(x)$中把x解出来,得$x=\varphi(y)$,这时把y看成自变量,x看成因变量,我们就说:$y=f(x)$和$x=\varphi(y)$互为反函数。习惯上,自变量用x来表示,函数用y来表示。因此常把$y=f(x)$的反函数$x=\varphi(y)$中的自变量y改记为x,因变量x改记为y。

(三) 分段函数

用解析式表示函数时,有时需要在不同的范围中用不同的式子来表示一个函数,这样的函数叫做分段函数。例如

$$y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant1\\ x+a & x>1\end{cases}$$

是确定在区间$[0,+\infty)$上的一个函数(必须注意,不是两个函数,而是一个函数),当自变量x取闭区间$[0,1]$上的数值时,对应的函数值y由公式$y=2\sqrt{x}$确定;当x取区间$(1,+\infty)$内的数值时。y由公式$y=x+a$确定。

(四) 基本初等函数

1. 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ为实数),$(0<x<+\infty)$。
2. 指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1,-\infty<x<+\infty)$。
3. 对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1,0<x<+\infty)$。
4. 三角函数

(1) 正弦函数:$y=\sin x(-\infty<x<+\infty)$。

(2) 余弦函数:$y=\cos x(-\infty<x<+\infty)$。

正弦函数、余弦函数均是以2π为周期的周期函数,值域为$[-1,1]$。

(3) 正切函数:$y=\tan x\left(x\neq\left(k+\dfrac{1}{2}\right)\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots\right)$。

(4) 余切函数:$y=\cot x(x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$。

正切函数、余切函数均是以π为周期的周期函数。

5. 反三角函数

(1) 反正弦函数:$y=\arcsin x\left(-1\leqslant x\leqslant1,-\dfrac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$。

(2) 反余弦函数:$y=\arccos x(-1\leqslant x\leqslant1,0\leqslant y\leqslant\pi)$。

(3) 反正切函数:$y=\arctan x\left(-\infty<x<+\infty,-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$。

(4) 反余切函数:$y=\operatorname{arccot}x(-\infty<x<+\infty,0<y<\pi)$。

(五) 复合函数

如果y是u的函数:$y=f(u)$,而u又是x的函数:$u=\varphi(x)$,且$\varphi(x)$的函数值的全

部或部分使$f(u)$有意义,那么,y通过u的联系也是x的函数。称后一个函数是由函数$y=f(u)$及$u=\varphi(x)$复合而成的函数,简称为复合函数,记作$y=f[\varphi(x)]$,其中u称为中间变量。

(六) 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算,以及有限次的复合所构成的由一个解析式表示的函数,叫做初等函数。

(七) 函数的极限

1. $x\to\infty$时函数的极限　当自变量x的绝对值无限增大时,如果函数$f(x)$无限趋近于一个常数A,就说当x趋向无穷大时,函数$f(x)$的极限是A,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to\infty)$$

若自变量取正值(或负值)沿x轴正方向无限增大(或沿x轴负方向绝对值无限增大)时,函数$f(x)$无限趋近一个常数A。则称A为函数$f(x)$的单侧极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to+\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to-\infty)$$

2. $x\to x_0$时函数的极限　设函数$f(x)$在点x_0的某个邻域内有定义(点x_0可以除外),如果当x无限趋近于x_0,即$x\to x_0(x\neq x_0)$时,对应的函数值$f(x)$无限趋近于一个确定的常数A,那么就说A是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(x\to x_0)$$

3. 左极限　当x从左侧趋近于x_0时,若函数$f(x)$趋近于一个常数A,则A就称为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0-0)=A$$

4. 右极限　当x从右侧趋近于x_0时,若函数$f(x)$趋近于一个常数A,则A就称为函数$f(x)$为$x\to x_0$时的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A$$

(八) 无穷小量与无穷大量

1. 无穷小量　在自变量的某种变化过程中,若函数$f(x)$的极限为零,则称函数$f(x)$为该变化过程中的无穷小量,简称无穷小。

无穷小量具有如下性质:

(1) 有限个无穷小量的代数和或积仍是无穷小。

(2) 常数(或有界变量)与无穷小的积仍是无穷小。

2. 无穷大量　如果当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时,对应的函数值$f(x)$的绝对值$|f(x)|$无限增大,就说函数$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时为无穷大量。

