□高等学校教材

高等数学 上册

主编　罗卫民
主审　叶正麟

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高等数学

上册

主编　罗卫民
主审　叶正麟

高等教育出版社

内容简介

本书是为满足近年来高校大量扩招后教学的实际需要，依据最新修订的"工科类本科数学基础课程教学基本要求"编写而成。

在编写过程中，本书结合近年来的教学现状，并努力融入新世纪教学改革的一些理念与设想，着力突出了以下特色：重组知识结构，整合教学内容；重视问题驱动，激活思考探索；确保基本要求，降低知识难度；注重数学思想，突出实际应用。上册的主要内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、一元函数积分学、定积分的应用、微分方程，书后附有极坐标简介和习题答案。

本书可作为普通高等院校理工、经管等专业的高等数学教材。书中标有"*"的内容和习题可供学有余力的学生自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册/罗卫民主编. —北京：高等教育出版社，2007.6

ISBN 978-7-04-021445-1

Ⅰ. 高… Ⅱ. 罗… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 051617 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 丁鹤龄 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 杜晓丹
版式设计 马静如 **责任校对** 杨雪莲 **责任印制** 尤 静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	化学工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2007年6月第1版
印　　张	23.75	**印　　次**	2007年6月第1次印刷
字　　数	440 000	**定　　价**	24.90元

物料号　21445-00

前　言

21世纪我国的高等教育由“精英教育”步入了“大众化教育”，越来越多的高等院校把培养应用型人才作为重要目标。2003年教育部数学基础课程教学指导委员会重新修订了全国“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。这本《高等数学》教材，就是根据新修订的教学基本要求，为满足普通高校教学实际需要而编写的。

在编写过程中，我们重视切合近年来的教学现状，注意保持现行教材的优势，强调吸取国外特别是欧美同类教材的精华，努力融入新世纪教学改革的一些理念与设想。本书着力突出以下特色：

1. 重组知识结构，整合教学内容。

对现行教材的内容体系做了适当调整：将定积分置于不定积分之前，二者合为一章，称为一元函数积分学；将微分方程、级数两章依次置于定积分的应用之后，空间解析几何之前；将全微分方程一节置于曲线积分与路径无关之后。这样使相近内容相对集中，知识模块由小到大，先易后难，结构更加合理。同时，还加强了有关三维向量的教学内容。

2. 重视问题驱动，激活思考探索。

在引入基本的数学概念、命题和方法之前，尽力提出一些具有启发性的、触及数学本质的问题。围绕问题的产生、发展与解决展开内容的讨论，以引导和激发学生进行思考与探索，使学生在知识的学习中既见到“树木”更见到“森林”。

3. 确保基本要求，降低知识难度。

在保证基本概念的理解、基本方法的使用、基本技能的训练的前提下，适当降低知识难度。在叙述论证上，条理清晰，重点突出，没有令人费解的冗长证明。弱化严格抽象的理论推导，有时代之以直观扼要的说明、图示或例证，使学生易于抓住理论推导的基本思路与精神实质。适当淡化解题技巧的训练，侧重学生基本能力的培养和提高。

4. 注重数学思想，突出实际应用。

在极限、导数、积分等基本概念的引入中，充分揭示常量与变量、直与曲、近似与精确、离散与连续、均匀与非均匀等诸对矛盾的发生、冲突与转化，在对立中达到统一。在积分应用中着力展示了微元法的思想与方法。

扩展了应用举例的领域，诠释了一些纯计算例题的应用背景，适当编入了一

些半开放性的应用例题和数学建模类例题,使数学应用得到加强。特别是建模思想和方法的融入,将给课程带来活力。

代替积分表的使用,简单介绍了如何用 Mathematica 求不定积分和定积分,旨在使非数学专业的学生尽早接触数学软件等有力的现代数学应用工具,从繁琐的运算中解脱出来。

本书可作为普通高等院校理工、经管等专业的高等数学教材。书中标有“*”的内容和习题可以不作为教学基本要求,供学有余力的学生自学参考。

本书是在陕西省大学数学教学委员会的积极倡导和组织下,由西北工业大学、西安邮电学院、西安工程大学、西安工业大学等高校教师联合编写。本书第一章由贺兴时编写,第二、三章由高军安编写,第四、五章由李昌兴编写,第六、七章由孙法国编写,第八章由孙卫编写,第九章由罗卫民编写,第十、十一章由王香柯编写,最后由罗卫民统稿。原陕西省大学数学教学委员会主任、西北工业大学博士生导师叶正麟教授审阅了全稿。

李立峰、柳小燕做了书中的全部习题。对于他们的辛勤劳动,在此表示感谢。

编者对高等教育出版社的大力支持表示最诚挚的谢意。

对于来自读者发现错误、提出改进的声音,我们表示由衷的欢迎和感谢。

E-mail:lwmo@xiyou.edu.cn

编 者

2007 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象，而极限则是它的基本研究工具. 本章主要介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质.

