高职高专“十一五”规划教材

高等数学

上册

刘志峰 罗成諟 主编 杨昆山 主审

化学工业出版社

高职高专“十一五”规划教材

高等数学

上册

刘志峰　罗成諟　主编
杨昆山　主审

化学工业出版社
·北京·

本教材是根据教育部颁发的高职高专学校《高等数学课程教学基本要求》编写的。

本教材在编写中充分考虑到高等职业技术教育的特点，切实贯彻了“拓宽基础，强化能力，立足应用”与“必需，够用为度”的原则，并充分考虑到与高中数学课程中高等数学内容的衔接。

本书分上、下两册。上册在复习函数和函数极限的基础上，利用极限分别引出导数与定积分的概念及其运算方法。学习利用微分、积分、常微分方程等用于解决工程技术与其他实际问题的方法。下册包含向量代数与空间解析几何、多元函数微积分初步、无穷级数、拉普拉斯变换、概率论初步、线性代数基础等。下册可根据高职高专不同专业、不同的学生类别选学不同的内容。

本书注重突出应用和典型问题与例题的分析，以培养读者综合运用有关知识解决问题的能力。本书叙述深入浅出，便于自学；理论分析注重几何和物理解析，有必要的抽象概括和逻辑推理。书中每节安排有适量习题，书末附有习题的参考答案。

本书适用于各类高职高专院校、成人高校及本科院校开办的二级职业技术学院和民办高校两年制和三年制（少学时）工程类、经济管理类专业。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 上册/刘志峰，罗成諟主编. —北京：化学工业出版社，2007.6

高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-122-00259-4

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①刘…②罗… Ⅲ. 高等数学-高等学校：技术学院-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 054590 号

责任编辑：旷英姿 于 卉

责任校对：王素芹　　　　装帧设计：尹琳琳

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011）

印　　刷：北京市振南印刷有限责任公司

装　　订：三河市宇新装订厂

787mm×1092mm 1/16 印张 10½ 字数 256 千字 2007 年 7 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686） 售后服务：010-64518899

网　　址：http://www.cip.com.cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：17.00 元

前　言

数学可以帮助人们很好地探求客观世界的规律，能对现代社会中大量繁杂的信息做出最优的判断和选择，同时能为人们交流信息提供一种有效而简捷的手段。数学作为一种普遍适用的技术，有助于人们收集、整理、描述信息、建立模型，进而解决问题，直接为社会创造价值。

在高等职业技术教育中，数学是一门必修的公共基础课。它将为今后学习专业基础课以及相关的专业课程打下必要的数学基础，为这些课程提供必需的数学概念、理论、方法、运算技能和分析问题解决问题的能力素质。基于职业教育的特点，为了适应高等职业技术教育飞速的发展，为了解决好高等职业技术教育的质量和特色问题，为了解决好与现行高中数学内容的衔接，我们编写了这一套所用学时少，又能让学生学到较多的高等数学知识的教材。尤其让学生能学到当代迫切需要的数学知识，以提高对时代的适应能力。

我们认真学习了全国高等职业技术教育《高等数学》教学大纲，经过反复讨论，一致认为编写这套教材的指导思想是：综合考虑，整体优化；重视基础，加强应用；体现现代化，拓宽知识面。本着"降低理论要求，加强实际应用，扩大知识容量，重在能力培养"的原则，以社会主义四化建设及市场经济体制对人才素质的要求为前提，以数学在高等职业技术教育中的功能定位和作用为基础，少一些繁琐的推理和证明，多一些实际应用的范例。

本教材融高等数学与应用数学于一体，突破传统教材体系，做到内容选择适当，重点突出，难点分散；叙述深入浅出，精选例题和习题，便于学生自学；理论分析注重几何和物理解析，有必要的抽象概括和逻辑推理。本书注重突出应用，注重典型问题与例题的分析，以培养学生综合运用有关知识解决问题的能力，书中每节安排有适量习题，书末附有练习题的参考答案。

全书共分两册。上册包含一元函数微积分，常微分方程，是各专业学生必学内容。下册包含多元函数微积分初步、概率论初步、线性代数基础、拉普拉斯变换等。本教材下册可根据高职高专不同专业、不同的学生类别选学不同的内容，供选学的面宽。

