全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

奥数讲义

AOSHU JIANGYI

高二年级上

◆ 主编 朱华伟

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

全国奥数领队担纲　奥赛金牌教练主笔

★ 奥数讲义 （高一年级上、下）

★ 奥数讲义 （高二年级上、下）

★ 奥数讲义 （高三年级上、下）

ISBN 978-7-308-05323-5

9 787308 053235 >

定价：16.00元

奥数讲义

高二年级(上)

主编　朱华伟

编委　朱华伟　范端喜　张　雷

符开广　蒋太煌

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

奥数讲义.高二年级.上/朱华伟主编.—杭州：浙江大学出版社，2007.5
ISBN 978-7-308-05323-5

Ⅰ.奥... Ⅱ.朱... Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 057505 号

责任编辑 杨晓鸣 姜 锐
出版发行 浙江大学出版社
(杭州浙大路 38 号 邮政编码 310027)
(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
(网址：http://www.zjupress.com)
经　　销 浙江省新华书店
排　　版 杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷 杭州印校印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16
印　　张 12.25
字　　数 290 千
版 印 次 2007 年 5 月第 1 版 2007 年 5 月第 1 次印刷
印　　数 00001—10000
书　　号 ISBN 978-7-308-05323-5
定　　价 16.00 元

前 言

数学被誉为科学的皇后。在人类文明的历史进程中，中华民族对数学的发展曾作出过卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪烁耀眼的光芒。新中国成立以后，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言："21世纪，中国必将成为数学大国。"从1985年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克以来，中国代表队共122人参赛，取得92块金牌、23块银牌、5块铜牌，13次团体总分第一的好成绩。中学生在国际数学奥林匹克中的出色表现，使人们相信陈省身教授的这一"猜想"将在本世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学学院院士格里姆(J. Glimm)说："数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。"时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，我们以国内外高中数学奥林匹克为背景，以《全日制高中数学课程标准》的新理念、新要求为准绳，兼顾"大纲"与"新课标"的过渡，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写这套《奥数讲义》。通过这套讲义的学习，使学生发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创造力，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。她既为学有余力且对数学感兴趣的高中生提供一个施展才华和提高数学解题能力的有效指导，也为参加数学奥林匹克的高中生提供一套科学实用的培训教程。

本丛书设计新颖，方便老师、学生和家长使用，分高一、二、三年级上册，和高一、二、三年级下册，共六册。

每册内容包括专题讲座篇、同步测试篇、全真测试篇。专题讲座篇的专题以讲义的形式编写，每讲的主要栏目有：

数学名言欣赏：以名人名言开宗名义，开始每讲的奥数学习之旅。

知识方法扫描：补充竞赛方面的相关知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点。

典型例题解析：在保留部分经典好题、经典解法的同时，尽可能选用一些国际国内竞赛的新题(不一定是难题)，如近3—5年高考、高中数学联赛、女子竞赛、西部竞赛、美国数学邀请赛、美国数学奥林匹克试题等，每道赛题注明竞赛年份，给出一些新颖的解答方法，减少跟其他同类书籍的雷同率，增强读者的阅读欲望。例题总个数控制在8道，由基础题(2道高考难度的试题)、提高题(4道一试难度的试题)、综合题(2道二试难度的试题)组成；

原版赛题传真：含英文试题与英文解答，针对试题与解答中的生词给出"英汉小词典"。

同步训练：含3道选择题、4道填空题、3道解答题(不便于采用客观题形式的专题，安排6道解答题作为同步训练题)，均给出详细解答过程。

在"同步测试篇"中，与"专题讲座篇"中的专题对应设置测试卷。在"全真测试篇"中，精选了国内外最新高中数学奥林匹克试卷若干套。全书后附有"同步训练题、同步测试题、全真测试题"题目的详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行一定量的训练。本丛书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有传统的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，作者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生学生兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析、解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词："数学好玩"。我们深信本丛书让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好："数学的世界是变换无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！"

广州大学　朱华伟

2007—5—10

目 录

contents

专题讲座篇

同步测试篇

全真测试篇

参考答案

专题讲座篇

第1讲　不等式的解法及其应用

数学是科学的大门和钥匙.

