

21 世纪

高等院校工科类各专业

数学基础辅导教材 / 主 编 刘书田

线性代数

专题分析与解题指导

编著者 赵慧斌 高旅端



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

0151.2-44/66

2007

21 世纪

高等院校工科类各专业

数学基础辅导教材 / 主编 刘书田

线 性 代 数

专题分析与解题指导

编著者 赵慧斌 高旅端



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数专题分析与解题指导/赵慧斌,高旅端编著. —北京:北京大学出版社,2007.8

(21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材)

ISBN 978-7-301-12113-9

I. 线… II. ①赵… ②高… III. 线性代数-高等学校-解题 IV. O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 063852 号

书 名: 线性代数专题分析与解题指导

著作责任者: 赵慧斌 高旅端 编著

责任编辑: 刘 勇

标准书号: ISBN 978-7-301-12113-9/O · 0715

出版发行: 北京大学出版社

地 址: 北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址: <http://www.pup.cn>

电 话: 邮购部 62752015 发行部 62750672 理科编辑部 62752021 出版部 62754962

电子邮箱: zpup@pup.pku.edu.cn

印 刷 者: 北京大学印刷厂

经 销 者: 新华书店

787mm×960mm 16 开本 13.75 印张 320 千字

2007 年 8 月第 1 版 2007 年 8 月第 1 次印刷

印 数: 0001—4000 册

定 价: 20.00 元

未经许可,不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-62752024 电子邮箱: fd@pup.pku.edu.cn

内 容 简 介

本书是高等院校工科类各专业学生学习线性代数课程的辅导书,与国内通用的各类优秀的《线性代数》教材相匹配,可同步使用.全书共分六章,内容包括行列式,矩阵,向量的线性相关性,线性方程组,矩阵的特征值与特征向量,二次型等.

本书以线性代数课程教材的内容为准,按内容归类,分专题进行分析.以分析解题思路 and 通过例题讲解方法的思维方式叙述.讲述解题思路的源头,归纳总结具有共性题目的解题方法.例题分析简捷、新颖,具有较强的技巧性,可使读者思路畅通,所学知识融会贯通,灵活运用,达到事半功倍的效果.

本书是工科类各专业学生学习线性代数必备的辅导教材,是有志于考研学生的精品之选,是授课教师极为有益的教学参考书,是无师自通的自学指导书.

《21 世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材》
编审委员会

主 编 刘书田
编 委 (按姓氏笔画为序)
冯翠莲 肖筱南 胡京兴
赵慧斌 高旅端 阎双伦

21 世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材书目

高等数学专题分析与解题指导(上册)	刘书田等编著	定价 28.00 元
高等数学专题分析与解题指导(下册)	刘书田等编著	估价 25.00 元
线性代数专题分析与解题指导	赵慧斌等编著	定价 20.00 元
概率统计专题分析与解题指导	肖筱南 编著	定价 25.00 元

前 言

为了满足高等院校工科类在校学生学习数学基础课的需要,我们在教学第一线的教师经集体讨论、反复推敲、分工执笔编写了《21世纪高等院校工科类各专业数学基础辅导教材》。该系列辅导教材包括《高等数学专题分析与解题指导(上、下册)》、《线性代数专题分析与解题指导》、《概率统计专题分析与解题指导》共四分册。

本书《线性代数专题分析与解题指导》是根据高等院校工科各专业“线性代数”课程现行教材体系编写而成的。本书以教材内容为准,按专题划分,例题多样,典型,强调培养读者的数学思维能力和数学方法的训练,便于读者理解。每个专题都是按教材内容的顺序展开的,其目的紧扣学生的学习顺序,学生使用本书时不会产生任何困难。例题的选择都是具有针对性和代表性的,其目的是更好地帮助读者理解和掌握各部分内容的基本知识和解题方法。每个例题都有解题分析,阐明解题思路和方法,指出所用到的定理和公式以及解题的程序和关键所在,指导读者克服解题和学习中遇到的困难。部分例题解答后加以评注,说明例题的特点、与其他有关内容的关系、能够进一步推导出的结论等,使读者由此获得更多的知识和方法以提高分析和解决问题的能力。

阅读本书不仅能提高读者数学思维能力、分析问题解决问题的能力,使读者花费较少的时间和精力,掌握求解各种题型的思路和方法,取得事半功倍之效,而且能帮助读者较好地掌握和运用线性代数的知识,实现纵向深入,横向联系,由继承性获得向创造性升华。

本书是工科各专业学生学习线性代数课程的辅导佳作,对经济管理、财经等专业学生学习线性代数也有很好的帮助;本书是报考硕士研究生进行强化训练的精品,也是授课教师有益的教学参考书。

限于编者水平,书中难免有不妥之处,恳请读者指正。

北京大学出版社刘勇先生对本书的出版给予了热情的关心和帮助,谨向他表示衷心感谢!

