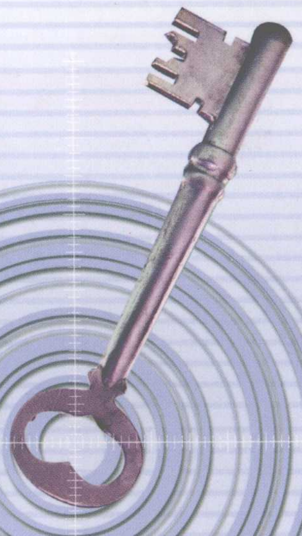
21世纪全国高职高专规划教材

高等数学
学习指导

本书与21世纪全国高职高专规划教材《高等数学》上、下册配套使用

GAODENG SHUXUE XUEXI ZHIDAO

刘连福　许文林　主编



中国农业出版社

21世纪全国高职高专规划教材

高等数学学习指导

本书与21世纪全国高职高专规划教材
《高等数学》上、下册配套使用

刘连福　许文林　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导 /刘连福，许文林主编. —北京：中国农业出版社，2006.8

21 世纪全国高职高专规划教材

ISBN 7-109-10648-9

Ⅰ.高… Ⅱ.①刘…②许… Ⅲ.高等数学-高等学校：技术学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 089251 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

出版人：傅玉祥

责任编辑 薛 波

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm 1/16 印张：14

字数：246 千字

定价：18.80 元

前 言

本书是21世纪全国高职高专规划教材《高等数学》上、下册的配套辅助教材.

本教材按教学要求设置了五个板块：(1) 学习要求；(2) 重点知识学习导航图；(3) 典型例题解析；(4) 教材典型习题与难题解答；(5) 测试题及其参考答案. 在编写过程中，我们始终注意把握以下几点：

1. 通过每章重点知识学习导航图，帮助学生把握重点知识，理解知识间整体结构.

2. 典型例题与测试题的选取，力求深浅适度，强调知识覆盖面，无论从题型、题量，还是从难易程度等方面都能恰当地反映当前高职院校高等数学教学基本要求，同时兼顾了高职各专业后续课程教学对数学知识的要求，实现了对后续教学和学生可持续发展（继续教育）的一个恰到好处的结合.

3. 在帮助学生系统掌握相关数学知识的同时，更注重对学生获取知识和提高思维能力的培养.

《高等数学学习指导》由大连水产学院职业技术学院刘连福、广西农业职业技术学院许文林任主编，乔建法、尹丽芸任副主编. 具体编写人员和编写分工如下：何涛编写第一章，龚亚英编写第二章，张金梅编写第三章，杨亚男编写第四章，王福胜编写第五章，康铁仁编写第六章，乔建法编写第七章，尹丽芸编写第九章，刘亚编写第十章，王秀艳编写第十一、十五章，牟科盟编写第十二章，冯丽编写第十三章，郭随兰编写第十四章，第八章和第十六章略. 全书结构框架及统稿由刘连福完成，大连水产学院职业技术学院石业娇任主审，范庆珍、杨俊平参加了审稿与定稿工作，在此谨致谢意.

尽管我们在本套教材的特色建设方面做出了许多努力，但由于我们水平有限，书中仍难免有不妥之处，希望各教学单位和读者在使用本套教材的过程中继续给予关注，并将意见及时反馈给我们，以便修订时改进.