第一节　函　　数

一、集合、区间与邻域

1. 集合

集合是指具有某种属性的对象的全体，这些对象称为集合的元素. 比如，一个教室里的学生构成了一个集合；26 个英文字母构成了一个集合. 集合通常用大写字母 $A,B,S,\cdots$ 表示，而元素通常用小写字母 $a,b,c,x,\cdots$ 表示. 如果 a 是集合 A 的元素，则记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，则记作 $a\notin A$.

集合的表示方法不外乎两种：一种是列举法，即把它的所有元素一一罗列出来，并放在一对花括号中. 比如由 a,b,c,d 四个字母构成的集合可以表示为

$$A=\{a,b,c,d\}.$$

另一种是描述法，就是将集合中元素的公共属性描述出来. 比如，全体偶数构成的集合可以表示为

$$B=\{x\mid x\text{ 为偶数}\}.$$

本书用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合. 在不特别声明的前提下，今后提到的数都指实数，并且用 $\mathbf{R}$ 表示全体实数构成的集合，用 $\mathbf{Q}$ 表示全体有理数构成的集合，用 $\mathbf{Z}$ 表示全体整数构成的集合，用 $\mathbf{N}$ 表示全体自然数构成的集合，用 $\varnothing$ 表示空集，即不含任何元素的集合.

在应用上，用得较多的数集是下述所谓的区间与邻域.

2. 区间

设 a,b 是实数，且 $a<b$. 数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a,b) 的端点，其中 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$. 数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，其中 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$. 类似地，可定义半开区间 $(a,b]$ 与 $[a,b)$：

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\},[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}.$$

以上这些区间称为有限区间，$b-a$ 称为这些区间的长度. 在数轴上，这些区间表现为长度有限的线段（图 1-1-1）.

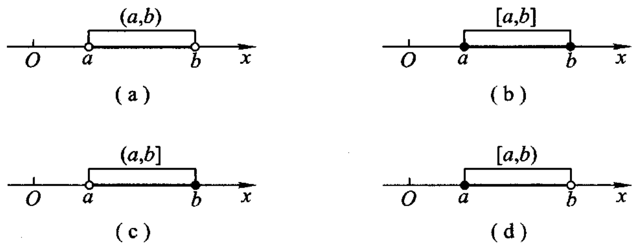


图 1-1-1

此外，还有所谓的无限区间，它们分别是

$$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$
$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\text{ 为实数}\}.$$

其中前两个区间称为无限半开区间，后三个区间称为无限开区间，记号 $-\infty$ 读作负无穷大，$+\infty$ 读作正无穷大. 在数轴上，前四个无限区间表现为一条半直线，而最后一个无限区间表现为整个数轴（图 1-1-2）.

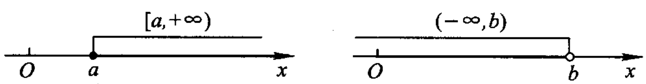


图 1-1-2

以后如果所作的论述对各种区间（有限的、无限的，开的、闭的、半开的）均适用，为了避免重复论述，就用“区间 I”代表各种类型的区间.

3. 邻域

设 a 为实数，$\delta>0$，称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

点 a 称为这邻域的中心，δ 称为邻域的半径. 有时，$U(a,\delta)$ 简记为 $U(a)$. 显然

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

即点 a 的 δ 邻域就是数轴上到点 a 的距离小于 δ 的点的集合(图 1-1-3(a)).

图 1-1-3

有时需要将邻域的中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心后,称为点 a 的 δ 去心邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$ 或 $\mathring{U}(a)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

(图 1-1-3(b)).