本书由刘志峰、罗成諟主编，杨昆山主审。参加本书编写人员有：汪耀武、吕靖（第一章、第二章），唐轮章、龙朝（第三章、第四章），刘志峰、覃东君（第五章、第六章），王益能、谢珊（第七章、第八章），陶盈（第九章、第十章），罗成諟（第十一章、第十二章）。

由于编者水平有限，加之时间仓促，不妥之处，恳请使用本教材广大师生批评指正，以便我们进一步修订提高。

编　者

2007 年 3 月

目　录

第一章　极限与连续

极限是微积分学的重要基本概念，它是导数、定积分以及重积分的基础，而连续函数也是微积分学研究的主要对象．本章将在复习高中数学课程学习过的函数和极限的基础上，进一步深入讨论函数的极限与函数连续性．

第一节　初等函数

在高中数学课程中，已经学习过函数的概念，函数的几种特性，基本初等函数等．为了方便今后学习，现重述如下．

一、函数的概念

定义 1　设 D 是一个实数集，如果对于属于 D 的每一个数 x，按照某个对应关系 f，y 都有确定的值和它对应，那么 y 就称为定义在数集 D 的 x 的**函数**，记为

$$y=f(x)$$

x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**．

在函数 $y=f(x)$ 中，当 x 取定 x_0（$x_0\in D$）时，称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值．当 x 取遍 D 中的一切实数值时，与之对应的函数值的集合 M 称为函数的**值域**．

例 1　已知 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，求 $f(0)$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(-x)$，$f(x+1)$．

解　$f(0)=\dfrac{1-0}{1+0}=1$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{3}}=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\dfrac{x-1}{x+1}$，$f(-x)=\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\dfrac{1+x}{1-x}$，$f(x+1)=\dfrac{1-(1+x)}{1+(1+x)}=\dfrac{-x}{2+x}$．

例 2　求下列函数的定义域．

(1) $y=\sqrt{25-x^2}+\ln\sin x$；(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}+\arcsin\left(\dfrac{x}{2}-1\right)$．

解　(1) 要使函数有定义，必须同时满足

$$\begin{cases}25-x^2\geqslant 0\\ \sin x>0\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi\ (k\in Z)\end{cases}.$$

于是，所求函数的定义域为

$$D=\{x\,|\,-5\leqslant x<-\pi \text{ 或 } 0<x<\pi\}.$$

(2) 要使函数有定义，必须同时满足

$$\begin{cases}3-x^2>0\\ \left|\dfrac{x}{2}-1\right|\leqslant 1\end{cases},$$

解得

$$\begin{cases}-\sqrt{3}<x<\sqrt{3},\\0\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

故函数的定义域为

$$D=\{x\,|\,0\leqslant x<\sqrt{3}\}.$$

二、函数的几种特性

1. 函数的单调性

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而增大，即对于任意的 x_1，$x_2\in(a, b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 称作在区间 (a, b) 内是单调递增的，它的图像沿 x 轴正向而上升．

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内随着 x 的增大而减小，即对于任意的 x_1，$x_2\in(a, b)$，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么函数 $f(x)$ 称作在区间 (a, b) 内是单调递减的，它的图像沿 x 轴正向而下降．

例如 $y=x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 内单调递减，在 $(0, +\infty)$ 内单调递增．$(-\infty, 0)$ 称为函数 $y=x^2$ 的单调递减区间，$(0, +\infty)$ 称为函数 $y=x^2$ 的单调递增区间．

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的偶函数，其图形关于 y 轴对称；如果对于任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是 D 上的奇函数，其图形关于原点对称．

例如 $y=\sin x$、$y=x^3-\dfrac{1}{x}$ 是奇函数，$y=\cos x$、$y=x^4+x^2$ 是偶函数，$y=2^x$、$y=\arccos x$ 既不是奇函数，也不是偶函数．

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个不为零的正数 T，使得对于任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$. 那么函数 $f(x)$ 称作周期函数，T 称为它的一个周期．通常所说的周期函数的周期，指的是它的最小正周期．一个以 T 为周期的周期函数，在定义域内每个长度为 T 的区间上，函数图像有相同的形状．

例如，由于 $\sin(x+2\pi)=\sin x$，所以 $y=\sin x$ 的周期是 $T=2\pi$. $\tan(x+\pi)=\tan x$，所以 $y=\tan x$ 的周期是 $T=\pi$. 同样 $y=\cos x$ 的周期是 $T=2\pi$. $y=\cot x$ 的周期是 $T=\pi$.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使得对于区间 (a, b) 内的一切 x 值，对应的函数值 $f(x)$ 都有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立，那么称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内无界．

