

寇胜利 著

汽轮发电机组的振动 及现场平衡



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

汽轮发电机组的振动 及现场平衡

寇胜利 著



中国电力出版社
www.cepp.com.cn

内 容 提 要

本书全面介绍了汽轮发电机组的振动问题,包括振动学基础、测量方法、故障诊断和现场平衡。

作者长期从事汽轮发电机组振动的研究和现场振动问题处理,本书就是在此基础上写作而成的。全书紧紧围绕解决现场振动问题的中心环节,注意理论与实践结合。对于各种振动问题,不仅从理论上阐述其机理、特征和诊断方法,而且结合大量的案例说明,以利读者更好地理解、学习。

本书可供发电厂和电力科研院所的有关专业人员使用。对于电力设计、制造部门和大专院校相关专业的师生也是一本有价值的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

汽轮发电机组的振动及现场平衡/寇胜利著. —北京:
中国电力出版社, 2007

ISBN 978-7-5083-5515-3

I. 汽… II. 寇… III. 汽轮发电机组-机械振动
IV. TM311.014

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 061375 号

中国电力出版社出版、发行

(北京三里河路 6 号 100044 [http://www. cepp. com. cn](http://www.cepp.com.cn))

汇鑫印务有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2007 年 8 月第一版 2007 年 8 月北京第一次印刷

787 毫米×1092 毫米 16 开本 17.75 印张 436 千字

印数 0001—3000 册 定价 28.00 元

敬 告 读 者

本书封面贴有防伪标签,加热后中心图案消失

本书如有印装质量问题,我社发行部负责退换

版 权 专 有 翻 印 必 究



前言

汽轮发电机组的振动及现场平衡

汽轮发电机组是火力发电厂的核心设备。振动水平是衡量机组安全可靠性的最重要的指标。剧烈的振动容易导致零部件的疲劳损坏,一些重大的毁机事故直接或间接地与振动有关。

振动问题是机组经常发生且比较难于处理的一类故障。由于振动使机组长期无法正常运行、甚至根本无法运行的情况并不少见。因此提高全行业在这个专业的水平十分必要。对于电厂的管理人员和技术人员,了解一定的振动知识也是有益的。写作此书就是基于这方面的考虑。

本书分为四篇。第一篇简要介绍振动学的一些基础知识,第二篇介绍振动测量的方法,第三篇介绍汽轮发电机组振动故障的诊断,第四篇介绍现场平衡。希望通过阅读本书,使读者对该专业领域有一个全面的了解,并为解决实际问题奠定基础。

写作本书的指导思想是理论联系实际。汽轮发电机组的振动是实践性非常强的专业,只满足于一般的论述是不够的。全书紧紧围绕解决现场振动问题的中心环节,注意理论与实践结合。对于各种振动问题,不仅从理论上阐述其机理、特征和诊断方法,而且结合大量的案例说明,以期加深读者的理解。

作者长期从事机组振动的研究和现场振动问题处理。本书主要反映了作者的研究成果和经验,因此难免有局限性。书中不足之处,殷切期望读者指正。

联系方式:电子邮箱 KOUSL@126.com, 手机 13910724975。

作者

2007年7月



前言

第一篇 振动学基础

第一章 振动信号分析	1
第一节 振动分类	1
第二节 简谐振动	2
第三节 周期振动	5
第二章 转子振动	7
第一节 自由振动	7
第二节 强迫振动	9
第三节 单轮盘转子的振动	11
第四节 等截面转子的振动	14

第二篇 振动测量

第三章 测量仪表	18
第一节 传感器	18
第二节 仪表	26
第四章 振动测量	31
第一节 测量参数	31
第二节 测量系统	34
第三节 测量方法	37
第四节 相位测量	45
第五章 振动标准	50
第一节 振动强度的判据	50
第二节 振动标准	52

第三篇 故障诊断

第六章 概述	58
第一节 故障分类	58

第二节 故障诊断方法	59
第七章 普通强迫振动	64
第一节 质量不平衡	64
第二节 轴承座刚度降低	68
第三节 结构共振	74
第四节 不对中	78
第八章 非定常强迫振动	83
第一节 转子热弯曲	83
第二节 发电机热弯曲	89
第三节 中心孔进油	101
第四节 摩擦振动	106
第五节 联轴器螺栓松动	118
第六节 转子活动部件	126
第七节 转子裂纹	130
第八节 膨胀不畅	136
第九节 高次谐波和分数谐波	147
第十节 发电机若干振动问题	153
第九章 自激振动	158
第一节 轴承自激振动	158
第二节 汽流激振	168

