普通高等教育"十一五"国家级规划教材

新世纪高等学校教材

WEIJIFENXUE JIANGYI

数学及应用数学专业主干课程系列教材

邝荣雨 等 编著

北京师范大学数学科学学院 组编

微积分学讲义 第二版

(第二册)

$$d[\int_a^x f(t)dt]=f(x)dx$$

4

北京师范大学出版社

BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS

0172
196
:2
2006

新世纪高等学校教材

数学及应用数学专业主干课程系列教材

（第二册）

北京师范大学数学科学学院 组编

微积分学讲义

WEIJIFENXUE JIANGYI

邝荣雨 薛宗慈 陈平尚 蒋 铎 李有兰 编著

北京师范大学出版社
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PRESS
北 京

内容提要

本书分四册. 第一册是一元与多元微积分初步;第二册是一元微积分的理论与方法;第三册是多元微积分理论与计算. 这三册可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书. 最后一册为专册,它包含若干专题,供教学选用或课外参考.

本书是作者在总结最近几年来北京师范大学数学系本科数学分析课程教学改革的经验的基础上写成的. 作者将现行的数学分析课程的内容分为两个阶段(首先侧重于概念、计算,进而侧重理论、方法)进行讲授,教学效果达到预期的目的.

本册内容包括一元(数值)函数的极限理论、一元微积分学的基本理论、数项级数与广义积分、函数项级数与函数展开和含参变量积分.

未经同意,不得编写出版本书思考题与习题的解答.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学讲义. 第二册/邝荣雨,薛宗慈等编著. —2 版. 北京:北京师范大学出版社,2006.
新世纪高等学校教材
ISBN 7-303-00605-2

Ⅰ. 微... Ⅱ. ①邝... ②薛... Ⅲ. 微积分－高等学校－教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 006870 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码: 100875)
http://www.bnup.com.cn
出版人: 赖德胜
北京新丰印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本: 170 mm×230 mm 印张: 20 字数: 380 千字
2006 年 1 月第 2 版 2006 年 1 月第 1 次印刷
印数: 1~3 000 册 定价: 28.00 元

第二版前言

1915 年北京高等师范学校成立数理部，1922 年成立数学系. 2005 年适逢数理部诞辰 90 周年，也是北京师范大学数学科学学院建院 1 周年. 经过 90 年的风风雨雨，数学科学学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了丰富的经验. 将这些经验落实并贯彻到教材编著中去是大有益处的.

1980 年，北京师范大学出版社成立，给教材的出版提供了一个很好的契机. 我院教师编著的数十种教材已先后在这里出版. 除了北京师范大学现代数学丛书外，就大学教材而言，共有五种版本. 第一种是列出编委会的高等学校教学用书，这是在 20 世纪 80 年代初期，由北京师范大学出版社王文湧先生约请北京师范大学数学与数学教育研究所所长严士健教授等组成编委会，研究编写出版一套数学系本科生教材和非数学专业高等数学教材. 在出版社的大力支持下，这一计划完全实现，满足了当时教学的需要. 第二种是标注高等学校教学用书，但未列编委会的教材. 第三种是(北京师范大学)面向 21 世纪课程教材. 第四种是北京师范大学现代数学课程教材. 第五种是未标注高等学校教学用书，但实际上是高等学校教学用书. 在这些教材中，除再次印刷外，已经有五部教材进行了修订或出版了第二版.

前一段时间，王建华老师和王琦老师分别搜集了我院本科生的所有教材和研究生 12 门基础课教材的使用情况，李仲来教授汇总了我院教师在北京师范大学出版社出版的全部著作，由李仲来教授和北京师范大学理科编辑部王松浦主任进行了沟通和协商，准备对数学科学学院教师目前使用或誊印(出版社已经没有存书的教材)的北京师范大学出版社出版的部分教材进行修订后再版. 计划用几年时间，出版数学和应用数学、数学教育、数学学科硕士研究生三个系列的主要课程教材.

本套教材可供高等师范院校本科生、教育学院数学系、函授(数学专业)和在职中学教师等使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2005 年 8 月 8 日

第二版编者的话

参加本次修订的人员有:邝荣雨,薛宗慈,陈平尚,李有兰.