编 者

2006年6月

目　录

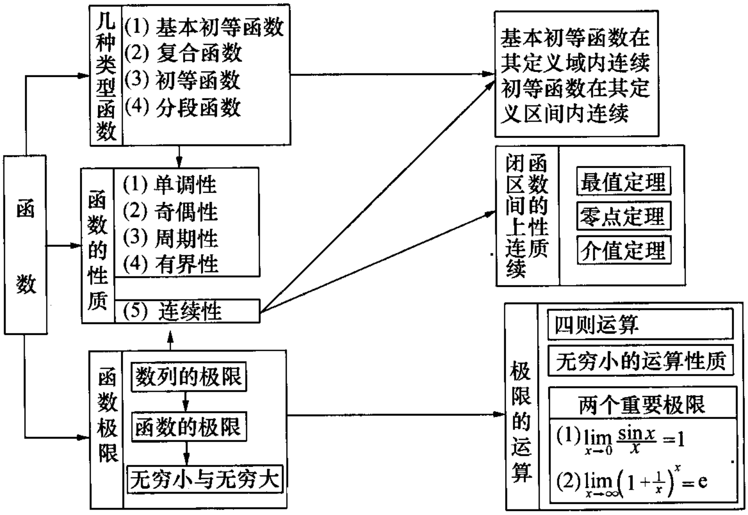
第一章

函数、极限与连续

一、学习要求

1. 理解复合函数的定义，掌握复合函数的分解.
2. 掌握极限的定义，熟记极限的运算法则.
3. 掌握两个重要极限.
4. 会运用极限的运算法则及两个重要极限求函数极限.
5. 理解无穷小量与无穷大量的定义.
6. 理解函数连续性的定义，会判断函数在点 x_0 处的连续性.
7. 掌握闭区间上连续函数的性质.

二、重点知识学习导航图



三、典型例题解析

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求复合函数 $f[f(x)]$.

分析 把函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$的对应关系用括号表示为 $f(\quad)=\dfrac{1-(\quad)}{1+(\quad)}$，在括号内填上中间变量 $f(x)$，即得所求复合函数 $f[f(x)]$.

解 $f[f(x)]=\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}=\dfrac{1-\dfrac{1-x}{1+x}}{1+\dfrac{1-x}{1+x}}=x$

例 2 写出复合函数 $y=\sin^4 5x$ 的复合过程.

分析 这个复合函数中最后的数学运算是表达式 $\sin 5x$ 作底求幂运算，因而令中间变量 $u=\sin 5x$，所以复合函数 $y=\sin^4 5x$ 分解为 $y=u^4$ 与 $u=\sin 5x$，但函数 $u=\sin 5x$ 仍为复合函数，这个复合函数中最后的数学运算是表达式 $5x$ 作为角度求正弦运算，再令中间变量 $v=5x$，继续将复合函数 $u=\sin 5x$ 分解为 $u=\sin v$ 与 $v=5x$.

解 函数 $y=\sin^4 5x$ 是由 $y=u^4$，$u=\sin v$，$v=5x$ 复合成的.

例 3 已知分段函数

$$f(x)=\begin{cases}3^x+1, & x<0\\ 3x+2, & x>0\end{cases}$$

讨论左极限、右极限及极限.

分析 $x\to 0^-$意味着点 x 从原点的左侧无限趋近于原点，从而在 $x\to 0^-$ 的过程中，恒有 $x<0$，这时 $f(x)=3^x+1$；$x\to 0^+$意味着点 x 从原点的右侧无限趋近于原点，从而在 $x\to 0^+$ 的过程中，恒有 $x>0$，这时 $f(x)=3x+2$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(3^x+1)=2$

$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x+2)=2$

由于左极限与右极限相等，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=2$.

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^{20}(3n+1)^{30}}{(5n+1)^{50}}$.

分析 分子 $(2n+1)^{20}(3n+1)^{30}=(2^{20}n^{20}+\cdots+1)(3^{30}n^{30}+\cdots+1)=2^{20}3^{30}n^{50}+\cdots+1$ 为 n 的 50 次多项式，而分母 $(5n+1)^{50}=50^{50}n^{50}+\cdots+1$ 也

为 n 的 50 次多项式. 可见，分子最高次幂等于分母最高次幂，因而当 $n\to\infty$ 时，此有理分式的极限等于分子 n^{50} 系数与分母 n^{50} 系数的比值.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^{20}\ (3n+1)^{30}}{(5n+1)^{50}}=\dfrac{2^{30}3^{30}}{50^{50}}$

例 5 求极限 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-7x+12}$.

分析 当 $x\to3$ 时，角度 $x-3\to0$，从而其正弦函数 $\sin(x-3)$ 的极限为零，由于分母也趋于零，应考虑应用第一个重要极限求解.

解 $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-7x+12}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{(x-3)\ (x-4)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1}{x-4}\cdot\lim\limits_{x-3\to0}\dfrac{\sin(x-3)}{(x-3)}=-1$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

分析 由对数运算性质知 $\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$，函数的对数运算与极限运算又可交换顺序.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\left[\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln \mathrm{e}=1$

例 7 讨论函数 $f(x)\ =\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$，在分界点 $x=0$ 处的连续性.

