新兴

高职基础课系列教材

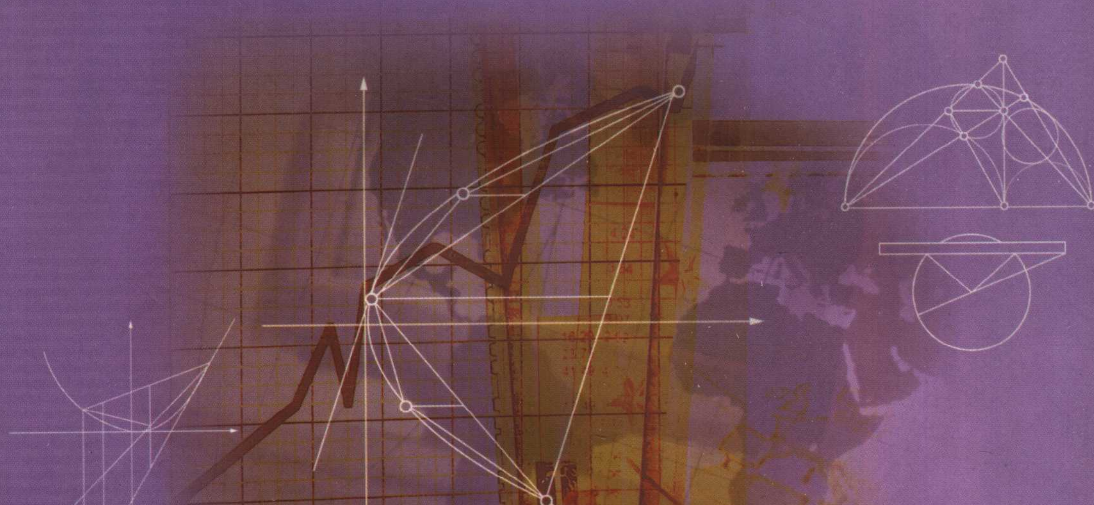
经济数学基础

主编◎王春珊

JINGJI SHUXUE JICHU

本书以“淡化理论、掌握概念、结合专业、强化应用”为重点，体现了以应用为目的，以培养学生用数学的思维去解决问题的能力为原则，力求用易懂的语言阐述高等数学中的基础知识和基本概念。充分考虑高职高专学生的特点和实际水平。

本书可作为高职高专经济类及管理类各专业通用的高等数学教材，也可作经管类人员更新知识的自学用书。



中国科学技术大学出版社

经济数学基础

JINGJI SHUXUE JICHU

高职基础课系列教材

经济数学基础

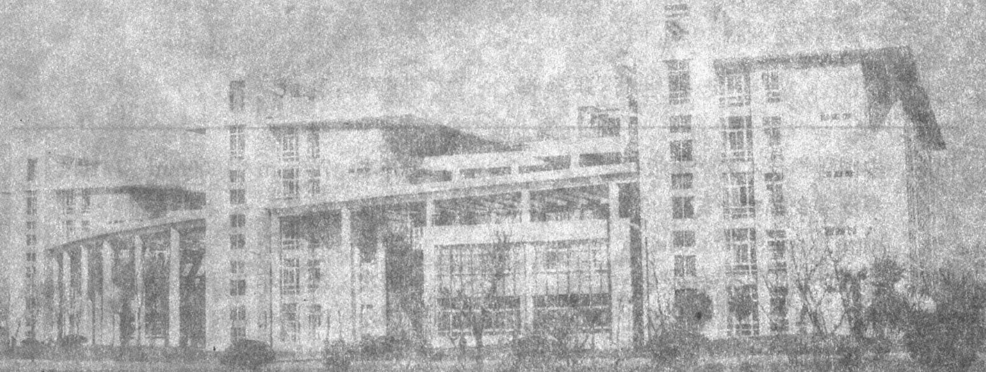
JINGJI SHUXUE JICHU

主　　编　王春珊

副 主 编　杨仁付　王学平

参加编写　王国强　张绍兰

丁　浩



中国科学技术大学出版社

内 容 提 要

本书为高职高专教材，经过作者多年教学实践和在吸收“十五”、“十一五”规划教材成果的基础上编写而成. 主要内容包括：极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分与定积分，行列式与矩阵，线性方程组，随机事件与概率，随机变量及其数字特征，统计量，参数估计及假设检验.