编 者

2007年6月

目 录

第一章 行列式	(1)
一、行列式的概念	(1)
二、行列式的性质及按行(列)的展开式	(5)
三、克莱姆法则	(33)
习题一	(38)
第二章 矩阵	(42)
一、矩阵及其运算	(42)
二、分块矩阵	(52)
三、逆矩阵	(55)
四、矩阵的初等变换	(65)
五、求逆矩阵的方法	(68)
六、矩阵的秩	(77)
习题二	(81)
第三章 向量组的线性相关性	(85)
一、向量的基本概念	(85)
二、向量的线性相关与线性无关	(93)
三、向量组的秩	(102)
四、向量空间	(110)
习题三	(117)
第四章 线性方程组	(120)
一、线性方程组解的讨论	(120)
二、齐次线性方程组解的结构	(132)
三、非齐次线性方程组解的结构	(146)
习题四	(156)
第五章 矩阵的特征值与特征向量	(159)
一、特征值与特征向量	(159)
二、相似矩阵	(166)

三、矩阵的对角化	(168)
习题五	(181)
第六章 二次型	(183)
一、二次型及其标准形	(183)
二、正定二次型和正定矩阵	(196)
三、负定、半正定和半负定二次型和矩阵	(202)
习题六	(203)
习题答案与解法提示	(205)

第一章 行列式

一、行列式的概念

(一) 内容提要

1. 二阶行列式、三阶行列式

(1) 二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(2) 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} \\ = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ + a_{31}(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

其中

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 是元素 } a_{11} \text{ 的代数余子式,}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ 是元素 } a_{21} \text{ 的代数余子式,}$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \text{ 是元素 } a_{31} \text{ 的代数余子式.}$$

二阶行列式、三阶行列式是数值,三阶行列式等于三个二阶行列式的代数和,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

是三阶行列式按第 1 列的展开式. 三阶行列式也可按第 1 行展开. 若设三阶行列式为 D , 则

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

其中 A_{11}, A_{12}, A_{13} 分别为行列式第 1 行元素 a_{11}, a_{12}, a_{13} 的代数余子式.

2. n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1},$$

其中 A_{i1} 是元素 a_{i1} ($i=1, 2, \dots, n$) 的代数余子式, 这是 n 阶行列式按第 1 列的代数余子式的展开式.

由于 A_{i1} ($i=1, 2, \dots, n$) 是 $n-1$ 阶行列式, 所以 n 阶行列式是个数值.

3. 三角行列式的值

上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

三角行列式的值等于主对角线元素的乘积.

4. 特殊行列式的值

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}.$$

这种特殊的行列式的特点是副对角线以上(下)的元素都是零.

5. n 阶范德蒙德行列式($n \geq 2$)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j)$$

$$= (x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2}) \cdots (x_n - x_2)(x_n - x_1)$$

$$\quad \cdot (x_{n-1} - x_{n-2}) \cdots (x_{n-1} - x_2)(x_{n-1} - x_1)$$

$$\quad \cdots \cdots \cdots$$

$$\quad \cdot (x_3 - x_2)(x_3 - x_1)$$

$$\quad \cdot (x_2 - x_1)$$

n 阶范德蒙德行列式的结构特点是,第 1 行(列)的元素是 1,从第 2 行(列)到第 n 行(列)的元素是分别 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 1 次幂、2 次幂、 $\cdots$ 、 $n-1$ 次幂,范德蒙德行列式的值可以直接写出.

但是有时范德蒙德行列式不是按照其标准的格式给出,为此在计算前应写出其标准格式.

(二) 典型例题分析

例 1 计算 5 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}.$$

分析 行列式的第 1 列有 3 个元素是零,所以行列式按第 1 列的代数余子式的展开式等于两个 4 阶行列式的代数和.

解 行列式按第 1 列展开:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{vmatrix} = a^5 + 1.$$

评注 当行列式 D 按第 1 列的代数余子式展开后, D 等于两个 4 阶三角行列式的和.

例 2 计算 5 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 写出 5 阶行列式 D 按第 1 列的代数余子式的展开式, 由于第 1 列有 3 个元素是零, 所以 D 是两个 4 阶行列式的代数和.

解 行列式按第 1 列展开:

$$\begin{aligned} D &= 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} \times 1 \times 3 \times 4 \times 5 - 3 \times (-1)^{\frac{4(4-1)}{2}} \times 5 \times 3 \times 4 \times 5 \\ &= -780. \end{aligned}$$

评注 将行列式 D 按第 1 列的代数余子式展开后, 等于两个 4 阶行列式的和, 每个行列式都是副对角线以上的元素都是零的特殊行列式.