第四篇 现场平衡

第十章 平衡计算	174
第一节 图解法	175
第二节 矢量运算	179
第三节 影响系数法	181
第四节 试算法	183
第五节 多平面平衡	187
第十一章 平衡原理	193
第一节 刚性转子与柔性转子	193
第二节 刚性转子的平衡	194
第三节 柔性转子的平衡	196
第四节 平衡中的病态方程	204
第十二章 平衡的技术环节	210
第一节 平衡数据	210
第二节 不平衡的判断	213
第三节 平衡方法	214

第四节	试加质量·····	218
第五节	平衡质量的安装·····	224
第十三章	轴系平衡·····	231
第一节	汽轮机的平衡·····	231
第二节	低压转子的平衡·····	234
第三节	发电机的平衡·····	239
第四节	励磁机的平衡·····	247
第五节	联轴器的平衡·····	251
第六节	多转子平衡·····	254
附录一	名词术语·····	260
附录二	在非旋转部件上测量和评价机器的机械振动 第2部分：50MW以上陆地 安装的大型汽轮发电机组（GB/T 6075.2—2001）·····	267
附录三	旋转机械转轴径向振动的测量和评定 第2部分：陆地安装的 大型汽轮发电机组（GB/T 11348.2—1997）·····	273
参考文献 ·····		278

第一篇 振动学基础



第一章

振动信号分析

第一节 振动分类

从广泛意义上讲,振动是物理量在其平均值上下两种状态之间交替变化的一种现象。如果以物理量的瞬时值为纵坐标,以时间为横坐标,则得到的振动记录是一个波形。

振动现象在自然界和人类社会中广泛存在。如自然界中的光波、声波、电磁波,社会经济指标和人体生理量的波动,都可以看作振动现象。

变化的物理量是位移、速度、加速度、应力、应变等力学量的振动称为机械振动。

振动可按照不同的划分方法进行分类,如表 1-1 所示。

表 1-1

振 动 分 类

分类方法	名 称	主 要 特 征
按振动的位移特征分类	弯曲振动	振动体上的质点只做垂直于轴线方向的振动
	轴向振动	振动体上的质点只做沿轴线方向的振动
	扭转振动	振动体上的质点只做绕轴线方向的振动
按振动波形的特点分类	简谐振动	能用一项正弦或余弦函数表达其运动规律的振动
	周期振动	运动规律呈周期性变化,可以用频谱分析的方法将其分解为若干简谐振动的振动
	随机振动	运动规律不能用函数式表示,只能用统计方法研究的一种非周期振动
按产生振动的原因分类	自由振动	系统偏离平衡位置之后,只靠其弹性恢复力维持的振动。振动的频率就是系统的固有频率,当有阻尼时振动逐渐衰减
	强迫振动	在外部激振力持续作用下系统产生的振动,振动的特性与激振力的大小、方向和频率密切相关
	自激振动	不是由外部激振力引起,而是系统受到自身运动诱发出来并维持的运动。振动的频率接近系统的固有频率
按运动微分方程的形式分类	线性振动	系统的惯性力、阻尼力、恢复力分别与加速度、速度、位移成线性关系,能用常数系数微分方程描述的振动
	非线性振动	系统的阻尼力、恢复力具有非线性性质,只能用非线性微分方程描述的振动

在讨论振动问题时,从不同的研究角度出发,可以将同一振动归入不同的类型。例如同一种振动既可以称为强迫振动,又可以称为周期振动,还可以称为线性振动。前者按振动的原因分类,第二者按振动信号的特征分类,第三者从运动方程的形式分类。

就本书而言，主要讨论弯曲振动，其信号是周期性的；就振动原因而言，包括强迫振动和自激振动；有关的讨论主要建立在线性振动的基础上。

工程中的物理量有两类：一类是静态量或准静态量，它们的大小不随时间变化或变化很缓慢，例如温度、压力、流量等；另一类是动态量，它可以在短时间内从小到大交替变化几十次、几百次，甚至更高，振动信号就是如此。对于这样的物理量，研究某一瞬时的大小不具有很强的实际意义，因此必须有适当的描述方法。