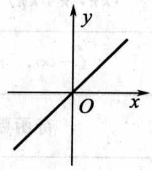
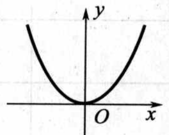
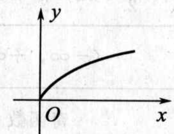
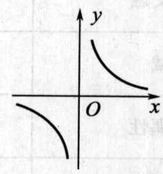
例如，函数 $y=\cos x$ 在它的定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为对任意的 $x\in(-\infty, +\infty)$ 都有 $|\cos x|\leqslant 1$ 成立．又如函数 $y=\tan x$ 在 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是无界的，因为不存在正数 M，使得对于任意的 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，都有 $|\tan x|\leqslant M$ 成立．

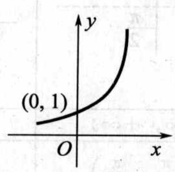
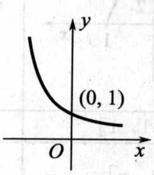
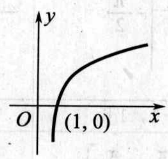
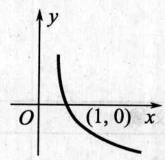
三、基本初等函数

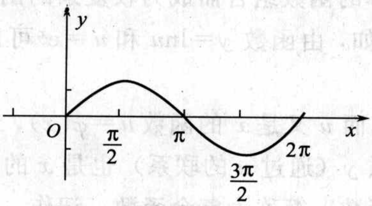
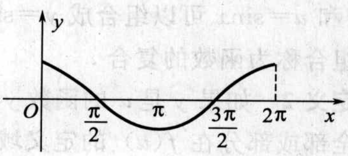
已经学过的幂函数 $y=x^\alpha$ $(\alpha\in R)$，指数函数 $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$，对数函数 $y=\log_a x$

($a>0$，$a\neq1$)，三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$、$y=\sec x$、$y=\csc x$ 和反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\text{arccot}\,x$，这五类函数统称为**基本初等函数**．它们是微积分中所研究对象的基础，为了便于应用，将它们的定义域、值域、图像和主要性质列于表 1-1 中，同学们应该很好地掌握这些内容．

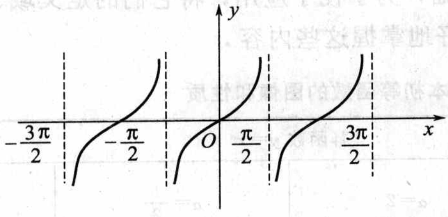
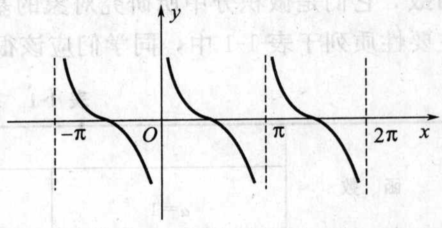
表 1-1　基本初等函数的图像和性质

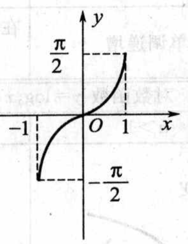
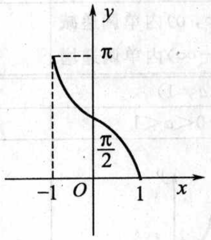
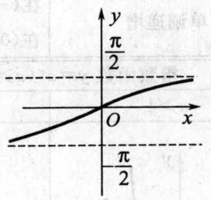
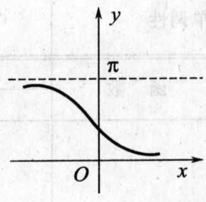
函　数	幂函数 $y=x^\alpha$			
	$\alpha=1$	$\alpha=2$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=-1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
值域	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	非奇非偶	奇函数
单调性	单调递增	在 $(-\infty,0)$ 内单调递减 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增	单调递增	在 $(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$ 内分别单调递减

函　数	指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$		对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$	
	$a>1$	$0<a<1$	$a>1$	$0<a<1$
图像				
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值域	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减

函　数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
图像		
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
奇偶性	奇函数	偶函数
单调性	在 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ 内单调递增 在 $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$ 内单调递减	在 $(2k\pi,\pi+2k\pi)$ 内单调递减 在 $(\pi+2k\pi,2\pi+2k\pi)$ 内单调递增