——培根

知识方法扫描

1. 有理不等式

主要指一元一次不等式、一元二次不等式、高次不等式和分式不等式. 主要解法是分解因式.

2. 无理不等式

$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$；$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$.

3. 指数不等式和对数不等式

(1) $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ $(a>0,\ a\neq 1)$的同解不等式为 $a>1$ 时，$f(x)>g(x)$；$0<a<1$ 时，$f(x)<g(x)$.

(2) $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ $(a>0,\ a\neq 1)$的同解不等式为

$a>1$ 时，$\begin{cases} g(x)>0 \\ f(x)>g(x) \end{cases}$；$0<a<1$ 时，$\begin{cases} f(x)>0 \\ f(x)<g(x) \end{cases}$.

4. 绝对值不等式

(1) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x)$.

(2) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow f(x) > g(x)$ 或 $f(x) < -g(x)$.

(3) $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$.

经典例题解析

例1　解不等式$\dfrac{2x^2-10x+11}{x^2-6x+8} \leqslant 1$.

分析　有理不等式最常用的解法是分解因式法.

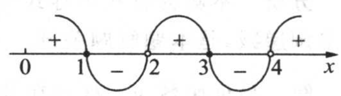

图 1-1

解　将原不等式变形为$\dfrac{2x^2-10x+11}{x^2-6x+8} - 1 \leqslant 0$.

整理，化简得$\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \leqslant 0$，即 $\begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \leqslant 0 \\ x\neq 2,\ x\neq 4 \end{cases}$.

由此可得，原不等式解集为：$\{x \mid 1\leqslant x<2$ 或 $3\leqslant x<4\}$.

评注 “数轴标根法”是解有理不等式的最有效方法.其根据是：设 n 次多项式 $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$ 其根为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$，且 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n$，将这 n 个根分别标在数轴上，把数轴分成 $n+1$ 个区间，依次为 $(-\infty,x_1)$，(x_1,x_2)，$\cdots$，$(x_n,+\infty)$，则 $f(x)$ 在这 $(n+1)$ 个区间上的符号规律从右到左依次为正、负相隔.故对于 $f(x)>0(<0)$ 只需找出使 $f(x)$ 为正、负对应的区间.

例2 若关于 x 的不等式 $|x|+|x-3|<a$ 恒有解，则实数 a 的取值范围是多少？

分析 我们利用 $|a|+|b|\geqslant|a+b|$ 巧解不等式，避开常规解法.

解 $|x|+|x-3|=|x|+|3-x|\geqslant|x+(3-x)|=3$，当且仅当 $x(3-x)\geqslant0$ 即 $0\leqslant x\leqslant3$ 时取等号.所以 $|x|+|x-3|$ 有最小值 3.所以 $a>3$.

评注 灵活运用一些常用不等式也是解决不等式问题的有效方法.

例3 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程 $f(x)-x=0$ 两个根为 x_1，x_2 满足 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.(1) 当 $x\in(0,x_1)$ 时，证明 $x<f(x)<x_1$；

(2) 设函数 $f(x)$ 图象关于 $x=x_0$ 对称，证明：$x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

分析 对称轴是二次函数单调区间的分界，因而先确定对称轴大体位置是重要一步.我们先解决(2).

解 (2) 设 $F(x)=f(x)-x=ax^2+(b-1)x+c$，则由韦达定理得：$x_1+x_2=\dfrac{-b+1}{a}$.