本书充分考虑高职高专学生的特点和实际水平，以“淡化理论，掌握概念，结合专业，强化应用”为重点，以应用为目的，以培养学生用数学的思维去解决问题的能力为原则，力求用易懂的语言阐述高等数学中的基础知识和基本概念.

本书可作为高职高专经济类及管理类各专业通用的高等数学教材，也可作为经管类人员更新知识的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/王春珊主编. —合肥：中国科学技术大学出版社，2007. 8
ISBN 978-7-312-02085-8

Ⅰ. 经…　Ⅱ. 王…　Ⅲ. 经济数学　Ⅳ. F224. 0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 109781 号

选题组稿：职教部　　文字编辑：孔庆勇

出版	中国科学技术大学出版社 安徽省合肥市金寨路 96 号，邮编：230026 http://press. ustc. edu. cn	**开本**	700mm×1000mm　1/16
		印张	18. 25
		字数	347 千
印刷	合肥现代印务有限公司	**版次**	2007 年 8 月第 1 版
发行	中国科学技术大学出版社	**印次**	2007 年 8 月第 1 次印刷
经销	全国新华书店	**定价**	28. 00 元

前　　言

这几年随着我国高等教育尤其是高职高专教育的飞速发展，无论是学生的实际水平还是相关专业课对高等数学知识的要求都在不断变化，什么样的教材才能正真适合高职学生的特点？这个问题一直困扰着广大教育工作者. 在本书的编写过程中，主要遵循以下原则：

1. 淡化理论，突出实用. 本书在理论上以学生易理解和不影响教学体系为尺度，注重以几何图形直观启发学生. 结合经济及管理类专业实际，列举了大量的经济数学模型和数学在经管方面的应用.

2. 通俗易懂. 结合学生实际水平，在教材内容处理上力求通俗易懂，深入浅出. 在介绍基本理论和重要定理时，没有采用传统的严谨数学论证方法，而是注重以实例引入概念和定理，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识和兴趣，培养学生用数学的原理和方法解决问题的能力.

3. 把方法的应用程序化、步骤化.

4. 在每章或每节开始，用尽可能短的语言点题，以便起到承上启下的作用，增加可读性.

考虑到不同院校不同专业对高等数学知识的要求不一样、课时分配不同等实际原因，教材的编写采取模块化方式，全书共分为 3 个模块：一元函数的微积分；线性代数；概率论与数理统计. 每块内容相对独立，有利于不同院校根据实际情况灵活安排，方便教师有选择地教学.

本书由王春珊副教授任主编，杨仁付、王学平担任副主编，王国强、张绍兰、丁浩参编. 其分工如下：第 1、2 章由王国强编写，第 3 章由丁浩编写，第 4、5 章由王学平编写，第 6、7、8 章由杨仁富编写，第 9、10 章由王春珊编写，第 11 章由张绍兰编写.

本书在审稿和校订过程中梁艳老师做了大量细致工作，在此表示衷心感谢，同时在教材编写过程中广泛参考了国内外教材和书籍，借鉴和吸收了其他同行的研究成果，在此一并致谢！

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2007 年 3 月

目　　录

第1章　极限与连续

学习目标

了解函数和反函数的概念，函数的性质；极限的概念；无穷小与无穷大的概念；闭区间上连续函数的性质；初等函数的连续性.

理解复合函数、初等函数和分段函数的概念；成本函数、收入函数、利润函数、需求函数、供给函数的概念与关系；函数左、右极限与函数极限的关系；无穷小的性质；函数在一点连续的概念及分段函数在分界点处的连续性.

掌握极限四则运算法则.

会应用函数关系描述经济问题；会比较无穷小的阶；会用两个重要极限求极限.

微积分是研究变量和变量间函数关系的一门学科. 极限概念是它的基本概念之一，导数、微分、积分等概念都要用极限来表述. 本章我们将在高中已学习过的函数基础上进行系统复习和必要的补充，再介绍极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质，为后续学习作准备.