续表

函　数	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图像		
定义域	$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ $(k\in Z)$	$(k\pi,\ \pi+k\pi)$ $(k\in Z)$
值域	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
奇偶性	奇函数	奇函数
单调性	在$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$内单调递增	在$(k\pi,\ \pi+k\pi)$内单调递减

函　数	$y=\arcsin x$	$y=\arccos x$	$y=\arctan x$	$y=\mathrm{arccot}\, x$
图像				
定义域	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$(-\infty,\ +\infty)$
值域	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	$[0,\ \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$(0,\ \pi)$
奇偶性	奇函数	非奇非偶	奇函数	非奇非偶
单调性	单调递增	单调递减	单调递增	单调递减

四、复合函数

在实际问题中，常会遇到由几个较简单的函数组合而成为较复杂的函数．例如，由函数$y=u^2$和$u=\sin x$可以组合成$y=\sin^2 x$；又如，由函数$y=\ln u$和$u=e^x$可以组合成$y=\ln e^x$，这种组合称为函数的复合．

定义 2　如果y是u的函数$y=f(u)$，而u又是x的函数$u=\varphi(x)$，并且$\varphi(x)$的函数值的全部或部分在$f(u)$的定义域内，那么y（通过u的联系）也是x的函数．称此函数为由函数$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$复合而成的函数，简称为**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中u称作中间变量．

例如，函数$y=\sqrt{1-x^2}$可看作由$y=\sqrt{u}$与$u=1-x^2$复合而成；函数$y=\arcsin(\ln x)$可看作由$y=\arcsin u$与$u=\ln x$复合而成．

值得注意的是，不是任何两个函数都可以复合成一个函数，如$y=\arcsin u$和$u=2+x^2$就不能复合成一个函数，因为对于$u=2+x^2$中的任何u值，都不能使$y=\arcsin u$有意义．

另外，复合函数也可以由两个以上的函数复合成一个函数，如 $y=\ln u$、$u=\sin v$ 及 $v=\sqrt{x}$ 可以复合成函数 $y=\ln\sin\sqrt{x}$.

例 3　试将下列各函数表示成复合函数.

(1) $y=\sin u$，$u=2x$；　　(2) $y=u^2$，$u=e^x$；　　(3) $y=\sqrt{u}$，$u=x^3+6x+1$.

解　(1) $y=\sin u=\sin 2x$，即 $y=\sin 2x$；

(2) $y=u^2=(e^x)^2$，即 $y=e^{2x}$；(3) $y=\sqrt{u}=\sqrt{x^3+6x+1}$，即 $y=\sqrt{x^3+6x+1}$.

例 4　指出函数的复合过程.

(1) $y=(1+x)^5$；　　(2) $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$；

(3) $y=\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$；　　(4) $y=3^{2\cos^2 x}$.

解　(1) $y=(1+x)^5$ 是由两个函数 $y=u^5$，$u=1+x$ 复合而成的；

(2) $y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 是由两个函数 $y=\tan u$，$u=2x+\dfrac{\pi}{4}$ 复合而成的；

(3) $y=\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$ 是由两个函数 $y=\dfrac{1}{u^3}$，$u=1-x^2$ 复合而成的；

(4) $y=3^{2\cos^2 x}$ 是由三个函数 $y=3^u$，$u=2v^2$，$v=\cos x$ 复合而成的.

五、初等函数

定义 3　由基本初等函数与常数经过有限次四则运算和有限次复合而成的函数称为**初等函数**.

由于基本初等函数都是用一个式子表示的，所以由基本初等函数与常数经过有限次四则运算和有限次复合所得的初等函数也都能用一个式子表示.

例如，函数 $y=\sqrt{x^2+3x-8}$，$y=e^{\sin x^2}$，$y=\ln 3-\tan x$ 等都是初等函数.

初等函数是常见的函数，它也是微积分研究的主要对象.

分段函数 $y=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，即 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，它是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的，因此它是一个初等函数.

而分段函数 $y=\begin{cases} 3x+4, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^3+1 & x>0 \end{cases}$ 不能用一个式子表示，因此它不是初等函数.

六、反函数

定义 4　设 $y=f(x)$ 是定义在数集 D 上 x 的函数，其值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 的值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 M 上以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称它为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y)$$

其定义域为 M，值域为 D. 并称 $f(x)$ 为**直接函数**.

