普通高等教育"十一五"规划教材

高等数学（下）

刘春凤 主编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"规划教材

高等数学

（下）

刘春凤　主　编
马醒花　米翠兰　副主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本套书遵循教育部高等院校非数学类专业数学基础教学指导分委会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，传承高等数学的结构体系，体现新形势下教材改革的精神，面向普通高校人才培养的需要，集作者多年教学实践的经验编写而成。本套书分上、下两册，上册内容为一元函数微积分和空间解析几何与向量代数（共七章），下册内容为多元函数微积分、级数和常微分方程（共五章）。书末附有习题参考答案、几种常用的初等数学公式、积分表和 Mathematica 简介。

本书可作为高等工科院校工学、经济学等专业“高等数学”教材，也可作为相关教师、工程技术人员用书和参考书。

图书在版编目(CIP) 数据

高等数学. 下/刘春凤主编. —北京：科学出版社，2007
（普通高等教育“十一五”规划教材）
ISBN 978-7 03-019476-3

Ⅰ. 高… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 114453 号

责任编辑：韩 洁/责任校对：耿 耘
责任印制：吕春珉/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2007 年 8 月第一次印刷 印张：19 1/4
印数：1—6 500 字数：439 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈路通〉）

销售部电话 010-62136131 编辑部电话 010-62138978-8203

编　委　会

前　言

高等数学是工科院校最重要的基础课程之一，它不仅为后续课程和科技工作提供必备的数学工具，而且对学生科学素质的形成和分析解决问题能力的提高均有着重要而深远的影响。进入 21 世纪，随着我国高等教育的教育理念由过去的“精英教育”转向了“大众化”教育，教学内容和课程体系的改革在全国深入开展，面向重点大学的具有新思路且含有“数学实验”的新教材陆续出现，对教学改革起到了推动和引领作用。但是，对于普通院校，由于缺乏适合自身的新教材，相当一部分普通院校在选用教材时和重点大学保持一致。然而，培养目标及学生的差异使普通院校呈现传授与接受的“脱节”，教师教的辛苦，学生学的艰难，教学效果事倍功半。

本套书遵循教育部高等学校非数学类专业数学基础教学指导分委员会修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，立足普通高等院校人才培养的需要，集作者多年教学实践的经验编写而成。突出的特点是：理性、简约、实用。

首先，该教材传承高等数学知识结构，注重培养学生创新思维，适度融入最新的教改成果，结构严谨、逻辑清晰、符合认知规律。其次，教材考虑普通工科院校学生对数学的需求，本着“以应用为目的，以必需、够用为度”的原则，在引入概念之初，注意化抽象为自然，引导学生品味数学源于现实、高于现实的境界；在推导命题之中，注意化冗余为直观，对部分繁琐的推导进行了适度约简，通过几何直观，解释数学命题抽象和深刻的内涵；在阐述方法之时，注意化收敛为发散，由浅入深，启发联想，引导探究，力求使读者融会贯通。

最后，教材介绍了 Mathematica 软件在高等数学中的应用，并适度嵌入了与“高等数学”密切相关的数学实验课题，学生通过使用 Mathematica 软件进行各种运算、绘制图形和完成实验课题，能够体验该软件的强大功能，大大拓宽了高等数学的应用范围，过去学生由于计算技术的局限只能“望洋兴叹”的问题，如今可以通过数学实验轻松解决。总之，教材期望在加强应用能力培养、提高综合分析能力和创新能力方面为学生奠定良好的数学基础。

刘春凤任主编，米翠兰、马醒花任副主编，刘春凤编写了第 1、2、4、5、7、10、11 章和全书的数学实验，米翠兰编写了第 3、8、12 章，马醒花编写了第 6、9 章，阎少宏、纪楠编写了第 1～6 章的习题，杨爱民、彭亚绵编写了第 7～12 章的习题，全书最后由主编和副主编修改定稿。

在编写过程中，得到了科学出版社的鼎力支持和帮助，得到了河北理工大学领导的关心和指导，北京航空航天大学的李心灿教授为本书的编写提出了很好的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢。

由于我们水平有限，书中谬误之处难免，请使用本书的老师、学生和读者们不吝指教。

目　录

第 8 章　多元函数微分法及其应用

在《高等数学(上)》中，所研究的函数是依赖于一个自变量的函数，但在实际问题中，常常需要考虑含有多个自变量的函数，即多元函数。例如，植物的生长速度就依赖于土壤、温度、雨量、肥料等多个因素。