本次修订,时间仓促,只好先抓紧时间,进行大大小小的各种勘误,然后,在时间允许下,在不改变原书结构、体系的情况下,对原书内容作了一些修订、增补.例如,在函数一节中,对中学函数的公式法给出了较确切的含义,对函数之间的各种关系提高到函数空间中给予了定义等,在极限一节中,将原书的"再谈极限"中的内容,一部分放到"极限概念"中,一部分放到"极限性质"中,再适当删去关于"函数的阶"的内容,这就使得整节内容更精炼、更简捷;对书中某些定理与例题的证法与解法做了一些删繁就简的变动.如带拉格朗日余项的泰勒公式的证明等;在级数、广义积分与极限计算中,突出并强调阶的估计法的运用等.另外,对个别练习题与例题作了一些变动,适当增加了一些现在社会与经济方面的练习题.并对全书的思考题进行了一次仔细的审阅,适当增加了一些思考题,相信它们对提高读者的钻研能力会有较大的帮助.

任何对本书的错误与不妥之处的批评指正都是对本书的最大支持!

非常感谢北京师范大学数学科学学院郑学安教授,王昆扬教授,他们将使用原书时所发现的错误与不妥之处提供给编者,我们已在修订中加以采纳.

非常感谢北京师范大学数学科学学院的领导对本次修订工作的鼓励与支持!

非常感谢北京师范大学出版社的支持!

本书第二版编者

北京师范大学数学科学学院

2005 年 8 月

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

出版说明

北京师范大学是一所具有80多年历史的老学校,在学科建设和教学实践中积累了一定的经验,将它贯彻到教材中去无疑是有益的.为了加强教材建设.加强与兄弟院校的交流,我社约请北京师范大学数学和数学教育研究所所长严士健教授等组成教材编委会,研究编写出版一套教材.编委会在研究当前教学改革的新情况和过去的教学经验的基础上,同时参照原教育部1984年颁发的中学教师进修大纲,对教材的编写宗旨和要求进行认真地讨论.组织数学系有教学经验的教师进行编写,并且由编委等分工负责对书稿进行审订.

这套教材包括数学分析、解析几何、高等代数、概率论与数理统计、常微分方程、复变函数论、抽象代数基础、高等几何、微分几何、实变函数论与泛函分析、计算方法、理论力学以及高等数学(物理、天文、无线电等专业用)等.

这套教材文字通俗易懂.内容由浅入深、循序渐进,便于自学,科学系统性较强.每章有小结,每节(或几节)后配有习题.每章有总复习题,习题安排由易而难,层次清楚.书后附有习题答案或提示,以利于读者自学时检查自己的作业.

为了适应不同层次学校和人员的需要,书中有些内容加了“*”号,它相对独立,如因学时较少,可以删去.

这套教材可供高等师范院校本科生(或专科)、教育学院数学系、函授(数学专业)、在职中学教师进修等使用.

北京师范大学出版社

1984年

第一版编者的话

本讲义分四册出版，第一册是一元与多元微积分初步；第二册是一元微积分理论与方法；第三册是多元微积分理论与计算. 这三册内容可作为数学系本科数学分析课程教材或教学参考书. 最后一册为专册，它包含若干专题，供教学选用或课外参考.

编写本书最主要的想法是尝试把现行数学分析课程的内容分两阶段进行讲授，以期达到下述目的：

1. 使学生的学习由易到难，首先侧重概念、计算，进而侧重理论、方法. 例如第一册侧重极限、连续等概念和微分、积分的计算；第二册侧重实数域、级数、微积分理论和综合运用微积分方法.

2. 便于相对集中内容与时间，强化训练，按不同要求提高学生单项和综合解题能力. 例如把微分学、积分学分为两段讲授，前段（第一册）着重训练学生的计算能力和初步解应用题的能力；后段（第二册）综合运用微积分的理论、方法着重训练学生的论证和估值能力.

通过教学实践我们认为以上安排是可行的，我们还要继续完善它.