当然也可以说 $y=f(x)$ 是 $x=f^{-1}(y)$ 的反函数，就是说，它们互为反函数. 显然，由定义可知，单调函数一定有反函数. 习惯上，总是用字母 x 表示自变量，而用字母 y 表示函数，所以通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

若在同一坐标平面上作出直接函数 $y=f(x)$ 和反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形，则这两个

图形关于直线 $y=x$ 对称．例如，函数 $y=a^x$ 和它的反函数 $y=\log_a x$ 的图形就关于直线 $y=x$ 对称．

例 5　求 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的反函数．

解　在函数 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的定义域（$-\infty$，$+\infty$）内，它是单调函数．由 $y=\frac{1}{2}x+3$ 解出 x，得

$$x=2y-6.$$

将其中 x 换成 y，y 换成 x，便得 $y=\frac{1}{2}x+3$ 的反函数为

$$y=2x-6\ (-\infty,+\infty).$$

习　题　1-1

1. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(2x-1)+\sqrt{\frac{-1}{2x-4}}$；　　(2) $y=\arcsin 3x+7e^x$；

(3) $y=\frac{2}{x^3}+\sqrt[3]{x-4}$；　　(4) $y=\begin{cases}2x+3 & -1\leqslant x<1\\ 0 & 1\leqslant x<3\\ -x & x\geqslant 3\end{cases}$．

2. 将下列各题中的 y 表示成 x 的函数：

(1) $y=(u-2)^2$，$u=\sin x$；

(2) $y=\log_a 2u$，$u=v^2$，$v=3x-1$；

(3) $y=3u^2-2u$，$u=\sqrt{v}$，$v=2x$；

(4) $y=\sin u$，$u=v^3+4$，$v=2x-1$.

3. 下列各函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=(2x-1)^2$；　　(2) $y=e^{3x+8}$；

(3) $y=\sqrt{1-\ln x^2}$；　　(4) $y=[\arcsin(ax+b)]^3$.

4. 一物体作直线运动，已知阻力 f 的大小与物体运动的速度 v 成正比，但方向相反．当物体以 1m/s 的速度运动时，阻力为 1.96×10^{-2}N，试建立阻力与速度之间的函数关系式．

5. 火车站收取行李费的规定如下：当行李不超过 50kg 时，按基本费用计算．每公斤收费 0.15 元；当超过 50kg 时，超重部分按每公斤 0.25 元收费．试求运费 y（元）与重量 x（kg）之间的函数关系，指明定义域，并作出该函数的图形．

第二节　极限的概念　无穷小与无穷大

在高中数学课程中，已经学习过数列的极限和函数的极限的概念，现重述如下．

一、数列的极限

定义 1　对于数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时（$n\to\infty$），x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限．记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty)$$

亦称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A；如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称数列 $\{x_n\}$ 是发散的．

数列极限的运算法则为：

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，那么

法则 1 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A\pm B$；

法则 2 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_ny_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}y_n=AB$；

法则 3 $\lim\limits_{n\to\infty}Cx_n=C\lim\limits_{n\to\infty}x_n=CA$（$C$ 是常数）；

法则 4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\dfrac{A}{B}\ (B\neq0)$.

以上法则 1、法则 2 可以推广到有限个数列的和与积的情形．

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 2 如果当 x 的绝对值无限增大（即 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 当 } x\to\infty \text{ 时}, f(x)\to A.$$

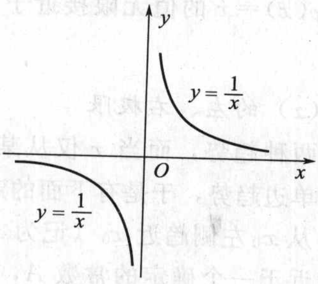


图 1-1

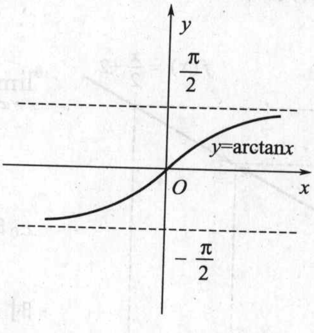


图 1-2

如图 1-1 所示，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 x 的绝对值无限增大时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的图像无限接近于 x 轴．也就是，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 无限地接近于常数零，即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

在上述定义中，自变量 x 的绝对值无限增大指的是既取正值无限增大（记为 $x\to+\infty$），同时也取负值而绝对值无限增大（记为 $x\to-\infty$）．但有时自变量的变化趋势只能或只需取这两种变化的一种情形，为此有下面的定义．

定义 3 如果当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$（或 $x\to-\infty$）时的极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或当 } x\to+\infty \text{ 时}, f(x)\to A;$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或当 } x\to-\infty \text{ 时}, f(x)\to A.$$

由图 1-1 可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 及 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$，这两个极限与 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$ 相等，都是 0.