二、映射

1. 映射的概念

定义 1.1.1　设 X 与 Y 是两个非空集合,如果存在一个法则 f,使得对 X 中每个元素 x,按法则 f,在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应,则称 f 为从 X 到 Y 的映射,记作

$$f:X\to Y,$$

(图 1-1-4)其中 y 称为元素 x(在映射 f 下)的像,并记作 $f(x)$,即 $y=f(x)$,而元素 x 称为元素 y(在映射 f 下)的一个原像;集合 X 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=X$,X 中所有元素的像所组成的集合 Y 称为映射 f 的值域,记作 R_f,即

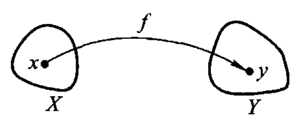


图 1-1-4

$$R_f=\{f(x) \mid x\in X\}.$$

例 1.1.1　设 $X=\{a,b,c,d,e\}$,$Y=\{1,2,3,4,5\}$,则如下规定的对应法则 f 是 X 到 Y 的一个映射:

$$f(a)=1,f(b)=2,f(c)=3,f(d)=4,f(e)=4.$$

f 的定义域与值域分别为

$$D_f=X=\{a,b,c,d,e\},R_f=\{1,2,3,4\}\subset Y.$$

概括起来,一个映射必须具备下列三个要素:

(1) 集合 X,即映射的定义域;

(2) 集合 Y,即值域的限制范围:$R_f\subseteq Y$;

(3) 对应法则 f,即由 X 中元素 x 确定 Y 中对应元素 y 的方法.

需要指出的是:

（1）映射要求每个元素的像是唯一的.

（2）映射不要求每个元素的原像是唯一的.

例 1.1.2　设 X 为坐标平面内的所有点构成的集合，Y 是 x 轴上的所有点构成的集合. 对应法则 f 是 X 中的每个元素对应它在 x 轴上的投影，则 f 是 X 到 Y 的一个映射，其定义域 $D_f = X$，值域 $R_f = Y$.

例 1.1.3　设 $X = Y = \mathbf{R}$，则由下式确定的对应规则 f 是 X 到 Y 的一个映射：

$$f(x) = x^3,\ x \in X.$$

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射，若 $R_f = Y$，即 Y 中每个元素 y 都是 X 中某元素的像，则称 f 为 X 到 Y 上的满射；若对 X 中任意两个不同元素 x_1, x_2，它们的像 $f(x_1), f(x_2)$ 不同，则称 f 为 X 到 Y 上的单射；若映射 f 既是满射，又是单射，则称 f 为 1－1 映射.

上面例 1.1.1 中的映射，既非单射，又非满射；例 1.1.2 中的映射不是单射，是满射；例 1.1.3 中的映射，既是单射，又是满射，因此是 1－1 映射.

2. 逆映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则由定义，对每个 $y \in R_f$，有唯一的 $x \in X$，使得 $f(x) = y$. 于是，我们可以定义一个从 R_f 到 X 的新映射 $g: R_f \to X$，这里，对每个 $y \in R_f$，规定

$$g(y) = x,$$

这 x 满足 $f(x) = y$. 这个映射称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}，其定义域与值域分别为

$$D_{f^{-1}} = R_f,\ R_{f^{-1}} = D_f.$$

按上述定义，只有单射才有逆映射. 因此例 1.1.1，例 1.1.2，例 1.1.3 中，只有例 1.1.3 中的映射 f 具有逆映射 f^{-1}，这个逆映射 f^{-1} 由下式确定：

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbf{R}.$$

其定义域 $D_{f^{-1}} = \mathbf{R}$，值域 $R_{f^{-1}} = \mathbf{R}$.

三、函数

1. 函数的概念

定义 1.1.2　设 $D \subseteq \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在集合 D 上的一元函数，简称函数. 关于这个定义，我们作以下几点说明：

（1）函数是从实数集到实数集的映射，其值域总是在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素主要有两个：定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则称这两个函数相等. 否则，称它们不相等.

（2）对每个 $x \in D$，按对应法则 f，有唯一确定的实数 y 与之对应，这个实数称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y = f(x)$. 由于研究函数总是通过函数值，所以习惯上，将函数 f 记为

$$y=f(x),\ x\in D.$$

此时,也将 x 称为自变量,y 称为因变量,D 称为函数的定义域.函数值的全体构成的集合,称为函数 f 的值域,记作 R_f,即

$$R_f=\{f(x)\mid x\in D\}.$$

(3) 表示函数的记号可以任意选取,除了常用的 f 外,还可用其他的英文字母,如"g","h","φ"等.相应地,函数可记作 $y=g(x)$,$y=h(x)$,$y=\varphi(x)$等.有时还直接用因变量的记号表示函数,即把函数记作 $y=y(x)$.但同时涉及几个不同的函数时,为了区别,需用不同的记号表示它们.

例 1.1.4 在自由落体运动中,物体下落的距离 s 是下落的时间 t 的函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in[0,T],$$

其中 g 是重力加速度,T 为物体着地所用时间.

在这个例子中,函数的定义域是由问题的背景决定的:自变量是下落的时间,因而 $t\in[0,T]$.当我们用公式定义函数 $y=f(x)$ 而没有明确指明定义域时,则约定定义域就是使该公式有意义的自变量 x 所有可能取值的集合,即所谓的自然定义域.比如,如果仅仅说函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$,则通常理解为函数

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\ t\in\mathbf{R}.$$

即定义域为自然定义域.