本章将在一元函数微分学的基础上，重点讨论二元函数的极限、连续、偏导数、全微分、多元复合函数求导法、极值及几何应用，对于二元以上的函数微分法可类似讨论。

8.1　二元函数

8.1.1　预备知识

在第 1 章中我们讨论了一元函数的定义域、区间和邻域的概念。类似地，在将要讨论的二元函数中，我们将这些概念加以推广。我们知道一元函数的定义域是数轴上的点集，二元函数的定义域是平面上的点集，下面我们就给出平面点集及其有关概念。

1. 平面点集

坐标平面上具有某种性质 P 的点的集合，称为平面点集，记为

$$E=\{(x, y)\mid (x, y)\text{ 具有性质 } P\}$$

例如，平面点集 $C=\{(x, y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是平面上以原点为中心、半径为 1 和 2 的圆环内所有点的集合，实际上平面点集就是坐标平面的子集。

注： 如果不需要强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记作 $\mathring{U}(P_0)$，即

$$\mathring{U}(P_0)=\{(x, y)\mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

思考　数轴上的邻域、平面上的邻域和空间的邻域有什么异同?

2. 内点

如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为内点。

3. 开集

如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集。

4. 边界点

如果点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，也有不属于 E 的点，则称 P 点为 E 的边点，E 的边界点的全体，称为 E 的边界。

E 的内点必属于 E，而 E 的边界点可能属于 E，也可能不属于 E，如图 8.1 所示，P_1 是 E 的内点，P_2 是 E 的边界点。

5. 连通集

如果点集 E 内任何两点都可用折线连接起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集，如图 8.2 所示。

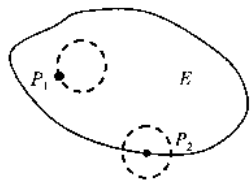

图 8.1

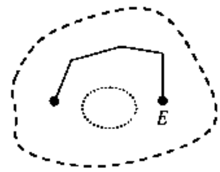

图 8.2

6. 区域(或开区域)

连通的开集称为区域或开区域，开区域连同它的边界一起所构成的点集称为闭区域。

例如，$D_1=\{(x,\ y)\mid x+y>0\}$，$D_2=\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2<4\}$ 为平面区域，而 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 是区域 D_2 的边界，如图 8.3 和图 8.4 所示。

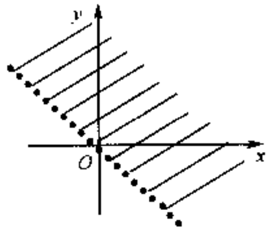

图 8.3

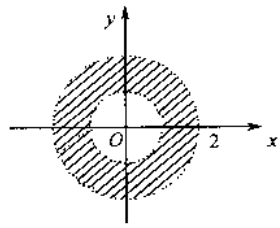

图 8.4

$D_3=\{(x,\ y)\mid x+y\geqslant 0\}$，$D_4=\{(x,\ y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$ 为平面闭区域，如图 8.5 和图 8.6 所示。

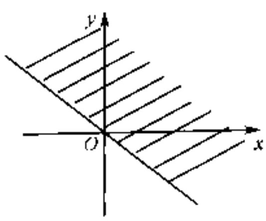

图 8.5

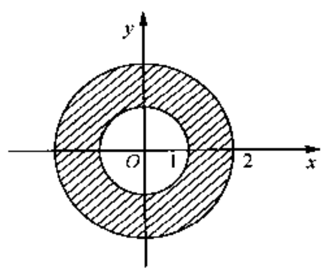

图 8.6

7. 有界区域

对区域 D，若存在正数 K，使一切点 $P\in D$ 与某定点 A 的距离 $|AP|$ 满足

$|AP| \leqslant K$，则称 D 为有界区域，否则称为无界区域。

例如，$\{(x, y) | 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$ 是有界闭区域；$\{(x, y) | x + y > 0\}$ 是无界开区域；$\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 是有界区域；$\{(x, y) | x + y \geqslant 0\}$ 是无界闭区域；$\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 9\}$ 为空间闭区域。

8.1.2 二元函数的概念

我们知道函数就是因变量和自变量之间的对应关系。一元函数是一个自变量与一个因变量之间的对应关系，而一个因变量与两个或多于两个自变量的对应关系就是多元函数。在自然界中，涉及多个变量的这种对应关系很多，举例如下。