由图 1-2 可以看出，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$. 由于当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 时，函数 $y=\arctan x$ 不是无限趋近于同一个确定的常数，所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在．由上面的讨论，得出下面的定理：

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 的充要条件是：

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \tag{1-1}$$

（证明从略）

2. 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个近旁（点 x_0 本身可以除外）内有定义，如果当 x 趋于 x_0（但 $x\neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 当 } x\to x_0 \text{ 时}, f(x)\to A.$$

如图 1-3 所示，由定义 4 知，当 $x\to 2$ 时，$f(x)=\frac{x}{2}+2$ 的极限是 3，即 $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}+2\right)=3$.

例 1 考察极限 $\lim\limits_{x\to x_0} C$（C 为常数）和 $\lim\limits_{x\to x_0} x$.

解 因为当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的值恒为 C，所以 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} C=C$.

因为当 $x\to x_0$ 时，$\varphi(x)=x$ 的值无限接近于 x_0，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$.

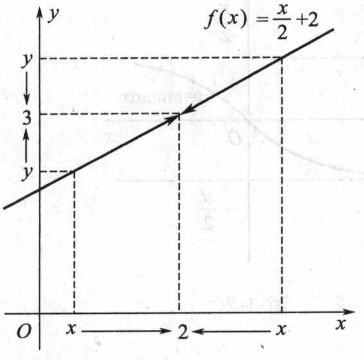


图 1-3

3. 当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的左、右极限

因为 $x\to x_0$ 有左右两种趋势，而当 x 仅从某一侧趋于 x_0 时，只需讨论函数的单边趋势，于是有下面的定义.

定义 5 如果当 x 从 x_0 左侧趋近 x_0（记为 $x\to x_0-0$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^- -0)=A.$$

如果当 x 从 x_0 右侧趋近 x_0（记为 $x\to x_0+0$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个确定的常数 A，那么 A 称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的右极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f(x_0+0)=A.$$

如图 1-3 所示，由函数 $f(x)=\frac{x}{2}+2$，当 $x\to 2$ 时的变化趋势可知：

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}\left(\frac{x}{2}+2\right)=3,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}\left(\frac{x}{2}+2\right)=3,$$

这时

$$f(2-0)=f(2+0)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}+2\right)=3.$$

由上面讨论，可得出下面的定理.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=A \tag{1-2}$$

（证明从略）

例 2　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$$

当 $x\to 0$ 时的极限．

解　观察图 1-4 可知：

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x-1)=-1,\ f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+1)=1.$$

因此，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左右极限存在但不相等，由定理 2 知，极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在．

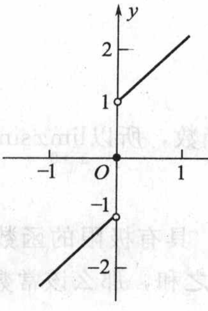


图 1-4

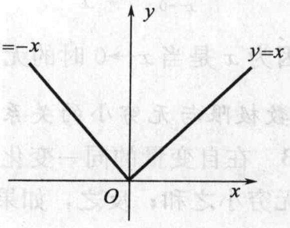


图 1-5

例 3　研究当 $x\to 0$ 时，$f(x)=|x|$ 的极限．

解　观察图 1-5 可知：

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0.$

所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 的左，右极限都存在且相等．由定理 2 知 $x\to 0$ 时，$f(x)=|x|$ 的极限存在，且等于 0.