而 $f(x)=0$ 对称轴为

$$x=x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-b+1}{2a}-\frac{1}{2a}=\frac{x_1+x_2}{2}-\frac{1}{2a}=\frac{x_1}{2}+\left(\frac{x_2}{2}-\frac{1}{2a}\right).$$

又已知 $0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$，所以 $x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

(1) 由 $f(x)$ 对称轴 $x_0<\dfrac{x_1}{2}$ 知：$x\in(0,x_1)$ 时，$f(x)$ 最大值小于 $f(x_1)$，所以 $x\in(0,x_1)$ 时，$f(x)<f(x_1)=F(x_1)+x_1=x_1$，所以 $f(x)<x_1$ 右边不等式成立.

综上所述，原不等式成立.

评注 韦达定理是解决二次函数问题的重要工具.我们这里灵活解题，思路明晰，值得思考.

例4 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x}{2-x}$，试解不等式 $f\left[x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]>\dfrac{1}{2}$.

分析 本题为分式不等式与对数不等式混合.初看不易解决，但发现该函数在其定义域内单调递减，是本题解题关键.

解 易证函数 $y=f(x)$ 在其定义域 $(0,2)$ 是单调减函数，并且 $f(1)=\dfrac{1}{2}$，所以原不等式

即为 $f\left[x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]>f(1)$ 等价于 $\begin{cases}x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<1\\0<x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)<2\end{cases}\Rightarrow\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

评注 利用函数单调性解决不易入手的不等式是一种常用方法.

例5 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$，其中 $a>0$.

(1) 解不等式 $f(x)\leqslant 1$；

(2) 求 a 的取值范围，使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

(2000 年全国高考)

分析 令 $y=\sqrt{x^2+1}$ 其图象为双曲线上半支，$y=ax+1$ 为过双曲线顶点的直线，而 $f(x)\leqslant 1$ 即为 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$. 我们由双曲线性质可猜出本题 a 的分类方向.

解 (1) $f(x)\leqslant 1$ 即为 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$. 因为 $ax+1\geqslant 1$，所以 $x\geqslant 0$. 因而不等式等价于

$$\begin{cases}x^2+1\leqslant(1+ax)^2\\x\geqslant 0\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x\geqslant 0\\(a^2-1)x+2a\geqslant 0\end{cases}.$$

当 $0<a<1$ 时，解集为 $\left\{x\middle|0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}\right\}$；当 $a\geqslant 1$ 时，解集为 $\{x|x\geqslant 0\}$.

(2) 在区间 $[0,+\infty)$ 上任取 x_1,x_2，并且 $x_1<x_2$.

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)$$

$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right);$$

(i) $a\geqslant 1$ 时，因为 $\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1$，所以 $\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$. 又 $x_1-x_2<0$. 所以 $f(x_1)>f(x_2)$. 即 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调减函数.

(ii) 当 $0<a<1$ 时，令 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2a}{1-a^2}$，则 $f(x_1)=f(x_2)=1$，即在 $[0,+\infty)$ 存在 x_1，x_2 使 $f(x_1)=f(x_2)$. 此时函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上无单调性.

!评注 第(1)问中，$f(x)\leqslant 1$，当 $0<a<1$ 时，解集为 $\left[0,\dfrac{2a}{1-a^2}\right]$ 知：$f(0)=f\left(\dfrac{2a}{1-a^2}\right)$ 为第(2)问构造 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{2a}{1-a^2}$ 提供了线索.

例6 对于 $0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，使 $\cos^2\theta+2m\sin\theta-2m-2<0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

分析 我们将其转化为一元函数问题再进行处理.

解 当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，不等式恒成立；

当 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，不妨设 $\sin\theta=t$，则 $t\in[0,1)$，$\cos^2\theta=1-t^2$，原不等式化为：

$$1-t^2+2mt-2m-2<0.$$

所以 $2m>-\dfrac{(1+t^2)}{1-t}\Rightarrow m>-\dfrac{1}{2}\left[(1-t)+\dfrac{2}{1-t}\right]+1$.

由于函数 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$ 在 $(0,\sqrt{2}]$ 单调递减，并且 $0<1-t\leqslant 1$ 知：$(1-t)+\dfrac{2}{1-t}\geqslant 1+\dfrac{2}{1}=3$，即其最小值为 3.