分析 分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 左右的数学表达式一样，因而直接计算极限 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$，在 $x\to0$ 的过程中，自变量 x 取值可正可负且 $|x|$ 无限减少，这时变量 x^2 取值为正且为无穷小量，得到变量 $\dfrac{1}{x^2}$ 为正无穷大量，当然变量 $-\dfrac{1}{x^2}$ 为负无穷大量，于是指数函数 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ 的极限为零.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\ =\lim\limits_{x\to0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0$，且 $f(0)\ =0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)\ =f(0)$. 故，分段函数 $f(x)$ 在分界点 $x=0$ 处连续.

四、教材典型习题与难题解答

习题 1-1

6. 已知复合函数 $f(x+1)\ =x^2-3$，求 $f(x)$.

解 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$

$f(u)\ =\ (u-1)^2-3=u^2-2u-2$

$f(x)=x^2-2x-2$

8. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内是奇函数，且是单调递减的，若 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$,求实数 a 的取值范围.

解 由题意 $-1<1-a<1$，$-1<1-a^2<1$，知 $0<a<\sqrt{2}$.
由 $f(1-a)+f(1-a^2)<0$，得 $f(1-a)<-f(1-a^2)$；

又由 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内是奇函数，知 $-f(1-a^2)=f(a^2-1)$，所以 $f(1-a)<f(a^2-1)$，

因为 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内是单调递减的，因此 $1-a>a^2-1$，从而 $-2<a<1$，又 $0<a<\sqrt{2}$，故 $0<a<1$.

习题 1－2

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，并说明 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 是否存在.

解 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(-1)=-1$，　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}1=1$.
由于 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$，所以 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在.

习题 1－3

1. 求下列极限.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x+3}{x^2+1}$；

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}$；　　(8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{2-x}$.

解 (3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-3}{x+2}=-\dfrac{2}{3}$

(6) 因为当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x^2+1}$ 是无穷小量，$\sin x+3$ 是有界的，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin(x+3)}{x^2+1}=0$.

(7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{3})(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{3+x}+\sqrt{3})}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\sqrt{3+x}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

(8) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{2-x}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(2-x)(\sqrt{x-1}+1)}=-\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+1}=-\dfrac{1}{2}$

2. 求下列极限.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$;　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}$;　(5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$;　(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\sin x}$.

解　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\dfrac{\sin x}{x}}{1+\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{1-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}{1+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}\cdot\cos 2x=\dfrac{5}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\dfrac{\sin 2x}{2x}}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=\dfrac{5}{2}$

(5) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{\pi-x}=\lim\limits_{\pi-x\to 0}\dfrac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}=1$

(6) 令 $z=\arcsin x$，则 $x=\sin z$，当 $x\to 0$ 时，$z\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}=\lim_{z\to 0}\frac{1}{\dfrac{\sin z}{z}}=1$$

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+3}{\dfrac{\sin x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}(x+3)}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}}=3$

3. 求下列极限.

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x+1}$;　(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$;

(5) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}$;　(6) $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\frac{2}{x-1}}$.

解　(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{x-1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right)^{2}\right]$

$=\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{x-1})^{x-1}\cdot\lim\limits_{x\to \infty}(1+\dfrac{1}{x-1})^{2}=\mathrm{e}\times 1=\mathrm{e}$

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{-\frac{x}{3}}\right]^{-3}}{1}=\mathrm{e}^{-3}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[\ (1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^{3}=\mathrm{e}^{3}$

(5) **方法一：** $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^{-x}=\lim\limits_{x\to \infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=\mathrm{e}^{-1}$

方法二: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}=\mathrm{e}^{-1}$

(6) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{2}{x-1}}=\lim\limits_{1-x\to0}\{[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}}\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}$

习题 1-4

1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$，所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

2. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-1, & x\geqslant0\\ 2\cos x, & x<0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(\mathrm{e}^x-1)=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}2\cos x=2$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

3. 指出下列函数的间断点.

(3) $f(x)=\begin{cases}2\sin x, & x\geqslant0\\ 1+\cos x, & x<0\end{cases}$;

(4) $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}}, & x\neq0\\ 1, & x=0\end{cases}$.

解 (3) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2\sin x=0$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1+\cos x)=2$

由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

(4) 因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}]^2=\mathrm{e}^2\neq1=f(0)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

4. 已知分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-2, & x<2\\ kx, & x\geqslant2\end{cases}$ 在分界点 $x=2$ 处连续，求常数 k 的值.