本书的内容安排次序，教材处理以及某些定理所采用的证明方法与目前国内通用的数学分析教材不尽相同. 例如一元微分学部分的前段（第一册）就不讲微分中值定理，直接利用连续函数性质证明函数单调性判别法，并利用它解决导数的应用问题，到后段（第二册）才出现中值定理及其在理论、估值等各方面的应用.

本书配有较多的练习题，它们有一定的广度和深度. 做一定数量并且具有一定难度的习题，是数学分析能力培养的重要一环. 本书除练习题外还增设了思考题，其中不少题是教学经验的积累，它们对于深入理解某些概念和定理可能会有好处.

本书在内容、例题与习题的安排和选取上都有一定的“弹性”，以便适应读者的不同需要，对此我们在相应的地方都作了说明，请读者自己选择.

编写本书，做了些尝试，深感难度很大，自觉力不从心，错误和缺点必然存

在，切望得到批评指正.

编写本书，参考了很多兄弟院校的教材和习题，受益匪浅，谨致谢意.

本书的前身是北京师范大学数学系 82 级、86 级学生使用的讲义，邝荣雨、薛宗慈在这两届学生中试用过该讲义.赵慈庚老师、董延闿老师曾提出了许多有指导性的修改意见，并亲自参与了部分章节的修改.孙永生老师经常鼓励和支持编者大胆进行试验.陈公宁及参与试用过程的许多同志对原讲义提出了许多宝贵意见.分析教研室不少同志都参与过对原讲义的讨论并提出了很多中肯的意见和看法.在此我们谨向关心、帮助我们的老师和同事们表示感谢.

编　者
北京师范大学数学系
1988 年 3 月

目 录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

—4—
一元(数值)函数的极限理论

§1 实数概论

17至18世纪是微积分大发展的年代.到了19世纪,由于本身逻辑基础不严密,以及前两个世纪沿袭下来的凭几何直觉和物理印象进行推证的方法的局限,使得微积分的发展日益步履艰难.虽然经过柯西(Cauchy)、魏尔斯特拉斯(Weierstrass)等人的艰苦努力,终于给微积分的基础——极限理论建立了一套严密的逻辑体系,但是问题并没有彻底解决,因为极限理论的基础——实数理论还没有严格建立起来,因而极限理论的一些重大问题也没有得到彻底解决,例如我们在第一册中多次使用的单调数列收敛原理、连续函数整体性质(介值性、有界性、最值性)、连续函数的可积性等重要定理都无法予以严格证明.

实数,看起来很浅显,几乎人人都认识它,也会用它作四则运算.但数学家偏偏要问:什么是实数?它有什么性质?这个问题从古希腊开始一直困惑了数学家2 000多年.直到19世纪后半叶才由梅莱(Mèray)、戴德金(Dedekind)、康托尔(Cantor)等人给出了满意的回答.

人类认识的第一个数系是自然数系,由于实际生活与数学运算的需要,逐渐地扩充到整数系,再扩充到有理数系.有理数系是一个比较完美的数系:它具有稠密性,即任何两个有理数之间必含有有理数;它对四则运算是封闭的,即任何有理数经过加、减、乘、除四则运算后仍是有理数;它的元素有顺序关系,因而可以比较大小,进行不等式运算.有理数系的这些性质使得古希腊人认为它就是所有数的全体,并且设想把它们由小到大、连续无空隙地排列在一条无限长的直线上,即在全体有理数与直线上全体点之间建立一一对应关系,这种关系于“形”与“数”自然和谐的连续性设想促使古希腊学者毕达哥拉斯(Pythagoras)喊出他的哲理名言“万物皆为数”(这里他所说的数指的是有理数),但事实并非如此.在公元前500年前后,毕氏学派门徒希伯斯(Hippasus)发现并证明了正五边形的边长与其对角线长是不可公度的,接着他又证明了正方形的边长与其对角线长也是不可公度的.这就是说,单位边长正五边形和单位边长正方形的对角线长竟然不是数(有理数)!希伯斯的发现动摇了古希腊几何理论的基础,同时也第一次向人们提示了有理数系的缺陷,它告诉人们,有理数虽然密密麻麻排在数轴上,但并没有铺满整个数轴,它上面还存在很多不能用有理数填补的“孔隙”.我们应当怎