振动是个波形信号。从事机组的振动研究，首先要了解波形的分析方法。振动波形分为随机波形（随机振动）和周期波形（周期振动）。

随机波形不能用一个函数式表达，它随时间的变化通常不可能精确重复或预测。例如车辆在凹凸不平的路面上行驶时产生的振动、风力使建筑物产生的振动、海浪使船舶的振动等，都是随机振动的实例。

周期波形是在一定时间间隔重现相同波形的信号。简谐信号（简谐振动）是周期振动最简单、最基本的形式。它可以用一个正弦函数或余弦函数表示。

汽轮发电机组是旋转机械的一种，其转子的转动是一种周期性的物理现象，由此引起的振动属于周期信号。周期信号本身只能提供振动大小的信息，通过傅里叶分析则可以将其分解为一系列不同频率的谐波成分，从而提供更多的信息。

第二节 简 谐 振 动

一、简谐振动

在图 1-1 的直角坐标系中，点 P 以原点 O 为圆心、在圆周上作逆时针匀速运动。该点

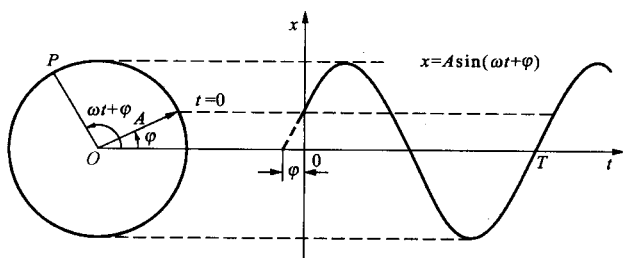


图 1-1 简谐振动

在 x 轴上的投影可以用一个正弦函数或余弦函数描述：

$$x = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1-1)$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1-2)$$

式中 A ——运动的最大量，称为振幅；

φ ——决定在开始运动时 ($t = 0$) 位置的量，称为相位；

ω ——圆频率，单位是弧度/秒 (rad/s)。

式 (1-1) 和式 (1-2) 描述的运动称为简谐振动。

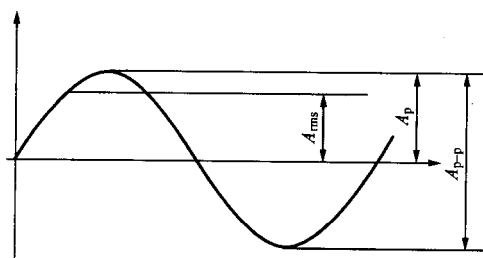


图 1-2 描述幅值的量

知道振幅、频率和相位之后就可以确定一个简谐振动。通常将振幅、频率、相位称为简谐振动的三要素。下面分别对这三个要素进行说明。

(一) 振幅

振幅可以用单峰值 (A_p)、峰—峰值 (A_{p-p})、均方根值 (A_{rms}) 表示, 它们的定义和换算关系如图 1-2 和表 1-2 所示。

表 1-2 幅值的表示方法

名 称	振 幅	与单峰值振幅之比
单峰值 A_p	$x(t)$ 的最大值	1
峰—峰值 A_{p-p}	$x(t)$ 的最大值与最小值之差	2
均方根值 A_{rms}	$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt}$	0.707

(二) 频率

从某一状态起再回到该状态所经过的时间称为周期, 用 T 表示, 单位为秒 (s)。在单位时间内同一状态重复出现的次数称为频率, 用 f 表示, 单位为 $1/s$ 。周期、频率和圆频率的关系如下:

$$f = 1/T$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$$

(三) 相位

相位决定在开始运动时 ($t=0$) 位置的量, 在振动测量中相位通常用“度”来表示, 2π 弧度 $= 360^\circ$ 。需要说明的是, 相位虽然采用角度的量纲, 但是它并不是空间量, 而是一个时间的概念。它是把一个周期的时间划分为 360 等份, 每一等份用 1° 表示。

从图 1-1 可以看出, 波形由负到正的过程中与时间轴有一个交点, 相位就是坐标原点与左侧第一个交点之间的夹角。在转动机械的振动测量中, 相位还有其他的定义方法。