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

1. 常量与变量

在研究实际问题时，经常遇到各种不同的量，如长度、时间、气温、产量、利润、速度等. 在考查的过程中，保持不变的量称为**常量**；发生变化，可以取不同数值的量称为**变量**. 例如圆周率 π 是个永远不变的量，匀速直线运动的速度是常量；而匀速直线运动的时间和路程，一天中的气温都是变量.

常量习惯用字母 a,b,c,d,e,f 等表示，变量习惯用字母 x,y,z,u,v,w 等表示.

2. 函数的概念

在实际问题中，一个变量的值往往取决于另一个变量的值. 如一个圆盘的面积 S 就由半径 r 惟一确定，水达到沸点的温度 T 就取决于海拔高度 h.

定义 1.1 已知变量 x 与 y，当变量 x 在某个非空数集 D 内任取一个实数值时，变量 y 按照一定的对应法则 f，总有惟一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为函数的**定义域**.

当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 相对应的 y 的值叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍定义域 D 内的所有值，对应函数值的集合 $M=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

函数 $y=f(x)$ 中的符号"f"表示 x 与 y 之间的对应法则，它也可以用其他字母表示，如 $y=g(x)$，$y=h(x)$，$y=\Phi(x)$，$y=G(x)$ 等.

注：定义域与对应规则是构成函数的两个基本要素，只有定义域与对应规则完全相同的两个函数才是相同的函数.

例 1 某种商品的需求量 Q 与价格 P 的关系为 $5Q+P-28=0$.

当变量 P 在上述方程式适用范围内任取一个数值时，根据对应规则，可得到一个确定的 Q 值与之对应.

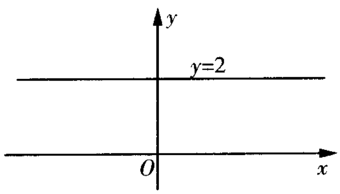


图 1.1

例 2 函数

$$y=2$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=\{2\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1.1 所示.

例 3 下列各对函数中（　　）不是同一个函数.

A. $y=\dfrac{x}{x^2}$ 与 $y=\dfrac{1}{x}$

B. $y=3^{2x}$ 与 $y=9^x$

C. $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg|x|$

D. $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$ 与 $y=\sin x$

解 答案 D.

常用的函数表示法有公式法（解析法）、表格法和图像法.

例 4 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求函数 $f(x)$ 的解析式.

解 因为

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

所以

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$$

故函数 $f(x)=x^2-2$ 且定义域为 $D=\{x\mid x\geqslant 2\text{ 或 }x\leqslant -2\}$.

1.1.2 分段函数与反函数

1. 分段函数

分段函数是指在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的数学式子表示的函数.

例 5 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $M=[0,+\infty)$，它的图形如图 1.2 所示. 该函数称为绝对值函数.

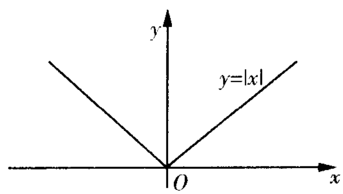


图 1.2

例 6 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$，$f(0)$ 和 $f(\Delta x)$.

解 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)=\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{4}{\pi^2}$

$f(0)=0$

当 $\Delta x=0$ 时，$f(\Delta x)=f(0)=0$；

当 $\Delta x\neq 0$ 时，$f(\Delta x)=(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}$.

2. 反函数

定义 1.2 设 $y=f(x)$ 是 x 的函数，其值域为 M，若对于 M 中的每一个 y 值，都有一个确定的且满足 $y=f(x)$ 的 x 值与之对应，则得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作 $x=f^{-1}(y)$，并称 $y=f(x)$ 为**直接函数**.

显然 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 互为反函数. 习惯上，我们总是用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，故通常把 $x=f^{-1}(y)$ 改写为 $y=f^{-1}(x)$.

函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

求反函数的步骤：

① 从 $y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$；

② 交换字母 x 和 y,得到函数 $y = f(x)$ 的反函数 $y = f^{-1}(x)$.