样扩充有理数系，使得这条带有“孔隙”的直线真正成为“连续”的直线呢？

柯西在他的名著《国立工科大学的分析教程》(1821) 一书中曾试图用有理数列的极限来定义无理数，但这必须先承认无理数的存在，这就产生了一个逻辑的自身循环. 如何克服这个恶性循环呢？戴德金分析了直线连续性的本质，是由于它上面任一点都能把直线划分为不重、不漏、不空的两部分；反过来，只要直线被划分成了这样两部分，它就必然有一个分界点. 这就是说，直线上任一点与上述任一“分划”在本质上是一回事. 戴德金抓住了这个本质，认为“这样的平凡之见，暴露了连续性的秘密”. 他利用这种分划的方法，从有理数系出发构造出了实数系，建立了一整套严密的实数理论，奠定了微积分的坚实基础.

从自然数系出发，采用构造性的方法，逐步得到实数系的过程是冗繁的，我们将按照公理化的方法定义实数系，然后再定义它的一些重要子集. 采用这种方法是考虑到实数的表达形式(如常用的十进位记数法) 虽然很重要，但其特性与功用主要是通过它们之间的关系和性质表现出来，尤其是其中一些最基本的关系和性质完全刻画了实数的本质，它们的全体就组成了实数的公理系统.

1.1 实数域

实数公理系统包含三组公理.

第一组是刻画实数四则运算关系的公理，称为**域公理**.

设 R 是一个集合，在它的元素之间规定了两种分别称为加法“$+$”和乘法“$\cdot$”的运算关系，使得 R 中任何两个元素 a,b，都有 $a+b\in R$，$a\cdot b\in R$，并且满足下面九条基本性质：

(1) (加法结合律) $a+(b+c)=(a+b)+c$；

(2) (加法交换律) $a+b=b+a$；

(3) (加法零元) $\exists\, 0\in R$，对 $\forall\, a\in R$，有 $0+a=a$；

(4) (加法负元) $\forall\, a\in R$，$\exists\, -a\in R$，使得 $a+(-a)=0$；

(5) (乘法结合律) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$；

(6) (乘法交换律) $a\cdot b=b\cdot a$；

(7) (乘法单位元) $\exists\, 1\in R$，且 $1\neq 0$，对 $\forall\, a\in R$，有 $a\cdot 1=a$；

(8) (乘法逆元) $\forall\, a\in R$，且 $a\neq 0$，$\exists\, \dfrac{1}{a}\in R$，使得 $a\cdot\dfrac{1}{a}=1$；

(9) (加法与乘法的分配律) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

凡是具有加法和乘法两种运算且满足上述九条性质的集合称为**域**.

第二组是刻画实数顺序关系的公理，称为**序公理**.

设 R 是一个集合，在它的元素之间规定了一种顺序关系“$<$”，并且满足下面四条性质：

(1)(三歧性) $\forall a,b \in R$,以下三种关系有且仅有一种成立:$a<b$,$a=b$,$b<a$;

(2)(传递性) 若 $a<b$,$b<c$,则 $a<c$;

(3) 若 $a<b$,则对 $\forall c \in R$,有 $a+c<b+c$;

(4) 若 $a<b$,则对 $\forall 0<c \in R$,有 $a \cdot c<b \cdot c$.

凡满足上面条件(1)及(2)的集合称为**有序集**."$a<b$"又可写成"$b>a$".关系"$\leqslant$"表示"$<$ 或 $=$".

第三组是刻画实数连续性的公理,称为**连续(完备)公理**.

分划原理(Dedekind) 设 A,B 是 R 的非空子集,且对 A 中任一元 $a \in A$ 与 B 中任一元 $b \in B$,皆有 $a \leqslant b$,则存在 $c \in R$,对 $\forall a \in A$,$\forall b \in B$,有 $a \leqslant c \leqslant b$.

我们把满足上述三组公理的集合叫做**实数域**,记作 $\mathbf{R}$,其中元素叫做**实数**.即**实数域是满足连续公理的有序域**.我们熟知的有关实数四则运算与不等式运算的一切性质都可以由上述域公理与序公理推导出来.为避免烦琐,仅举几例以说明之.