又 $m>-\dfrac{1}{2}\left[(1-t)+\dfrac{2}{1-t}\right]+1$ 恒成立，所以 m 的取值范围是 $m>-\dfrac{1}{2}$.

评注 这里我们利用函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 单调性，避免了一元二次不等式的讨论问题．其中分离变量 m 是一种有效的思想方法．

例7 已知当 $x\in[0,1]$ 时，不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立，试求 θ 的取值范围．

分析 这里注意到 x^2，$(1-x)^2$ 与 $x(1-x)$ 的关系，联想到运用均值不等式处理问题．

解 若 $f(0)>0$，则 $\sin\theta>0$，$f(1)>0$，则 $\cos\theta>0$，所以 θ 应为第一象限角．

若 $\sin\theta\cos\theta\leqslant\frac{1}{4}$，则由均值不等式

$$x^2\cos\theta+(1-x)^2\sin\theta\geqslant2\sqrt{x^2(1-x)^2\sin\theta\cos\theta}=2x(1-x)\sqrt{\sin\theta\cos\theta}.$$

当 $x^2\cos\theta=(1-x)^2\sin\theta$，即 $x=\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}$ 时，取等号．显然此时 $x\in[0,1]$．

令 $x_0=\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}+\sqrt{\sin\theta}}$，则原式左边 $=2x_0(1-x_0)\sqrt{\sin\theta\cos\theta}-x_0(1-x_0)=x_0(1-x_0)[\sqrt{4\sin\theta\cos\theta}-1]\leqslant0$，即存在 $x_0\in[0,1]$ 使原不等式不成立，矛盾．所以 $\sin\theta\cos\theta>\frac{1}{4}$．此时，显然 $x\in(0,1)$ 时，原式左边 $=x(1-x)[\sqrt{4\sin\theta\cos\theta}-1]>0$；而 $x=0,1$ 时，易知不等式成立．所以不等式成立充要条件为 $\begin{cases}\sin\theta>0\\ \cos\theta>0\\ \sin\theta\cos\theta>\frac{1}{4}\end{cases}$，解得：$2k\pi+\frac{\pi}{12}<\theta<2k\pi+\frac{5}{12}\pi$，$k\in\mathbf{Z}$．

评注 这里运用均值不等式，避免了二次函数讨论．提示我们要注意观察、联想．

例8 求函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域． （2001年全国高中数学联赛）

分析 如何处理该表达式中的根式是本题的难点．

解 显然函数定义域为 $\{x\mid x\geqslant2$ 或 $x\leqslant1,\ x\in\mathbf{R}\}$．

由 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 得：$\sqrt{x^2-3x+2}=y-x\geqslant0$，两边平方整理得：$(2y-3)x=y^2-2$，从而 $y\neq\frac{3}{2}$；由 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$ 且 $y-x\geqslant0$ 得：$y-\frac{y^2-2}{2y-3}\geqslant0\Rightarrow1\leqslant y<\frac{3}{2}$ 或 $y\geqslant2$．

并且任取 $y\geqslant2$，令 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$ 易知 $x\geqslant2$ 属于该函数定义域．任取 $1\leqslant y<\frac{3}{2}$ 同样令 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$ 易知 $x\leqslant1$ 属于该函数定义域．

因此，所求函数值域为 $\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$．

评注 本题利用解不等式方法确定函数值域．其中 $x=\frac{y^2-2}{2y-3}$ 的范围可利用函数 $y=x+\frac{a}{x}(a>0)$ 来确定．

原版[illegible]传真

Problem Solve：

$$\sqrt{2x-5}>-4x+3.$$

Solution: We have two cases to consider: (1) the right hand side is less than zero and (2) the right hand side is greater than zero.

As before, since we can't have the square root of a negative number, we have the condition $2x-5\geqslant 0$ or $x\geqslant \frac{5}{2}$ that must be satisfied.