【例 8.1】 长方形的面积 S 与它的长 x 和宽 y 之间有以下关系：

$$S = xy$$

当 x、y 在变化范围取定一对值 (x, y) 时，S 的对应值就随之确定。

【例 8.2】 物体运动的动能 W 与物体的质量 m 和运动的速度 v 之间有以下关系：

$$W = \frac{1}{2} m v^2$$

当 m 和 v 在变化范围取定一对值 (m, v) 时，W 的对应值就随之确定。

上面的例子具体意义虽然不同，但它们却有共同的性质，抽出这些共性就可得出以下二元函数的定义。

定义 8.1 设有三个变量 x、y 和 z，D 为一非空平面点集，如果对于任意一组值 $(x, y) \in D$，按照一定的法则 f，变量 z 总有唯一确定的数值与之相对应，则称 z 是 x、y 的二元函数，记为 $z = f(x, y)$。

其中 x、y 称为自变量，z 称为因变量。当 x、y 取遍 D 的各个值时，对应的函数值全体组成的集合称为函数的值域，记为 R_f 或 $f(D)$，D 称为函数 z 的定义域。

类似地，我们把三元函数，四元函数，…，n 元函数分别记作 $u = f(x, y, z)$，$w = f(x, y, z, t)$，…，$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 或统一记为 $u = f(P)$，$P \in D$。

二元以及二元以上的函数称为多元函数，在后面的讨论中我们主要以二元函数为主，所得结论和性质可以直接推广到三元及其以上函数。

注： *和一元函数一样，二元函数的二要素是对应关系与定义域。*

类似于一元函数，我们约定：二元函数的定义域 D 是使二元函数的表达式有意义的全体自变量的集合，在实际问题中还要考虑自变量在具体问题中的取值范围。

【例 8.3】 求函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域。

【解】 要使表达式有意义，需要满足 $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$，所求定义域为

$$D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

如图 8.7 所示。

【例 8.4】 求函数 $f(x, y) = \dfrac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$ 的定义域。

【解】 要使表达式有意义，需要满足 $\begin{cases} |3 - x^2 - y^2| \leqslant 1 \\ x - y^2 > 0 \end{cases}$，即 $\begin{cases} 2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4 \\ x > y^2 \end{cases}$，所求定义域为 $D = \{(x, y) | 2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4, x > y^2\}$，如图 8.8 所示。

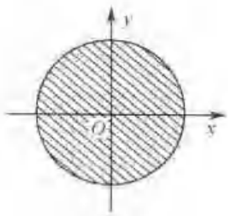

图 8.7

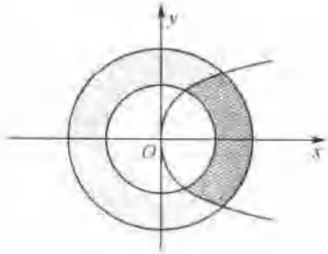

图 8.8

注: (1) 当二元函数是由几个函数的代数和组成时，函数的定义域应使得所有的函数都有意义。

(2) 二元函数定义域也不一定都是区域。

【练习】 求下列函数的定义域。

(1) $z=\ln(x+y-1)$　　(2) $z=\sqrt{4-x^2-y^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

从几何上看，一元函数的图形通常是平面上的一条曲线，而二元函数的图形是空间曲面，如图 8.9 所示。

例如:(1) 二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，图形为中心在原点的上半球面，如图 8.10 所示。

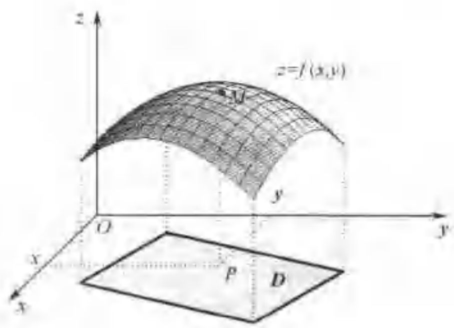

图 8.9

图 8.10

(2) 二元函数 $z=\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{3^2}$，图形为顶点在原点的椭球面，如图 8.11 所示。

(3) 二元函数 $\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2}+2 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$，图形由锥面和球面围成，如图 8.12 所示。