关于无穷小量与无穷大量的几点说明:

(1) 无穷小与无穷大都是变量,而不是常量。所以不能把某个很小的数(零除外)说成是无穷小;也不能把很大的数,说成是无穷大。

(2) 说一个函数是无穷小或无穷大时必须指明自变量的变化趋势。

3. 无穷小量与无穷大量之间的关系　在自变量的同一变化过程中,如果$f(x)$为无

穷大,那么$\frac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$是无穷小,且$f(x)\neq 0$,那么$\frac{1}{f(x)}$是无穷大。

4. 无穷小的阶 设α和β是当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小($\alpha\neq 0,\beta\neq 0$),并将α当作比较的单位(叫做基本无穷小)。

(1) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,就说$\beta$是比$\alpha$较高阶的无穷小,记为$\beta=o(\alpha)$。

(2) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,就说$\beta$是比$\alpha$较低阶的无穷小。

(3) 如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$,就说$\beta$与$\alpha$是同阶无穷小。

特别,如果$c=1$,即$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小,记为$\alpha\sim\beta$。

(九) 极限的四则运算

设函数$f(x)$、$g(x)$在自变量同一变化过程中,如果$\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

(3) 当$B\neq 0$时,$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$

(十) 两个重要极限

重要极限1:$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

重要极限2:$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=e$

(十一) 连续函数的概念

1. 函数的连续性定义

(1) 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义,如果当$\Delta x=x-x_0$趋于零时,对应的$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$也趋于零,即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$。那么就称函数$y=f(x)$在点$x_0$连续。

(2) 设函数$y=f(x)$在点x_0的某一邻域内有定义,如果函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限存在且等于它在点x_0处的函数值$f(x_0)$,即

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

那么就称函数$f(x)$在点x_0连续。

2. 函数的左连续与右连续 如果$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$存在且等于$f(x_0)$,即$f(x_0-0)=f(x_0)$,就说函数$f(x)$在点$x_0$左连续;

如果$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0+0)$存在且等于$f(x_0)$,即$f(x_0+0)=f(x_0)$,就说函数$f(x)$在点$x_0$右连续。

3. 函数的连续区间

(1) 如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内每一点都连续,则称函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续。

(2) 如果函数$f(x)$在开区间(a,b)内连续，且在点 a 处右连续，在点 b 处左连续，则称函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续。

(十二) 函数的间断点

如果函数$f(x)$在点 x_0 不连续，则称点 x_0 为函数$f(x)$的间断点。由函数$f(x)$在 x_0 处连续的定义，如下列三个条件之一成立，就称点 x_0 是函数$f(x)$的间断点：

(1) $f(x)$在点 x_0 附近有定义，但在 x_0 点没有定义；

(2) 虽在 x_0 点有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在；

(3) 虽在 x_0 点有定义，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$。

(十三) 初等函数的连续性

1. 连续函数的和、差、积、商　若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $x=x_0$ 点连续，则函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$ 及$\dfrac{f(x)}{g(x)}$$(g(x_0)\neq 0)$在 $x=x_0$ 点连续。

2. 反函数的连续性　若函数 $y=f(x)$ 在某区间上单值、单调增加(或单调减少)且连续，则它的反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应区间上也单值、单调增加(或单调减少)且连续。

3. 复合函数的连续性　设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，而函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续。

4. 初等函数的连续性　一切初等函数在其定义区间内都是连续的。

(十四) 闭区间上连续函数的性质

1. 最大值与最小值定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上一定有最大值和最小值。

2. 介值定理　设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则对介于$f(a)$和$f(b)$ $(f(a)\neq f(b))$之间的任何值 c，在开区间(a,b)内至少存在一点 ξ，使

$$f(\xi)=c \qquad (a<\xi<b)$$

3. 根的存在定理　设函数$f(x)$是闭区间$[a,b]$上的连续函数，如果$f(a)$，$f(b)$符号相反，那么在开区间(a,b)内至少有一点 ξ，使

$$f(\xi)=0 \qquad (a<\xi<b)$$

三、疑 难 解 析

1. 有界函数与无穷小的乘积是无穷小，能否就说：有界函数与无穷大的乘积是无穷大？

答　无极限也非无穷大。

如，$f(x)=x\sin x$，当 $x\to+\infty$ 时，无极限也非无穷大。

取 $x_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}$，当 $x_n\to+\infty$ 时，有