Let's take the first case where the right hand side is less than zero. We do this one first because if the right hand side is less than zero, the left hand side is automatically greater since it is greater than zero. We have $-4x+3<0$ or $x>\frac{3}{4}$. Since we must satisfy the condition of $x\geqslant\frac{5}{2}$. Our solution is $x\geqslant\frac{5}{2}$.

For the second case where the right hand side is greater than zero or equal zero, we have $-4x+3\geqslant 0$ or $x\leqslant\frac{3}{4}$. **But WE CAN'T HAVE $x\leqslant\frac{3}{4}$ AND $x\geqslant\frac{5}{2}$ AT THE SAME TIME.** Ergo, there is no solution for the second case. The only solution for this problem is from the first case.

英汉小词典

square root　平方根

同步训练

一、选择题

1. (2004 年全国高考　重庆卷)不等式 $x+\frac{2}{x+1}>2$ 的解集是　(　　)

A. $(-1, 0)\cup(1, +\infty)$　　B. $(-\infty, -1)\cup(0, 1)$

C. $(-1, 0)\cup(0, 1)$　　D. $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$

2. (2004 年高中数学联赛)不等式 $\sqrt{\log_2 x-1}+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x^3+2>0$ 的解集是　(　　)

A. $[2,3)$　　B. $(2,3]$　　C. $[2,4)$　　D. $(2,4]$

3. 函数 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x-3)$ 的单调递增区间为　(　　)

A. $(-\infty, -1)$　　B. $(-\infty, 1)$

C. $(1, +\infty)$　　D. $(3, +\infty)$

二、填空题

4. (2004 年全国高考　浙江卷)已知 $f(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 0\\ -1 & x<0\end{cases}$，则不等式 $x+(x+2)\cdot f(x+2)\leqslant 5$ 的解集是________.

5. (2004 年高考　全国卷)不等式 $|x+2|\geqslant|x|$ 的解集是________.

6. 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-8}>3^{-2x}$ 的解集是________.

7. 不等式 $|x|^3-2x^2-4|x|+3<0$ 的解集是________.

三、解答题

8. 解不等式组$\begin{cases} x^2-6x+8>0 \\ \dfrac{x+3}{x-1}>2 \end{cases}$.

9. 已知：$c>0$，设 p：函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，q：不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$. 如果 p 和 q 有且仅有一个正确，求 c 的取值范围.

10. 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a, b, c\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$满足条件

(1) $x\in\mathbf{R}$ 时，$f(x-4)=f(2-x)$；

(2) 当 $x\in(0, 2)$时，$f(x)\leqslant\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^2$；

(3) $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上最小值为 0，求 $m(m>1)$最大值使得存在 $t\in\mathbf{R}$ 只要 $x\in[1,m]$就有 $f(x+t)\leqslant x$.

第 2 讲　不等式证明的基本方法

代数是搞清楚世界上数量关系的智力工具.

——怀特海

知识方法扫描

不等式是中学数学乃至现代数学中的重要内容,是数学课外活动的重要课题,是高考和数学奥林匹克竞赛的热门专题之一. 本讲及以下两讲通过对若干典型问题的分析,介绍不等式证明的方法技巧及三个经典不等式的应用.

数学竞赛中的不等式证明题没有固定程序可循,富于灵活性和创造性. 在变化的不等式的证明中,我们强调五种最基本的方法: 比较法、分析法、综合法、反证法、归纳法.

1. 比较法

要证明不等式 $A>B$,可以作差 $A-B$,并通过变形证明 $A-B>0$;当 $B>0$ 时,也可以作商 $\frac{A}{B}$,证明 $\frac{A}{B}>1$.

2. 分析法

从所求证的不等式出发,逐步推求能使它成立的条件,直至已知的事实为止,此法通常称为分析法. 分析法的实质是寻求不等式成立的充分条件,叙述的格式是:"要证……,只要证……."