二、简谐振动的表示方法

(一) 三角函数表示法

式 (1-1) 或式 (1-2) 的表示方法即为三角函数表示法, 这是简谐振动的基本表示方法。

(二) 矢量表示法

如图 1-1 所示, 设简谐振动 $x = A \sin(\omega t + \varphi)$ 。以其幅值 A 作为矢量的长度, 以其相位 φ 作为矢量的初始位置 ($t=0$) 与横轴正方向之间的夹角, 并以其圆频率 ω 作为矢量逆时针方向旋转的角速度。这样, 简谐振动的瞬时值就是个旋转矢量在纵轴上的投影。

这样的矢量是一个旋转矢量, 它可以写为 $\vec{A}$ 或 $A \angle \varphi$ 的形式

$$\vec{A} = A \angle \varphi$$

该矢量可以用图 1-3 表示。

在现场测振的记录中, 经常用 $A \angle \varphi$ 表示矢量。如果没有特别说明, 则默认它的频率是转速的频率。

旋转矢量是时间矢量, 它与空间矢量 (例如力、电场等) 的物理意义不同, 但是两者都

可以用相同的数学方法处理。如都可以采用平行四边形法则求两个矢量的和或者差。

(三) 复数表示法

简谐振动可以用复指数表示为

$$Z = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

其中, $i = \sqrt{-1}$, 则由欧拉公式 $e^{i\beta} = \cos\beta + i\sin\beta$, 可得

$$Z = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi) \quad (1-3)$$

式 (1-3) 的虚部即为式 (1-1) 表示的简谐振动。通常实部用符号 Re 表示, 虚部用 Im 表示。则

$$x = \text{Im}[Ae^{i(\omega t + \varphi)}]$$

也可直接写成

$$x = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$$

此时作为一种物理现象, 只要考虑它的虚部就可以了。这就是简谐振动的复数表示法。

还可以写成

$$x = \vec{A}e^{i\omega t} \quad (1-4)$$

式中 $\vec{A}$ ——矢量的复指数的表示形式, $\vec{A} = Ae^{i\varphi}$;

$e^{i\omega t}$ ——旋转因子;

$\vec{A}e^{i\omega t}$ ——表示旋转角速度为 ω 的旋转矢量。

综上所述, 简谐振动表示方法主要有 3 种, 如表 1-3 中所示。

表 1-3

简谐振动的表示方法

表示方法	表达式	图 形	应用场合
正弦函数	$x = A\sin(\omega t + \varphi)$	正 弦	公式推导
矢量	$\vec{A}$ 或 $A \angle \varphi$	矢量图	平衡计算
复指数	$x = Ae^{i(\omega t + \varphi)}$ 或 $x = \vec{A}e^{i\omega t}$	旋转矢量图	公式推导

三、位移、速度、加速度

表示物体运动的特征量包括位移、速度、加速度。设位移为 x , 则位移、速度和加速度的表达式分别为

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = x' = \omega A\cos(\omega t + \varphi) = \omega A\sin(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = x'' = -\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\sin(\omega t + \varphi + \pi)$$

式中, x' 和 x'' 分别表示 x 的一阶导数和二阶导数。

由上述可见:

- (1) 简谐振动的位移、速度、加速度的频率相同, 且都等于 ω ;
- (2) 位移的幅值为 A 时, 速度的幅值为 ωA , 加速度的幅值为 $\omega^2 A$;
- (3) 速度的相位超前位移 $\pi/2$, 而加速度的相位又超前速度 $\pi/2$, 见图 1-4。