解 $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}kx=2k$

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}(x^3-2)=6$$

因为 $f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，所以

$$\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^-}f(x)，即 2k=6，k=3.$$

5. 求常数 m 的值，使得分段函数 $f(x)=\begin{cases}x^3+1, & x<1\\ mx, & x\geqslant1\end{cases}$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

解　若函数在分界点 $x=1$ 处也连续，则在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^3+1)=2$$

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}mx=m$$

若要函数连续则有 $m=2$.

6. 证明方程 $2x^3-3x=1$ 在区间 $(1, 2)$ 内至少有一实根.

证明　设 $f(x)=2x^3-3x-1$，$f(x)$ 在闭区间 $[1, 2]$ 上连续.

因为 $f(1)=-2<0$，$f(2)=9>0$，故至少存在点 $\xi\in(1, 2)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $2\xi^3-3\xi-1=0$.

所以，方程 $2x^3-2x=1$ 在 $(1, 2)$ 内至少有一实根.

复习题一

1. 填空题.

(9) 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$，若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$________.

解　$f(x)$ 在 $x=0$ 点处连续，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$.

因为 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to0}\{[1+(-2x)]^{-\frac{1}{2x}}\}^{-2}=-2$，且 $f(0)=a$，故 $a=-2$.

2. 单项选择题.

(10) 若 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{ax^2+x-3}{x-1}=b$，则常数 a、b 的值为（　　）.

A. $a=2$，　$b=5$；　　　　B. $a=2$，　$b=-5$；

C. $a=-2$，　$b=5$；　　　D. $a=-2$，$b=-5$.

(12) 若极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{nx}=e^2$，则有（　　）成立.

A. $nk=2$；　B. $\dfrac{n}{k}=2$；　C. $nk=\dfrac{1}{2}$；　D. $\dfrac{n}{k}=\dfrac{1}{2}$.

解　(10) 因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+x-3}{x-1}=b$，且$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$

所以$\lim\limits_{x\to 1}(ax^2+x-3)=0$，即 $a+1-3=0$，故 $a=2$.

此时$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}=5$

正确答案是 A.

(12) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{k}{x})^{nx}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{nk}=e^{nk}$，

所以 $e^{nk}=e^2$，$nk=2$.

正确答案是 A.

3. 求下列极限.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}$；　(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{3x}$.

解　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\right)=\lim\limits_{\sin x\to 0}\dfrac{\sin\sin x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

(7) $$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{\sin 2x(\sqrt{x+1}+1)}$$
$$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{4}$$

(8) $$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{2}{x}}\right)^{3x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right]^3}{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^6}=\dfrac{e^3}{e^6}=e^{-3}$$

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1\\ -x^2+4x-2, & 1\leqslant x<3\\ 2-x, & x\geqslant 3\end{cases}$，试讨论函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 及 $x=3$ 处的连续性.

解　$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$

$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-x^2+4x-2)=1$

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}(-x^2+4x-2)=1$

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}(2-x)=-1$

由于$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=f(1)$，$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)$，所以函数

$f(x)$在点 $x=1$ 处连续，在 $x=3$ 处不连续.

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x<0\\ k, & x=0\\ \dfrac{\ln(1+3x)}{x}, & x>0\end{cases}$，试问 k 为何值时，能使函数$f(x)$在 $x=0$ 处连续?

解　若$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=k$，则函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin 3x}{3x}=3$

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\ln(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\ln\{\lim\limits_{x\to0^+}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^3\}=3$

所以$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=3$，即 $k=3$

五、测试题及参考答案

1. 填空题.

(1) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 4]$，则复合函数 $f(x^2)$ 的定义域 $D=$________.

(2) 设函数 $f(x)=\lg x$，$\varphi(x)=10^{\cos x^3}$，则复合函数 $f[\varphi(x)]=$________.

(3) 已知复合函数 $f(\sin x)=\cos x\left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，则函数 $f(x)=$________.

(4) 极限$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-9}{5x^2-7x-2}=$________.

(5) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\sin\dfrac{4}{n}=$________.

(6) 极限$\lim\limits_{x\to1}\ln\left[\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}\right]=$________.

(7) 当 $x\to0$ 时，若无穷小量 $f(x)$ 与 $\sin 3x$ 是等价无穷小量，则极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sin 3x}=$________.

(8) 已知当 $x\neq0$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$，若函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，则函数值 $f(0)=$________.

(9) 已知极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin kx}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^x$，则常数 $k=$________.