$$\lim_{x_n\to\infty}f(x_n)=+\infty$$

又取 $x_n=2n\pi$，当 $x_n\to+\infty$ 时，有

$$\lim_{x_n\to\infty}f(x_n)=0$$

2. 下列运算是否正确？如有错，应如何改正。

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$

$=0+0+\cdots\cdots+0=0$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

答 不正确,应改为

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\cdots\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$

因为$\lim\limits_{x\to0}x=0$, $\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant1$, $\sin\frac{1}{x}$为有界函数,

所以$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0$

3. 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,而$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在,试问$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$存在吗?

答 不一定。

4. 根据连续函数求极限法则,有

$$\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1$$

既然 $x=0$ 是函数 $\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$的间断点,为什么符号 ln 与$\lim\limits_{x\to0}$可交换?

答 因为 $\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$是由函数 $y=\ln u$ 和 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$复合而成的,虽然 $x=0$ 是函数 $\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$的间断点,但极限存在$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$,而对数函数 $y=\ln u$ 在 $u=e$ 处连续。对于复合函数,若$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0$,而函数$f(u)$在$u_0$点连续,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)]$。

所以有 $\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln[\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\ln e=1$

5. 可去间断点与连续点有无区别,为什么?

答 有区别。

(1) 函数 $y=f(x)$在 x_0 点连续,有

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

(2) x_0 是函数 $y=f(x)$的可去间断点,有

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$$

补充定义,令$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$,则函数 $y=f(x)$在 x_0 点连续。

四、典型例题

例 1 求函数 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域。

解 这个函数是两个函数 $y_1=\lg(x-1)$，$y_2=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的和。由对数的定义，应有真数 $x-1>0$；要使 $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 有意义，应有 $x+1>0$，即

$$\begin{cases}x-1>0\\x+1>0\end{cases},\quad 得\begin{cases}x>1\\x>-1\end{cases}$$

所以函数 $y=\lg(x-1)+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域为 $(1,+\infty)$。

例 2 设函数 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，试求函数 $f(x+a)+f(x-a)\ (a>0)$ 的定义域。

解 求 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域，即需求解同时满足下列不等式组的解

$$\begin{cases}0<x+a<1\\0<x-a<1\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}-a<x<1-a\\a<x<1+a\end{cases}$$

因为 $a>0$，所以 x 取值范围是 $a<x<1-a$。

下面讨论 a 的允许值：

(1) 当 $a<1-a$ 时，即 $a<\frac{1}{2}$，函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为 $(a,1-a)$；

(2) 当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，不等式 $a<x<1-a$ 不成立，函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为空集。

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^x & x<1\\x & x\geqslant1\end{cases}$，$\varphi(x)=\begin{cases}x+2 & x<0\\x^2-1 & x\geqslant0\end{cases}$，求 $f[\varphi(x)]$。

解 $f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{\varphi(x)} & \varphi(x)<1\\\varphi(x) & \varphi(x)\geqslant1\end{cases}$

(1) 当 $\varphi(x)<1$ 时：

① $x<0$，$\varphi(x)=x+2<1$，即 $\begin{cases}x<0\\x<-1\end{cases}$，得 $x<-1$

② $x\geqslant0$，$\varphi(x)=x^2-1<1$，即 $\begin{cases}x\geqslant0\\x^2<2\end{cases}$，得 $0\leqslant x<\sqrt{2}$

(2) 当 $\varphi(x)\geqslant1$ 时：

① $x<0$，$\varphi(x)=x+2\geqslant1$，即 $\begin{cases}x<0\\x\geqslant-1\end{cases}$，得 $-1\leqslant x<0$

② $x\geqslant0$，$\varphi(x)=x^2-1\geqslant1$，即 $\begin{cases}x\geqslant0\\x^2\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$，得 $x\geqslant\sqrt{2}$