三元及其以上的函数没有几何图形。

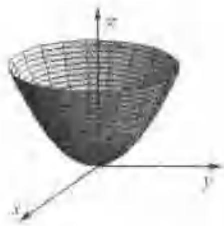

图 8.11

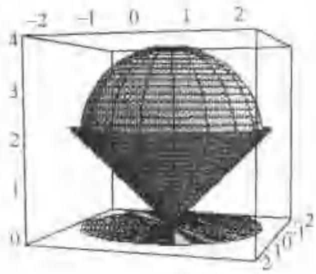

图 8.12

8.1.3　二元函数的极限和连续

1. 二元函数的极限

在讨论一元函数时，我们是这样描述函数极限的：设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义，若当 $x\to x_0$ 时，函数值 $f(x)$ 无限趋近于常数 A，即 $|f(x)-A|$ 无限趋近于零，则称当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（见定义 2.6）。类似地，二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的极限可以描述如下：

定义 8.2　设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个去心邻域 $\mathring{U}(P_0,\delta)$ 内有定义，A 是常数，$\forall P\in\mathring{U}(P_0,\delta)$，若当 $P\to P_0$ 时，恒有 $|f(x,y)-A|$ 无限趋近于零，则称当点 $P\to P_0$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限，并将此极限称为二元函数的二重极限。记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,\ y)=A\quad 或\quad \lim_{P\to P_0}f(P)=A。$$

注：函数 $f(P)$ 在点 P_0 有无极限，与函数 $f(P)$ 在点 P_0 有无定义无关。

【例 8.5】　设 $f(x,\ y)=\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x}$，用定义 8.2 说明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,\ y)=0$。

【解】　$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x\neq 0,\ -\infty<y<\infty\}$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的邻域内有定义。因为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 为有界函数，

$$\begin{aligned}|f(x,y)-0|&=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x}-0\right|\\&=\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x}\right|\to 0,\quad (x,y)\to(0,0)\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,\ y)=0$$

从形式上看，二元函数的极限定义与一元函数的极限定义极其相似，然而二元函数的极限的获取要比一元函数的极限复杂得多，主要原因如下。

（1）在平面上，点 $P\to P_0$ 的方向无穷多。

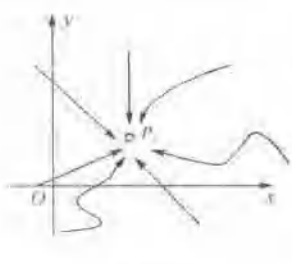

图 8.13

(2) 点 $P\to P_0$ 的路径曲线无穷多，如图 8.13 所示。因此，当 P 沿某条特定的路径趋向于 P_0 时，有

$$f(x,y)\to A$$

我们不能断定极限是否存在。

例如，函数

$$z=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当点 P 沿 x 轴趋向于原点时，即当 $y=0$ 而 $x\to 0$ 时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}}f(x,y)=\lim_{x\to 0}f(x,0)=\lim_{x\to 0}0=0$$

当点 P 沿 y 轴趋向于原点时，即当 $x=0$ 而 $y\to 0$ 时，

$$\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{y\to 0}f(0,y)=\lim_{y\to 0}0=0$$

可见它们的极限都存在且相等(均为 0)。但是 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 并不存在，这是因为当点 $P(x,y)$ 沿着直线 $y=kx$ 趋向于点(0，0)时，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

显然，它是随着 k 的值的变化而变化，根据极限的存在唯一性，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在，如图 8.14所示。

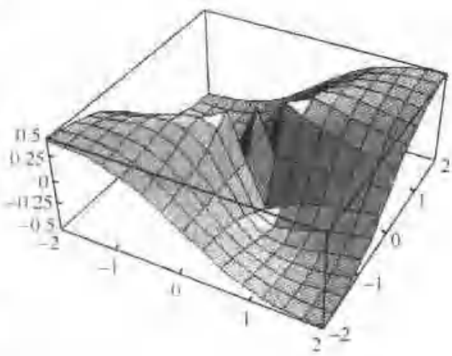

图 8.14

注： 当 P 沿某条特定的路径趋向于 P_0 时，$f(x,y)$ 没有极限，或 P 沿两条不同的路径趋向于 P_0 时，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不相等，则可断定 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 不存在，这是证明二元函数极限不存在的常用方法。

【例 8.6】 说明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$ 不存在。

【解】 因为当点 $P(x,y)$ 沿坐标轴 $y=0$ 趋于点(0，0)时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0}=0$$

当点 $P(x,y)$ 沿坐标轴 $y=x^3$ 趋于点(0，0)时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^3\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{x^6}{x^6+y^6}=\frac{1}{2}$$