通过微分可实现位移→速度→加速度的转换。反之, 通过积分可实现加速度→速度→位移的转换。一般振动表都具有实现上述转换的功能。

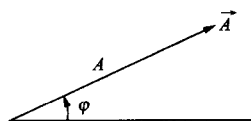


图 1-3 简谐振动的
矢量表示方法

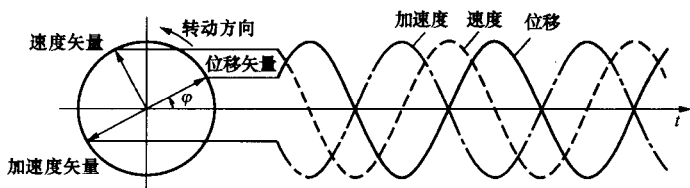


图 1-4 位移、速度、加速度

第三节 周期振动

周期性变化的振动称为周期振动，如图 1-5 所示。设 T 是周期振动 $x(t)$ 的周期，则有：

$$x(t) = x(t \pm nT) \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

汽轮发电机组的原始振动信号是周期信号。这样的信号只能提供振动大小的信息。为了得到更多的信息，必须对信号进行分解。

在数学上可以通过傅里叶级数分析将周期函数分解成一个收敛的无穷三角级数，其中每一项都是一个正弦函数。展开傅里叶级数要求满足一定的条件，而这些条件通常是能够满足的。基于这一原理，周期振动可以视做一系列不同频率的简谐振动的合成。

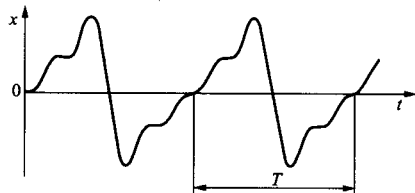


图 1-5 周期振动

对于周期为 T 的函数 $x(t)$ ，可以展开为下列三角函数的级数之和

$$x(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{2\pi n t}{T} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{T} \right) \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad (1-5)$$

式 (1-5) 称为函数 $x(t)$ 的傅里叶级数的展开式或傅里叶级数。

其中：

$$A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos \frac{2\pi n t}{T} dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin \frac{2\pi n t}{T} dt$$

其中， A_0 、 A_n 和 B_n 称为傅里叶系数。

应用三角级数之和公式将傅里叶级数加以合成，可改写为

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n \right) \quad (1-6)$$

其中， $C_0 = A_0$ ； $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ； $\varphi_n = \arctan \frac{A_n}{B_n}$ 。

由式 (1-6) 可以看出，周期振动 $x(t)$ 由常数项和不同频率的简谐波组成。常数项表示 $x(t)$ 的平均值。 $n=1$ 时的频率 f_1 ($f_1 = 1/T$) 称为基频。大小为基频 n 倍 ($n = 2, 3, \dots$) 的其他频率称为 n 次谐波。 C_n 和 φ_n 表示第 n 次谐波的振幅和相位。

将周期信号展开为一系列不同频率的简谐信号称为频谱分析。如果以横轴表示频率，以纵轴表示振幅，这样的图称为频谱图。

如图 1-6 所示的频谱分析中，可以将周期信号分解成 $1X$ 、 $3X$ 、 $6X$ 和 $8X$ 的谐波成分。

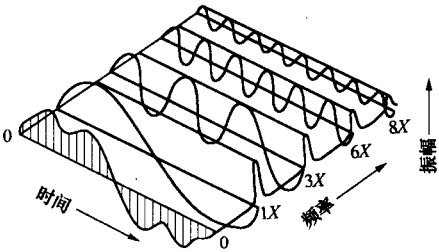


图 1-6 频谱分析



第二章

转子振动

第一节 自由振动

在对振动系统的研究中,通常首先研究它的自由振动。自由振动是系统偏离平衡位置之后,只靠其弹性恢复力维持的振动。通过这样的研究,可以了解系统的固有特性(固有频率、固有振型等),这是振动的内因。外因通过内因起作用,系统在外部激振力作用下的振动响应,在很大程度上是由系统的固有特性决定的。

一、振动系统的基本要素

分析结构物的振动时,首先要用适当的方式表明振动系统的力学性能,并用尽量简单的模型进行置换。构成振动系统力学模型的基本要素是质量、刚度和阻尼。

刚度元件能够产生弹性恢复力。弹性恢复力的大小与位移 x 成正比,方向与位移相反。即

$$f = -kx \quad (2-1)$$

式中 k ——刚度系数(或弹性系数),表示使物体产生单位位移所需要的力;

f ——弹性恢复力;