例 7 求函数 $y = 2x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 2x + 1$ 解得 $x = \frac{y-1}{2}$,互换 x 和 y 得函数 $y = 2x + 1$ 的反函数为

$$y = \frac{x-1}{2}$$

1.1.3 函数的几种特性

1. 函数的有界性

定义 1.3 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个正数 M,对于所有的 $x \in D$,恒有 $|f(x)| \leqslant M$,则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上是**有界**的. 如果不存在这样的正数 M,则称函数 $y = f(x)$ 在 D 上是**无界**的.

例如,函数 $f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内就有

$$|\sin x| \leqslant 1$$

对任一的实数 x 都成立,故函数 $f(x) = \sin x$ 在$(-\infty, +\infty)$ 内是有界的. 且比 1 大的数都可以作为正数 M.

2. 函数的单调性

定义 1.4 设函数 $y = f(x)$ 在定义区间 I 内有定义,若对于 I 内的任意两点 x_1, x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $y = f(x)$ 在定义区间 I 内是**单调增加**的;若对于 I 内的任意两点 x_1, x_2,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $y = f(x)$ 在定义区间 I 内是**单调减少**的.

显然,单调增加函数图像从左至右逐渐上升;单调减少函数图像从左至右逐渐下降.

3. 函数的奇偶性

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = f(x)$$

成立,则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对于任一 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = -f(x)$$

成立,则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

注:偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称.

例如,函数 $y = f(x) = 0, x \in R$ 就是一个既是奇函数又是偶函数的函数;$y = x^2$ 和 $y = \cos x$ 都是偶函数;$y = x^3$ 和 $y = \sin x$ 都是奇函数;$y = e^x$ 既不是奇函数也不是偶函数.

4. 函数的周期性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个常数 $T \neq 0$,使得对于任意 $x \in D$,都有 $x+T \in D$,且 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 是以 T 为周期的**周期函数**.

注:周期函数的周期不是惟一的,如果 T 是函数 $f(x)$ 的周期,则 T 的整数倍都是它的周期,通常所说的周期是指最小正周期.

例如,函数 $y=f(x)=c, x \in R$ 就是一个以任意非零实数为周期的周期函数;函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;$y=e^x$ 不是周期函数.

1.1.4 初等函数

1. 基本初等函数

我们把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(1) 常数函数 $y=f(x)=c$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,无论 x 取什么值,都有 $y=c$,它的图像是一条过点$(0,c)$与 x 轴平行(重合)的直线.

(2) 幂函数 $y=x^\alpha$ (α 为实数)

幂函数 $y=x^\alpha$ (α 为实数)的图像都经过点$(1,1)$,且当 $\alpha>0$ 时,幂函数 $y=x^\alpha$ 在区间$(0,+\infty)$内单调增加;当 $\alpha<0$ 时,幂函数 $y=x^\alpha$ 在区间$(0,+\infty)$内单调减少.

(3) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)

因为 $a>0$,无论 x 取何值,总有 $a^x>0$,所以指数函数的图像总在 x 轴上方. 又因为 $a^0=1$ ($a>0$),所以函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)的图像都通过点$(0,1)$.

当 $a>1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,指数函数 $y=a^x$ 是单调减少的.

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)

特别当 $a=10$ 时,称为常用对数,记为 $y=\log_{10}x$,简记为 $y=\lg x$;当 $a=e$ 时(其中 $e=2.718\ 281\ 828\cdots\cdots$ 是一个无理数,是为了纪念著名数学家欧拉而命名的),称为自然对数,记为 $y=\log_e x$,简记为 $y=\ln x$,它在工程技术上经常用到.

因为对数函数与指数函数互为反函数,所以它们的图像关于直线 $y=x$ 对称. 故对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a\neq 1$)的图像总在 y 轴的右侧,且通过点

(1,0).

当 $a>1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的;当 $0<a<1$ 时,对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的.

(5) 三角函数

函数 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$ 统称为三角函数.

(6) 反三角函数

正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数称为反正弦函数,记作 $y=\arcsin x$.