【例 1】 证明:方程 $a+x=b$ 在 $\mathbf{R}$ 中有唯一解 $x=b+(-a)$.

【证】 首先证明 $x=b+(-a)$ 是 $a+x=b$ 的解.事实上,利用加法结合律、加法交换律及零元存在性,有

$$\begin{aligned}a+x &= a+[b+(-a)] = a+[(-a)+b] \\ &= [a+(-a)]+b = 0+b = b.\end{aligned}$$

其次证明 $x=b+(-a)$ 是 $a+x=b$ 的唯一解.事实上,在 $a+x=b$ 两端加 $-a$,得

$$(a+x)+(-a) = b+(-a).$$

而左端是

$$\begin{aligned}(a+x)+(-a) &= -a+(a+x) \\ &= (-a+a)+x = 0+x = x,\end{aligned}$$

所以 $x=b+(-a)$.易证负元是唯一的,故 $x=b+(-a)$ 是唯一的.

式子 $b+(-a)$ 常记作 $b-a$,由此可定义减法,称 $b-a$ 为 b 与 a 的**差**.同理可以证明方程 $a \cdot x=b$ 当 $a \neq 0$ 时,在 $\mathbf{R}$ 中有唯一解 $x=b \cdot \dfrac{1}{a}$,常把它记作 $x=\dfrac{b}{a}$,由此可定义除法,称 $\dfrac{b}{a}$ 为 b 与 a 的**商**.用类似的方法可以证明:$a \cdot 0=0$;$-(-a)=a$;$(-a) \cdot b=-(a \cdot b)$;$-a=(-1) \cdot a$.

【例 2】 设 $a,b\in\mathbf{R}$,证明:

(1) $a>0\Leftrightarrow -a<0$.

(2) $a\leqslant b,b\leqslant a\Rightarrow a=b$.

(3) $a>0,b>0$ 或 $a<0,b<0\Rightarrow a\cdot b>0$.

【证】 (1) 若 $a>0\Rightarrow 0=-a+a>-a+0=-a$;若 $-a<0\Rightarrow 0=-a+a<0+a=a$.

(2) 假若 $a\neq b$,由序公理的三歧性 $\Rightarrow a<b$ 或 $a>b$. 若 $a<b$,因 $b\leqslant a\Rightarrow a<a$,矛盾!同理,当 $a>b$ 也推出矛盾,故 $a=b$.

(3) 利用序公理(4) 知,$a>0,b>0\Rightarrow a\cdot b>0$. 当 $a<0,b<0$ 时,有 $-a>0,-b>0\Rightarrow a\cdot b=(-a)\cdot(-b)>0$.

用类似的方法可以证明:$1>0$;$a>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}>0$. 我们称大于零的实数为**正实数**,小于零的实数为**负实数**.

在实数域 $\mathbf{R}$ 中,还可引进绝对值概念,从而可引进两个实数 a 与 b 的**距离** $|a-b|$,并有著名的**三角形不等式**

$$|a-b|\leqslant|a-c|+|c-b|.$$

定义了距离的实数域常称为**实数空间**,仍记作 $\mathbf{R}$.

定义好了实数以后,接着就应该定义有理数、整数和自然数. 按照传统方法,我们先定义自然数. 通常说自然数就是 $0,1,2,3,\cdots$ 这种说法是含糊的,但它也隐含了归纳原理的本质属性. 下面我们严格地论述自然数定义及其重要性质.

设 $E\subset\mathbf{R}$,若对任何 $a\in E$,有 $a+1\in E$,则称 E 是**归纳集**.

易知实数域 $\mathbf{R}$ 与正实数集是归纳集,任意多个归纳集的非空交集也是归纳集. 由此可引进下面的定义.

包含数 1 的一切归纳集的交集,叫做**自然数集**,记作 $\mathbf{N}$,其中的元素叫做**自然数**. 由此易得重要的自然数集的性质.