所以

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}e^{x+2} & x<-1\\ x+2 & -1\leqslant x<0\\ e^{x^2-1} & 0\leqslant x<\sqrt{2}\\ x^2-1 & x\geqslant\sqrt{2}\end{cases}$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}$

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+4}-2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+4}-2)(\sqrt{x^2+4}+2)(\sqrt{x^2+1}+1)}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x^2+4}+2)}{(\sqrt{x^2+1}+1)}=\frac{4}{2}=2$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}\right)|x|}$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}\right)x}=1$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+1}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+1}\right)(-x)}=-1$$

所以原极限不存在。

例 6 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$。

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\tan x-1-\sin x}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$=1\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

例 7 求$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}$

解 $\cos x-\sin x+1=(1+\cos x)-\sin x=2\cos^2\dfrac{x}{2}-2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

$$=2\cos x\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

$$\cos x+\sin x-1=\sin x-(1-\cos x)=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\sin^2\frac{x}{2}$$

$$=2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$$

所以$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x+1}{\cos x+\sin x-1}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cot\frac{x}{2}=1$

例 8 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2(x+1)}{2x+1}}=e$

例 9 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x} & x>0\\ 0 & x=0\\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & -1\leqslant x<0\end{cases}$$

试研究函数$f(x)$在点$x=0$处的连续性。

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=1$

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1\neq f(0)=0$,故$x=0$是函数$f(x)$的可去间断点。若令$f(0)=1$,则函数$f(x)$在定义域$[-1,+\infty)$内连续。

例 10 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x}{x+2} & x\geqslant0\\ \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}(a>0) & x<0\end{cases}$$

(1) 当a为何值时,$x=0$是函数$f(x)$的连续点?

(2) 当a为何值时,$x=0$是函数$f(x)$的间断点?属于哪种类型?

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos x}{x+2}=\frac{1}{2}$,

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

所以当$a=1$时,$x=0$是函数$f(x)$的连续点。

(2) 当$a\neq1(a>0)$时,因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$及$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$都存在,但不相等,所以$x=0$是函

数$f(x)$的第一类跳跃间断点。

例 11 已知下列极限,确定常数 a 与 b

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+ax^2+b}{x-2}=8$$

解 由已知极限值为常数 8,并且当 $x\to 2$ 时极限式的分母为无穷小,所以分子必是分母的同阶无穷小,因此可选择系数,使

$$x^3+ax^2+b=(x-2)\left[x^2+(a+2)x-\frac{b}{2}\right]$$

且当 $x\to 2$ 时,满足

$$\begin{cases}2^3+2^2\cdot a+b=0\\ 2^2+2(a+2)-\dfrac{b}{2}=8\end{cases}\quad 即\begin{cases}4a+b=-8\\4a-b=0\end{cases}$$

得 $a=-1,b=-4$。

例 12 已知下列极限,确定常数 a 与 b。

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=1。$$

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0,\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=1$,

所以$\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{x+a}+b)=0$,由此$\sqrt{1+a}+b=0$,即 $b=-\sqrt{1+a}$,

从而$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+a}+b}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+a}-\sqrt{1+a}}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{1+a})}=1$

即得 $a=-\dfrac{15}{16},b=-\dfrac{1}{4}$。

例 13 证明方程 $x^5-3x=1$ 在$(1,2)$内至少有一个实根。

证明 令$f(x)=x^5-3x-1$,显然$f(x)$在$[1,2]$上连续,又$f(1)=-3<0,f(2)=25>0$,由根的存在定理知,在$(1,2)$内至少有$f(x)$的一个根,即 $x^5-3x=1$ 的一个实根。

五、习 题 解 答

1. 设函数$f(x)=\sqrt{4+x^2}$,求下列函数值$f(0),f(1),f\left(\dfrac{1}{a}\right)$。

解 $f(0)=\sqrt{4+0^2}=2;f(1)=\sqrt{4+1^2}=\sqrt{5};f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\sqrt{4+\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{4a^2+1}}{|a|}$。

2. 设函数$f(x)=\begin{cases}x^2, & -1<x\leqslant 0\\ 1, & 0<x<1\end{cases}$,求$f\left(-\dfrac{1}{2}\right),f(0),f\left(\dfrac{1}{2}\right),f(a)(|a|<1)$。

解 $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4};f(0)=0^2=0;$