例 3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

分析 如果直接计算 4 阶行列式 D , 则计算量很大, 分析行列式的结构, 注意到这是一个 4 阶范德蒙德行列式, 将行列式写成范德蒙德行列式的标准形式直接写出行列式的值.

解 按范德蒙德行列式的标准形式展开:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & (-2)^2 & (-2)^3 \\ 1 & -1 & (-1)^2 & (-1)^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 1 & 1^2 & 1^3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-3)(1-(-1))(1-(-2)) \\
 &\quad \cdot (3-(-1))(3-(-2)) \\
 &\quad \cdot ((-1)-(-2)) \\
 &= -240.
 \end{aligned}$$

评注 计算时应注意的是范德蒙德行列式 D 中的元素 $x_1 = -2, x_2 = -1, x_3 = 3, x_4 = 1$, 确定之后, 按公式将所有的因式写出.

二、行列式的性质及按行(列)的展开式

(一) 内容提要

1. 行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(2) 交换行列式的两行(列)行列式变号.

例如, 交换行列式的第 1, 2 两行后, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(3) 行列式某行(列)的公因子可提到行列式外, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(4) 行列式的某行(列) k 倍加到另一行(列)上, 行列式的值不变.

例如, 将行列式第 1 行的 k 倍加到第 i 行上, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{11} & a_{i2} + ka_{12} & \cdots & a_{in} + ka_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 下列行列式可以写成两个行列式之和的形式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并且对列也有类似的性质.

计算 n 阶行列式时,按行列式的第 1 列代数余子式的展开式,是将 n 阶行列式写成 n 个 $n-1$ 阶行列式的代数和,如果 $n \geq 3$,且行列式中的零元素较少,那么计算量会很大.

我们一般利用行列式的性质计算行列式.由于行列式的性质有以下的作用:

(1) 如果行列式的某行(列)元素是较大数,则可以使用行列式的性质将其变形为该行(列)的数字较小的行列式,而使得行列式的值不变;

(2) 如果行列式的元素具有一定的规律性,则使用行列式的性质将其化成结构较为简单的行列式,而使得行列式的值不变;

(3) 用行列式的性质可以将行列式中的很多的元素化为零而使得行列式的值不变.

所以使用行列式的性质计算行列式可以减少计算量.

2. 行列式为零的条件

(1) 若行列式的某行(列)的元素都是零,则行列式值为零;

(2) 若行列式的某两行(列)的元素完全相同,则行列式值为零;

(3) 若行列式的某两行(列)的元素成比例,则行列式值为零.

计算行列式时,应该注意行列式是否会出现上面 3 种形式.

3. 行列式按行(列)的展开式

设 n 阶行列式 $D = |a_{ij}|$, 则 D 按第一行展开式为

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n},$$

其中 A_{1j} 是 D 中元素 a_{1j} 的代数余子式.

行列式可按任意一行(列)展开,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}, \quad j = 1, 2, \cdots, n,$$

其中 A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} ($i, j = 1, 2, \cdots, n$) 的代数余子式.

如果选择用行列式的按行(列)展开计算行列式,就应该从行列式中挑选一行(列),而该

行(列)的元素所含的零元素最多.

4. 利用拉普拉斯展开计算特殊行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{t1} & \cdots & c_{tr} & b_{t1} & \cdots & b_{tu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & d_{11} & \cdots & d_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & d_{r1} & \cdots & d_{rt} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{t1} & \cdots & b_{tu} \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{t1} & \cdots & b_{tu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{t1} & \cdots & b_{tu} \end{vmatrix}.$$

这个结论表明一个有特殊结构的高阶行列式等于两个较低阶行列式值的乘积.

5. 重要结论

设 n 阶行列式为 D , 则 D 的第 i 行元素的代数余子式 $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ 与 D 的第 j 行的元素的乘积之和等于零, 即

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ 但 } i \neq j,$$

同理有

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \text{ 但 } i \neq j.$$

6. 计算行列式的方法

使用行列式按行(列)展开, 可以将行列式写成低一阶的行列式的代数和, 从而将行列式降一阶. 但是, 由于展开式是 n 项代数和, 因此计算量仍很大, 可以考虑下列减少计算量的基本方法.