x ——位移。

阻尼元件起到阻碍物体运动的作用。它的大小与速度 x' 成正比,方向与速度相反。即

$$f = -cx'$$

式中 c ——阻尼系数,表示单位速度的阻力。

从能量角度看,质量是保持动能的要素;刚度是储存势能的要素;阻尼是使能量消耗的要素。

二、无阻尼自由振动

图 2-1 所示为由质量为 m 与弹簧常数为 k 的弹簧组成的质量—弹簧系统。设 x 为质量相对于静平衡位置的位移,则运动方程为

$$\begin{aligned} mx'' &= -kx \\ mx'' + kx &= 0 \end{aligned} \quad (2-2)$$

微分方程 (2-2) 表示的运动称为单自由度无阻尼自由振动。它可以改写为下列形式

$$x'' + \omega_n^2 x = 0$$

式中 ω_n ——系统的固有频率, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 。

满足微分方程 (2-2) 的基本解为 $x_1 = \cos \omega_n t$ 和 $x_2 = \sin \omega_n t$ 。所以通解为

$$x(t) = A \cos \omega_n t + B \sin \omega_n t \quad (2-3)$$

式中 A 、 B ——由初始条件决定的常数。

设给定的初位移与初速度为

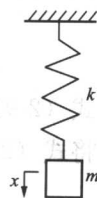


图 2-1 质量—弹簧系统

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

可以用式 (2-3) 求出 $x(0)$ 与 $x'(0)$, 分别代之以 x_0 与 v_0 , 从而得到 $A = x_0$ 与 $B = v_0/\omega_n$ 。因此, 求得解为

$$x = x_0 \cos \omega_n t + \frac{v_0}{\omega_n} \sin \omega_n t \quad (2-4)$$

式 (2-4) 可以改写成简谐振动的标准形式

$$x = X \cos (\omega_n t - \varphi) \quad (2-5)$$

式中 X —— 振幅;

φ —— 初相角。

式 (2-5) 可以展开为

$$x = X \cos \varphi \cos \omega_n t + X \sin \varphi \sin \omega_n t \quad (2-6)$$

比较式 (2-4) 与式 (2-6), 得

$$X \cos \varphi = x_0, X \sin \varphi = v_0/\omega_n \quad (2-7)$$

从而得到

$$X = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega_n)^2}, \varphi = \arctan(v_0/\omega_n x_0) \quad (2-8)$$

此即按初始条件确定的常量。

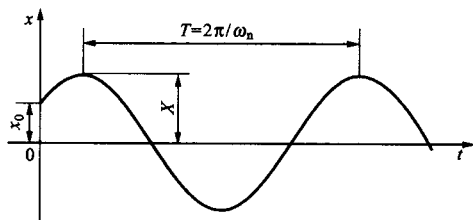


图 2-2 无阻尼自由振动的时间历程

这种简谐振动即为无阻尼自由振动, 其时间历程如图 2-2 所示, 频率 f_n 和周期 T 可表示为

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}, T = \frac{2\pi}{\omega_n}$$

由上所述可以看出:

(1) 无阻尼自由振动是一个简谐振动。

(2) 振动的频率 $\omega_n = \sqrt{k/m}$, 它是由系统自身的特性 (质量、弹簧系数) 决定的, 因此称为

固有频率。

(3) 振幅和初相角由初始条件决定。

三、有阻尼自由振动

在实际的振动系统中, 必定存在着阻尼力, 因此系统不可能持续做等幅自由振动, 其振幅将随着时间的延续不断减小。这种具有阻尼的自由振动称为有阻尼自由振动。

在单自由度质量—弹簧系统中放入阻尼器, 就构成了有阻尼系统, 如图 2-3 所示。

该系统的运动方程为

$$\begin{aligned} m x'' &= -c x' - k x \\ m x'' + c x' + k x &= 0 \end{aligned} \quad (2-9)$$

式 (2-9) 为有阻尼自由振动的方程。

将式 (2-9) 两边除以 m 而使之标准化, 就可写成

$$x'' + 2\zeta \omega_n x' + \omega_n^2 x = 0 \quad (2-10)$$

设

$$\omega_n^2 = k/m; 2\zeta \omega_n = c/m$$

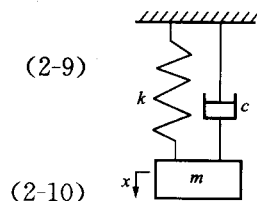


图 2-3 有阻尼系统

即

$$\omega_n = \sqrt{k/m}; \zeta = c/(2\sqrt{mk})$$

ζ 称为阻尼比。

设式 (2-10) 的解为

$$x = e^s$$

代入式 (2-10)，可以得到特征方程

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (2-11)$$

其特征根为

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n$$

这里仅讨论 $0 < \zeta < 1$ ，即小阻尼的情况，则特征根为

$$s_1, s_2 = -\zeta\omega_n \pm i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