在平面直角坐标系 xOy 中,点集

$$G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$,$x\in D$ 的图形.函数的图形通常是一条曲线.比如函数 $y=x^2$,$x\in\mathbf{R}$的图形是一条抛物线(图 1-1-5).

下面再介绍几个常用的函数.

例 1.1.5 绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$(图 1-1-6).

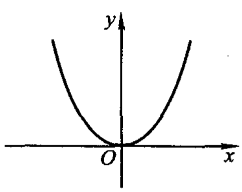


图 1-1-5

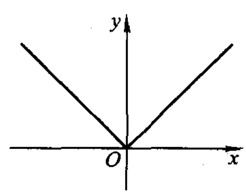


图 1-1-6

例 1.1.6 符号函数

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$（图 1-1-7）.

对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|.$$

例 1.1.7 取整函数

$$y=[x],\ x\in\mathbf{R}.$$

$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 比如 $[1]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-3.5]=-4$. 这函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-1-8 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数处，图形发生跳跃，跃度为 1（图 1-1-8）.

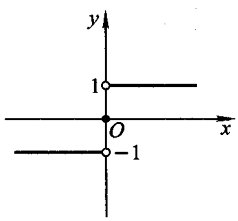


图 1-1-7

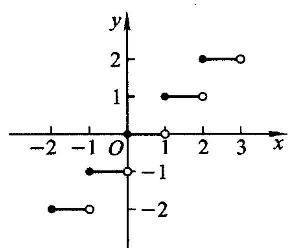


图 1-1-8

例 1.1.8 Dirchlet 函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$$

其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{0,1\}$.

以上几例表明，有时函数要用几个式子表达. 这种在定义域的不同部分，对应法则用不同式子表达的函数称为分段函数.

2. 具有某种特性的函数

(1) 有界函数

设函数 $f(x)$ 在数集 E 上有定义，如果存在正数 M，使得对任一 $x\in E$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在 E 上有界，或 $f(x)$ 为 E 上的有界函数，并称 M 为函数的一个界. 如果这样的 M 不存在，称 $f(x)$ 在 E 上无界.

比如 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，如 $M=1$ 是它的一个界；$y=\dfrac{1}{x}$ 在

$[2,+\infty)$上有界，$M=\frac{1}{2}$是它的一个界．但它在$(0,2]$上无界．

函数有界的定义也可以这样叙述：如果存在实数 m,M，使得$\forall x\in E$，恒有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M,$$

则称函数在 E 上有界，并分别称 m,M 为函数的一个下界和一个上界．

显然，如果 M 是函数的一个界，则任何比 M 大的实数都是这个函数的界．在几何上，有界函数图像夹在两条平行于 x 轴的直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间，其中 M 是函数的一个界．

（2）单调函数

设函数 $y=f(x)$ 在数集 E 上有定义，如果对 E 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

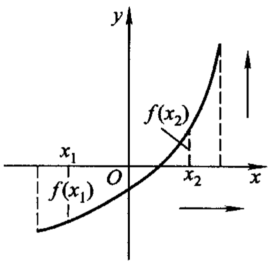
$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称此函数在 E 上单调递增；如果对 E 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称此函数在 E 上单调递减．单调递增和单调递减的函数统称为单调函数．

在几何上，单调递增函数的图形沿 x 轴正向上升（图 1－1－9(a)），单调递减函数的图形沿 x 轴正向下降（图 1－1－9(b)）．



(a)

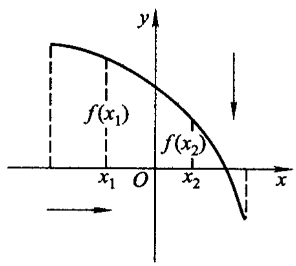

(b)

图 1－1－9

例 1.1.9 试证：函数 $f(x)=x^2+1$ 在区间$(-\infty,0]$上单调递减，在区间$[0,+\infty)$上单调递增．

证 任取 $x_1,x_2\in(-\infty,0]$，且 $x_1<x_2$，则 $x_1+x_2<0$，$x_1-x_2<0$，于是

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1^2+1)-(x_2^2+1)=(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0,$$

即 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)=x^2+1$ 在区间$(-\infty,0]$上单调递减．

类似地可以证明 $f(x)=x^2+1$ 在区间$[0,+\infty)$单调递增．

（3）奇函数与偶函数

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，$f(-x)=f(x)$