余弦函数 $y=\cos x$ 在区间 $[0,\pi]$ 上的反函数称为反余弦函数,记作 $y=\arccos x$.

正切函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数称为反正切函数,记作 $y=\arctan x$.

余切函数 $y=\cot x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的反函数称为反余切函数,记作 $y=\mathrm{arccot}\, x$.

2. 复合函数

我们看下面的函数:

$$y=\ln(1+x^2)$$

显然,它不是基本初等函数.但是,它可以看作是由两个简单函数构成的.

定义 1.7 设函数 $y=f(u), u=\varphi(x), x\in D$. 如果在 D 的某个非空子集 D_1 上,对于 $x\in D_1$ 的每一个 x 值所对应的 u 值,都能使函数 $y=f(u)$ 有定义,则 y 是 x 的函数.这个函数叫作由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数,简称为 x 的**复合函数**,记作 $y=f[\varphi(x)]$,其中 u 叫做中间变量.复合函数的定义域是 D_1.

例如,函数 $y=\ln(1+x^2)$ 就是由 $y=\ln u$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成,它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,值域是 $[0,+\infty)$.

例 8 写出下列函数的复合函数.

(1) $y=u^5, u=\cos x$;　　(2) $y=u^2-2u+2, u=x^2+1$;

(3) $y=u^2, u=2^x$;　　(4) $y=\arctan u, u=e^v, v=\sqrt{x}$.

解 (1) 将 $u=\cos x$ 代入 $y=u^5$ 得所求的复合函数是 $y=\cos^5 x$;

(2) 用代入法可得 $y=(x^2+1)^2-2(x^2+1)+2$,化简整理得 $y=x^4+1$;

(3) 用代入法可得 $y=(2^x)^2$,即 $y=4^x$;

(4) 用代入法可得 $y=\arctan e^{\sqrt{x}}$.

例 9 指出下列函数的复合过程.

(1) $y=3^{\frac{1}{x}}$；　(2) $y=\sin^3 5x^2$；

(3) $y=\ln\cos 3\sqrt{x}$；　(4) $y=\arctan 2\sqrt{1-x^2}$；

(5) $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$；　(6) $y=\cos(\sqrt{1+\lg x})$.

解　(1) 函数 $y=3^{\frac{1}{x}}$ 的复合过程是 $y=3^u, u=\frac{1}{x}$；

(2) 函数 $y=\sin^3 5x^2$ 的复合过程是 $y=u^3, u=\sin v, v=5x^2$；

(3) 函数 $y=\ln\cos 3\sqrt{x}$ 的复合过程是 $y=\ln u, u=\cos v, v=3\sqrt{x}$；

(4) 函数 $y=\arctan 2\sqrt{1-x^2}$ 的复合过程是 $y=\arctan u, u=2\sqrt{v}$, $v=1-x^2$；

(5) 函数 $y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}}$ 的复合过程是 $y=\sqrt{u}, u=\cot v, v=\frac{x}{2}$；

(6) 函数 $y=\cos(\sqrt{1+\lg x})$ 的复合过程是 $y=\cos u, u=\sqrt{v}, v=1+\lg x$.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算或有限次的复合，并且能够用一个数学式子表示的函数，我们称为**初等函数**.

例如，$y=\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{x}$，$y=\arcsin\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$，$y=\lg\cos 2^x$ 等都是初等函数.

注：分段函数一定不是初等函数. 如 $y=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，$y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0. \\ -1 & x<0 \end{cases}$

还有 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 就不是初等函数，但 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n (n\in\mathbf{N})$ 是初等函数.

1.1.5　经济学中常用的函数

1. 成本函数、收入函数和利润函数

(1) 成本函数

在产品的生产过程中，产品的总成本 C 是产量 x 的单调增加函数，记作 $C=C(x)$，它由两部分组成：固定成本 C_1（厂房、设备的折旧费，管理人员的工资，广告费等）；可变成本 $C_2(x)$，它是随产品数量的变化而变化的（原材料费、燃料费、包装费等）. 于是总成本

$$C(x)=C_1+C_2(x)$$

平均成本函数

$$\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$$