(1) 利用范德蒙德行列式: 当行列式各行(列)都是某元素的不同次幂的形式, 使用行列式的性质将行列式整理成范德蒙德行列式;

(2) 化行列式为三角行列式: 使用行列式的性质将行列式化为三角行列式;

(3) 降阶法: 使用行列式的性质将行列式的某行(列)化为只有一个非零元素, 然后按这一行(列)展开, 这样就可以将行列式降一阶, 每展开一次, 行列式的阶数可降低一阶, 如此继续进行直到将行列式降到二阶行列式并求其值, 这种方法对阶数不高的数字行列式比较适用;

(4) 递推法: 使用行列式的性质, 将所求的 n 阶行列式 D_n 用同样形式的 $n-1$ 阶行列式 D_{n-1} 表示出来, 建立 D_n 与 D_{n-1} 之间的递推关系, 有时还可以将 D_n 用同样形式的比 $n-1$ 阶

更低阶的行列式表示,建立它们之间的递推关系,从而找到递推公式,最终求出 n 阶行列式的值;

(5) 数学归纳法: 当已知一个 n 阶行列式结果,要证明其等式对于任意的自然数都成立,常使用数学归纳法证明. 如果未知 n 阶行列式的结果,也可先计算当 $n=1,2,3$ 时的行列式值,推导出 n 阶行列式结果,然后使用数学归纳法证明结论的正确性.

这种方法通常用在证明 n 阶行列式等于某个值的题目中.

总而言之,行列式的计算是这章的重点内容,在行列式的计算中,各种方法都要使用行列式的性质. 而计算 n 阶行列式时,若所给行列式中元素间具有某些特点,则应充分利用这些特点,选取一个合适的方法计算行列式.

(二) 典型例题分析

例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 22 & 25 & 21 & 32 \\ 26 & 27 & 18 & 29 \\ 32 & 16 & 19 & 33 \\ 30 & 29 & 15 & 26 \end{vmatrix}.$$

分析 行列式的每个元素都是比较大的数字,并且没有公因数,注意到行列式的各行元素之和均为 100,可将第 2,3,4 列的元素加到第 1 列上.

解 将行列式的第 2,3,4 列各元素加到第 1 列上(用 c_i 表示行列式的第 i 列, r_i 表示第 i 行):

$$D = \begin{vmatrix} 22 & 25 & 21 & 32 \\ 26 & 27 & 18 & 29 \\ 32 & 16 & 19 & 33 \\ 30 & 29 & 15 & 26 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_2 + c_3 + c_4} \begin{vmatrix} 100 & 25 & 21 & 32 \\ 100 & 27 & 18 & 29 \\ 100 & 16 & 19 & 33 \\ 100 & 29 & 15 & 26 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - r_1 \\ r_4 - r_1}} \begin{vmatrix} 100 & 25 & 21 & 32 \\ 0 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & -6 & -6 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 2 & -3 & -3 \\ -9 & -3 & 1 \\ 4 & -6 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

例 2 计算三阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}.$$

分析 行列式的特点是每一行(列)的元素之和都相等,因此可将行列式的所有的行(列)都加到第 1 行(列).

解 将行列式的第 2,3 列都加到第 1 列,

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 2(a+b+c) & a+b & b+c \\ 2(a+b+c) & c+a & a+b \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{\frac{r_2-r_1}{r_3-r_1}} \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & b+c & c+a \\ 0 & a-c & b-a \\ 0 & a-b & b-c \end{vmatrix} = 2(a+b+c) \begin{vmatrix} a-c & b-a \\ a-b & b-c \end{vmatrix} \\
 &= 2(a+b+c)[(a-c)(b-c) + (a-b)^2] \\
 &= 2(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ab) \\
 &= 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).
 \end{aligned}$$

评注 行列式的这个特点可以使得行列式经过恒等变形之后,行列式的某行(列)有一个公因式,然后再将该行(列)只保留一个非零元素,将其余元素化为零,仍可简化计算.

例3 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -a & a & -a \\ -a & a & a & -a \\ -a & -a & a & a \end{vmatrix}.$$

分析 行列式第1行元素之和等于4,行列式第2,3,4行的元素之和都等于零,据此特点,将行列式的第1列保持一个非零元素,其他的元素化为零.

解 根据分析,

$$\begin{aligned}
 D &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & -a & a & -a \\ -a & a & a & -a \\ -a & -a & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & a & -a \\ 0 & a & a & -a \\ 0 & -a & a & a \end{vmatrix} \\
 &= 4 \begin{vmatrix} -a & a & -a \\ a & a & -a \\ -a & a & a \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{r_2+r_1}{r_3-r_1}} 4 \begin{vmatrix} -a & a & -a \\ 0 & 2a & -2a \\ 0 & 0 & 2a \end{vmatrix} = -16a^2.
 \end{aligned}$$

例4 证明:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 4 & b & 7 & 1 \\ 0 & 3 & b & 9 & 2 \\ 1 & 2 & b & 9 & 3 \\ 3 & 1 & b & 8 & 4 \\ 1 & 0 & b & 11 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

分析 证明行列式 D 等于零,就是算出行列式的值等于零即可.由于行列式的第1,2,4列每行元素之和都相等,且行列式的第3列元素都是一样的,从而可使行列式 D 有两列元素成比例.