微分方程 (2-10) 的通解为

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_n t} (A \cos \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t + B \sin \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t)$$

或改写成

$$x(t) = Ce^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t - \varphi) \quad (2-12)$$

式 (2-12) 中， C 、 φ 都是任意常数，其值由初始条件确定。

图 2-4 描述了式 (2-12) 所示的位移 $x(t)$ 随时间 t 的变化过程。它是一个逐渐衰减的曲线，且在两条包络线 $\pm Ce^{-\zeta\omega_n t}$ 之间边振动边衰减。这种衰减振动的周期为

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$$

可以看出，由于阻尼的存在，使系统的固有频率降低了。但在一般工程问题中，由于 ζ 很小，因而其对固有频率的影响很小，可以近似地认为有阻尼自由振动的固有频率与无阻尼自由振动的固有频率相等。

有阻尼的自由振动，即使阻尼很小，其振幅衰减也是非常快的。例如当 $\zeta=0.05$ 时，每经过一个周期，振幅就要降低 27%，这样经过 10 个周期，振幅就要减小到原来的 4%。所以只要有阻尼存在，自由振动就只能维持很短的时间。

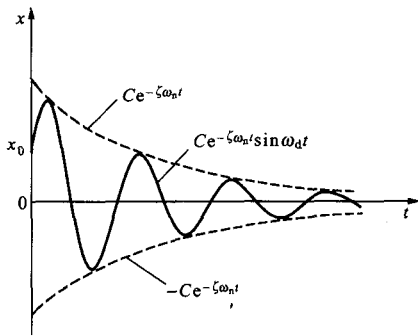


图 2-4 有阻尼自由振动

第二节 强迫振动

一、运动方程及解

现来研究如图 2-5 所示，在单自由度质量—弹簧—阻尼系统上作用且随时间变化的激振力 $f(t)$ 的情况。

运动方程为

$$m x'' = -c x' - k x + f(t)$$

把上式改写成

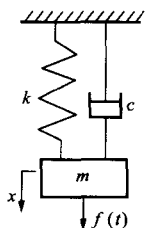


图 2-5 强迫振动

$$m x'' + c x' + k x = f(t)$$

这种由激振力引起的振动称为强迫振动。

设系统受到幅值为 F 、圆频率为 ω 、初相角为 α 的激振力，则

$$f(t) = F \cos(\omega t + \alpha)$$

为简单起见，取 $\alpha = 0$ （这并不影响有关的结论），这时的激振力为

$$f(t) = F \cos \omega t$$

这时运动方程为

$$m x'' + c x' + k x = F \cos \omega t \quad (2-13)$$

设方程 (2-13) 的解为

$$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (2-14)$$

代入式 (2-13)，得

$$\begin{aligned} & [(k - m\omega^2)A + c\omega B] \cos \omega t \\ & + [-c\omega A + (k - m\omega^2)B] \sin \omega t \\ & = F \cos \omega t \end{aligned}$$

式中的 $\sin \omega t$ 和 $\cos \omega t$ 是变量。

为了使等式成立，必须使这些系数相等，因此有

$$\begin{aligned} (k - m\omega^2)A + c\omega B &= F \\ -c\omega A + (k - m\omega^2)B &= 0 \end{aligned}$$

由此解出 A 和 B

$$\begin{aligned} A &= \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F \\ B &= \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F \end{aligned}$$

代入式 (2-14)，得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{k - m\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F \cos \omega t \\ &+ \frac{c\omega}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2} F \sin \omega t \end{aligned}$$

此式可改写为简谐振动的标准形式

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \varphi) \quad (2-15)$$

φ 为相位差（或滞后角），其值为

$$\varphi = \arctan \frac{c\omega}{k - m\omega^2}$$

二、振动特点

把式 (2-15) 改写成一般的形式，可得

$$x(t) = X \cos(\omega t - \varphi) \quad (2-16)$$

振幅

$$X = \frac{X_0}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + (2\zeta\omega/\omega_n)^2}} \quad (2-17)$$

滞后角

$$\varphi = \arctan \frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \quad (2-18)$$