3. 综合法

从已知条件和一些显然成立的不等式出发,灵活运用不等式的性质,并巧妙地变形而推出所要证的不等式,这种证明方法通常叫做综合法,它与分析法的思路恰好相反.

4. 反证法

若把欲证的不等式看作一个命题,则用反证法来证明不等式就与用反证法证明某个命题的方法相同了. 即当直接证明不等式有困难时,可以借助反证法否定结论,寻找矛盾,从而间接证明要证的结论.

5. 归纳法

涉及正整数 n 的不等式,可视为一个关于正整数 n 的命题,考虑用数学归纳法证.

经典例题解析

例1　设 $x, y\in \mathbf{R}^{+}$,求证: $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$.

证明　因为 $\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2=\left[\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2-2\frac{x^2}{y^2}+1\right]+\left[\left(\frac{y^2}{x^2}\right)^2-2\frac{y^2}{x^2}+1\right]$

$+\left[\left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]+\left[\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2-2\sqrt{\frac{x}{y}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}}+\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\right]$

$$=\left(\frac{x^2}{y^2}-1\right)^2+\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right)^2+\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2\geqslant 0,$$

所以$\frac{x^4}{y^4}+\frac{y^4}{x^4}-\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geqslant 2$.

例2 设 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$,求证:$a^ab^bc^c\geqslant a^{\frac{b+c}{2}}\cdot b^{\frac{c+a}{2}}\cdot c^{\frac{a+b}{2}}$.

证明 由于待证不等式关于 $a、b、c$ 对称,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$,则 $a-b$, $b-c$, $a-c$ 均$\geqslant 0$,且 $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{a}{c}$都$\geqslant 1$,从而由$\frac{a^a\cdot b^b\cdot c^c}{a^{\frac{b+c}{2}}\cdot b^{\frac{c+a}{2}}\cdot c^{\frac{a+b}{2}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a-b}{2}}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{b-c}{2}}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{a-c}{2}}\geqslant 1$ 即得所证.

评注 (1) 把所证的不等式两边平方即为 $a^{2a}\cdot b^{2b}\cdot c^{2c}\geqslant a^{b+c}\cdot b^{c+a}\cdot c^{a+b}$. 两边同乘以 $a^ab^bc^c$,就变成了第三届美国数学奥林匹克试题:

设 $a、b、c\in\mathbf{R}^+$,求证:$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

(2) 由以上两例我们看到,运用比较法证明不等式的关键是作适当的变形,如配方、分解、折项、通分等.

例3 设 $0<a_1<a_2<\cdots<a_8<a_9$,证明 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9}{a_3+a_6+a_9}<3$.

证明 要证原不等式,只要证 $a_1+a_2+\cdots+a_8+a_9<3(a_3+a_6+a_9)$,

即 $(a_1+a_2-2a_3)+(a_4+a_5-2a_6)+(a_7+a_8-2a_9)<0$.

而由题设 $a_1+a_2<2a_3$, $a_4+a_5<2a_6$, $a_7+a_8<2a_9$,

即 $a_1+a_2-2a_3<0$, $a_4+a_5-2a_6<0$, $a_7+a_8-2a_9<0$,故原不等式获证.

例4 给定 n 个非负实数 x_1, x_2, $\cdots$, x_n,且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$,求证:

$$\frac{x_1}{1+x_1^2}+\frac{x_2}{1+x_2^2}+\cdots+\frac{x_n}{1+x_n^2}\leqslant\frac{1}{1+x_1}+\frac{1}{1+x_2}+\cdots+\frac{1}{1+x_n}.$$

证明 要证原不等式,只要证

$$\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\frac{x_2-1}{(1+x_2^2)(1+x_2)}+\cdots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)}\leqslant 0.$$

首先证明对于任何 k,都有$\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)}\leqslant\frac{x_k-1}{4}$.