三、无穷小

实际问题中，常有极限为零的变量．例如，电容器放电时，其电压随着时间的增加而逐渐减小并趋近于零．对于这样的变量，有下面的定义．

1. 无穷小的定义

定义 6　若当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 的极限为零，则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷小**．

例如，因为 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$，所以函数 $x-1$ 是当 $x\to 1$ 时的无穷小．又如，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$，所以函数 $\dfrac{1}{x^2}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小．

应该注意的是：

(1) 说一个函数 $f(x)$ 是无穷小，必须指明自变量 x 的变化趋向，例如函数 $\dfrac{1}{x^2}$ 是当 $x\to$

∞时的无穷小，而当 $x\to 0$ 或 $x\to 1$ 时，$\frac{1}{x^2}$就不是无穷小；

(2) 无穷小是一个函数，而不是一个绝对值很小的数；

(3) 常数中只有"0"可以看成是无穷小，因为 $\lim\limits_{x\to\infty} 0=0$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} 0=0$.

2. 无穷小的性质

性质 1 有限个无穷小的代数和为无穷小；

性质 2 有限个无穷小的积为无穷小；

性质 3 有界函数与无穷小的积为无穷小.

因为常数可以看作有界函数，所以根据性质 3，有

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

以上性质证明从略.

例 4 求极限$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$.

解 因为 x 是当 $x\to 0$ 时的无穷小，而 $\sin\frac{1}{x}$是一个有界函数，所以$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$.

3. 函数极限与无穷小的关系

定理 3 在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）中，具有极限的函数等于它的极限与一个无穷小之和；反之，如果函数可表示为常数与无穷小之和，那么该常数就是这个函数的极限.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，令 $\alpha=f(x)-A$，则

$$\lim_{x\to x_0}\alpha=\lim_{x\to x_0}[f(x)-A]=\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}A=A-A=0.$$

这说明 α 是当 $x\to x_0$时的无穷小. 由于 $\alpha=f(x)-A$，所以

$$f(x)=A+\alpha.$$

反之，设 $f(x)=A+\alpha$，其中 A 为常数，α 是当 $x\to x_0$时的无穷小，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}(A+\alpha)=A.$$

即常数 A 就是函数 $f(x)$ 的极限.

当 $x\to\infty$时，类似可以证明定理 3 成立.

四、无穷大

1. 无穷大的定义

定义 7 若当 $x\to x_0(x\to\infty)$时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大**.

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时为无穷大，它的极限是不存在的，但为了便于描述函数的这种变化趋势，也可以说"函数的极限为无穷大"，并记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

例如，当 $x\to 0$ 时，$\frac{1}{x}$是一个无穷大，又例如，当 $x\to+\infty$时，e^x是一个无穷大.

应该注意的是：

(1) 说一个函数 $f(x)$ 是无穷大，必须指明自变量 x 的变化趋向；

(2) 无穷大是一个函数，而不是一个绝对值很大的常数.

2. 无穷大与无穷小的关系

当 $x\to 2$ 时，$x-2$ 是无穷小，$\dfrac{1}{x-2}$是无穷大；当 $x\to\infty$时，x 是无穷大，$\dfrac{1}{x}$是无穷小.

一般来讲，在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 为无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

利用这个关系，可以求一些函数的极限.

例 5 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}$.

解 容易看出，函数 $f(x)=1+x^2$ 当 $x\to\infty$时为无穷大，由无穷大与无穷小的关系所以$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{1+x^2}=0$.

例 6 求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x-1}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x+3}=0$，由无穷大与无穷小的关系，所以$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x-1}=\infty$.

习 题 1-2

1. 利用函数图像，观察函数的变化趋势，并写出其极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}$； (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$； (3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{10}\right)^x$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{x}\right)$； (5) $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)$； (6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant -1\\ 1, & x<-1\end{cases}$，作出它的图像，求出当 $x\to -1$ 时，$f(x)$ 的左极限、右极限，并判断当 $x\to -1$ 时，$f(x)$ 的极限是否存在？

3. 设 $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}$，求 $f(1-0)$ 和 $f(1+0)$，并判断 $f(x)$ 在 $x\to 1$ 时的极限是否存在？

4. 设 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{1-x}$，求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

5. 下列函数在自变量怎样变化时是无穷小？无穷大？

(1) $y=\dfrac{1}{x^3}$； (2) $y=\dfrac{1}{1+x^2}$； (3) $y=\ln x$； (4) $y=\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{x}}$.

6. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$； (2) $\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}$； (3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x-1}$； (4) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2}{(x-2)^2}$.

第三节 函数极限的运算法则 两个重要极限

一、函数极限的运算法则

与数列极限类似，函数的极限也有如下四则运算法则.

设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$，则

法则 1 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$；