因点 $P(x,y)$ 沿不同的方向趋于点(0，0)时，函数的极限值不同，所以原极限不存在，如图 8.15 所示。

思考　在例 8.6 中，若取点 $P(x,y)$ 沿方向 $y=kx$ 趋于点(0，0)，因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^3y}{x^6+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{x^3\cdot kx}{x^6+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^4+k^2}=0$$

由 k 的任意性，能否可以说明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}=0$？为什么？

【练习】 说明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 极限不存在，如图 8.16 所示。

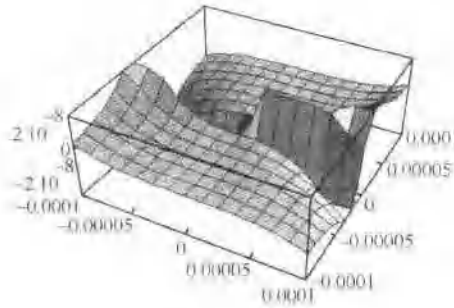

图 8.15

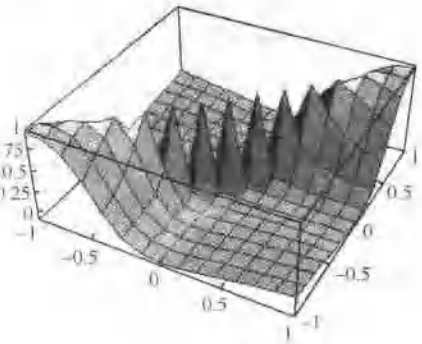

图 8.16

同一元函数求极限一样，利用定义求二元函数的极限是比较麻烦的。一般来说，往往经过适当变形，借助于我们所熟知的一元函数求极限的方法求二元函数的极限。如一元函数极限的四则运算法则、两个重要极限、无穷小量的性质等。

【例 8.7】 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x-1}+y)\sin\dfrac{1}{x-1}\cos\dfrac{1}{y}$。

分析：因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x-1}+y)=0$，$\left|\sin\dfrac{1}{x-1}\cos\dfrac{1}{y}\right|\leqslant 1$，利用无穷小与有界量的乘积仍是无穷小。

【解】 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt[3]{x}+y)\sin\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{y}=0$，如图 8.17 所示。

【例 8.8】 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$。

【解】 利用极限的运算法则，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$$

而

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1(u=x^2y)$$

因 $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}|x|$，故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$，因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$$

如图 8.18 所示。

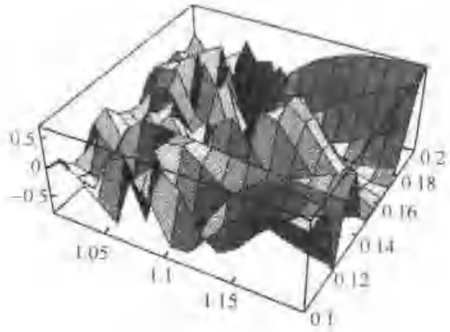

图 8.17

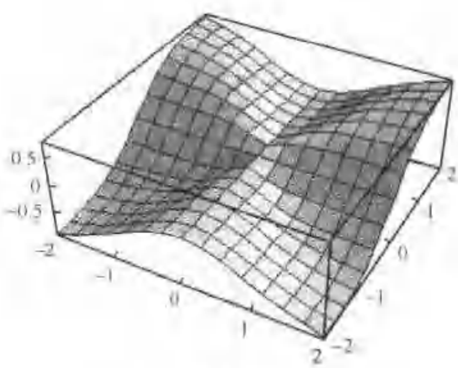

图 8.18

【例 8.9】 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$。

【解】 令 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，则

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta}{\rho}=\lim_{\rho\to 0}\rho(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta=0$$

注：此例所用的方法叫方向极限法，即用极坐标考虑极限。

当 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$ 时，$(x,y)\to 0$ 等价于 $\rho\to 0$，这时，

$$f(x,y)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta$$

值得注意的是 θ 不是常数，但无论 θ 如何变化，$(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta$ 总是有界量，所以，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=0$。这是一种常用方法，某些极限问题用此法更简便。

【练习】 求极限。

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$　(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

2. 二元函数的连续

回忆一元函数连续定义：设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数在点 x_0 连续。

现在我们用 $z=f(x,y)$ 代替 $y=f(x)$，用平面上的点邻域

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y)\mid\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

代替直线上的点邻域 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$，类似于一元函数的连续定义，不难得出二元函数 $z=f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的连续定义如下。

定义 8.3 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 满足下面条件：

(1) 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$ 存在