事实上,若 $x_k\geqslant 1$,则$(1+x_k^2)(1+x_k)\geqslant(1+1)(1+1)=4$,上式显然成立;若 $x_k<1$,则 $\frac{1}{(1+x_k^2)(1+x_k)}>\frac{1}{4}$,而 $x_k-1<0$,故有$\frac{x_k-1}{(1+x_k^2)(1+x_k)}<\frac{x_k-1}{4}$.

这样一来,便有$\frac{x_1-1}{(1+x_1^2)(1+x_1)}+\frac{x_2-1}{(1+x_2^2)(1+x_2)}+\cdots+\frac{x_n-1}{(1+x_n^2)(1+x_n)}$

$$\leqslant\frac{x_1-1}{4}+\frac{x_2-1}{4}+\cdots+\frac{x_n-1}{4}$$

$$=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)-n}{4}=0,$$即得证.

评注 由以上两例可以看出,分析法的特点是:从"未知"看"需知",执果索因,逐步靠拢"已知",其逐步推理,实际上是要寻找它的充分条件.

例5 证明,对任意大于 1 的数 a, b, c 有 $2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{a+b+c}$.

证明 注意，$\log_b a$，$\log_c b$，$\log_a c$ 都大于 0，且它们的乘积等于 1，于是由平均值不等式得

$$\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

$$=\frac{3}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\geqslant\frac{9}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{a+b+c},$$

所以 $2\left(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a}\right)\geqslant\frac{9}{a+b+c}$.

例6 设 $a, b, c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$，求证：

$$(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

证明 利用已知等式 $a+b+c=1$ 和基本不等式 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$，可得

$$1+a=(1-b)+(1-c)\geqslant 2\sqrt{(1-b)(1-c)}.$$

同理 $1+b\geqslant 2\sqrt{(1-c)(1-a)}$，$1+c\geqslant 2\sqrt{(1-a)(1-b)}$.

将以上三式相乘，即得所证.

评注 (1) 将已知不等式相乘或相加，推出欲证不等式是证明不等式的常用手段.

(2) 我们知道，在$\triangle ABC$ 中，$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1$，因此例 6 可等价地变为：

在 $\triangle ABC$ 中，求证：$\left(1+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\right)\left(1+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\right)\left(1+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\right)$

$\geqslant 8\left(1-\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}\right)\left(1-\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}\right)\left(1-\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}\right)$.

(3) 由以上两例可以看出，综合法的特点是：从“已知”看“可知”，由因导因，逐步推向未知，其逐步推理，实际上是寻找它的必要条件.

有时也将综合法、分析法结合起来，就好像有两个人，一个人从入口走向迷宫的出口，一个人从出迷宫口走向入口，争取在某处相会.

例7 设实数 a, b, c, d, p, q 满足关系式 $ab+cd=2pq$，证明，如果 $ac\geqslant p^2>0$，则有 $bd\leqslant q^2$.

证明 用反证法. 若 $bd>q^2$ 成立，则

$4abcd=4(ac)(bd)>(2pq)^2=(ab+cd)^2=(ab)^2+(cd)^2+2abcd$，

故有 $(ab-cd)^2<0$，导致矛盾，所以原结论 $bd\leqslant q^2$ 成立.

例8 设 n 为一正整数，证明数 $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots, \sqrt{n}$ 的算术平均数超过 $2\sqrt{n}/3$.

分析与解 我们要证明 $\frac{1}{n}(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})>\frac{2}{3}\sqrt{n}$，即证 $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}>\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$，如果此式不是总成立，假定 n 是使其不成立的最小数，我们设法推出矛盾. 因为 $n=1$ 时要证的不等式是成立的，所以 $n>1$. 因为 n 是使不等式不成立的最小数，所以在 $n-1$ 时不等式成立，于是

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}>\frac{2}{3}(n-1)^{\frac{3}{2}}.$$

因为不等式对于 n 不成立，所以 $\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}\geqslant\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n-1}+\sqrt{n}>\frac{2}{3}(n-1)^{\frac{3}{2}}+n^{\frac{1}{2}}$，