【定理 1.1】 (数学归纳原理)

设 $E\subset\mathbf{N}$,有 $1\in E$,若 $\forall n\in E$,有 $n+1\in E$,则 $E=\mathbf{N}$.

通常所说的数学归纳法是这样陈述的:给定命题 $p(n)$,设

1° 当 $n=1$ 时,命题 $p(1)$ 成立;

2° 若 $\forall n\in\mathbf{N}$,$p(n)$ 成立 $\Rightarrow p(n+1)$ 成立.

则命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 成立. 它成立的理由是这样解释的:由 1° 知命题 $p(n)$ 对 $n=1$ 成立,由 2° 知命题 $p(n)$ 对 $n=2$ 成立,又由 2° 知命题 $p(n)$ 对 $n=3$ 也成立,依此类推,故命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 都成立.

这种论证方法是经不起推敲的,因为反复引用 2° 只能推断有限步,而自然数是无穷的,怎能用"依此类推"的含混说法由有限步达到无穷呢?而数学归纳原理才是它真正的依据,下面我们解释这一点.

设 $E=\{n\in\mathbf{N}\mid$ 命题 $p(n)$ 成立$\}$,则

$$n\in E\Leftrightarrow \text{命题 } p(n) \text{ 成立}, n\in\mathbf{N}.$$

由于 $p(1)$ 成立 $\Leftrightarrow 1\in E$,而命题"$p(n)$ 成立 $\Rightarrow p(n+1)$ 成立"等价于命题"$n\in E\Rightarrow n+1\in E$". 于是由数学归纳原理知 $E=\mathbf{N}$,这就是说,命题 $p(n)$ 对一切自然数 n 成立.

利用数学归纳原理可以证明我们通常很熟悉的自然数的性质,例如自然数集 $\mathbf{N}$ 关于加法与乘法运算是封闭的、自然数集的任一非空子集必有最小数等. 最后定义整数与有理数. 我们把自然数集与自然数的负元之集的并集叫做**整数集**,记作 $\mathbf{Z}$. 把形如 $r=\frac{p}{q}$ (其中 $p,q\in\mathbf{Z}$,且 $q\neq 0$) 的实数所成之集叫做**有理数集**,记作 $\mathbf{Q}$,其中实数 r 叫做有理数. 不是有理数的实数叫做无理数,它的全体叫做**无理数集**. 由此知自然数集、整数集、有理数集、无理数集都是实数集的子集. 还可以证明,有理数集是一个有序域,也就是说,我们通常熟悉的关于实数之间的四则运算与不等式运算在有理数集中也是畅通无阻的. 那么实数域与有理数域的本质差别在哪儿呢?关键就是连续公理,连续公理在有理数域 $\mathbf{Q}$ 中不成立. 例如令

$$A=\{a\in\mathbf{Q}\mid a>0,a^2<2\},\ B=\{b\in\mathbf{Q}\mid b>0,b^2>2\},$$

它们都是 $\mathbf{Q}$ 的子集. 由于 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a>0,b>0$,有

$$a<b\Leftrightarrow a^2<b^2,$$

所以 A 中任一正有理数 a 小于 B 中任一有理数 b. 容易证明,不可能存在一个有理数 $c\in\mathbf{Q}$,对 $\forall a\in A,\forall b\in B$,有 $a\leqslant c\leqslant b$. 否则,由 $a\leqslant c\leqslant b\Rightarrow a^2\leqslant c^2\leqslant b^2$. 又由集 A 与集 B 定义有 $a^2<2<b^2$,于是 $c^2=2$. 但我们都知道这在有理数域中是不可能的,故连续公理在有理数域 $\mathbf{Q}$ 中不成立. 我们将会看到,正是连续公理构成了数学分析的基础 —— 极限理论赖以生存的根基.

到此,已经完成了整个实数集及其重要子集的定义工作,我们省略了很多证明细节,为的是突出它们最主要的特征. 要想较全面论述实数域,还需要构造出满足实数公理的实数模型,并给出具有实际计算意义的实数表示法等等,这些都是很重要的、同时也是很繁重的工作,请读者参考其他书籍.

1.2 确界原理与闭区间套原理

这里先介绍几个重要概念.

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com