21世纪大学数学精品教材

丛书主编　蔡光兴　戴明强

（第二版）

线性代数

蔡光兴　李逢高　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21 世纪大学数学精品教材·

线 性 代 数

（第二版）

蔡光兴　李逢高　主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书根据高等院校“线性代数课程教学”基本要求，并结合21世纪线性代数课程教学内容与课程体系改革发展要求编写而成. 全书分三篇：第一篇是基础篇，主要介绍了线性代数教学基本内容；第二篇是应用篇，结合线性代数四个知识面，通过生动的实例介绍了它们在经济、工程技术等方面的应用；第三篇是实验篇，简要介绍Matlab软件及其在线性代数中的应用. 本书在第一篇每章后配有习题与自测题，书末附有习题参考答案.

本书内容充实、体系新颖、选例灵活，可作为高等院校工科、理科和经济管理专业的教材，也可作为信息与计算科学专业的教材，对报考硕士研究生的学生以及广大教师与科技人员，也具有较高参考价值.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/蔡光兴，李逢高主编. —2版. —北京：科学出版社，2007
（21世纪大学数学精品教材）
ISBN 978-7-03-019309-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①蔡…②李… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第100881号

责任编辑：冯贵层／责任校对：梅 莹
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年7月第 二 版 开本：B5（720×1000）
2007年7月第四次印刷 印张：18 1/4
印数：21 001—29 000 字数：343 000

定价：25.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《21世纪大学数学精品教材》丛书序

《21世纪大学数学精品教材》为大学本科(本科1普通类和本科2一类)数学系列教材,体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会,编委由12所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画):

王公宝　方承胜　江世宏　李逢高　杨鹏飞　时　宝　何　穗　张志军

欧贵兵　罗从文　周　勇　高明成　殷志祥　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编:

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在,每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求.部分教材配有教学光盘,便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿,反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要,数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任,一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合,是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为,达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科(本科1普通类和本科2一类)学生,应用性是数学学科和数学教学发展的新特点,或展现在教材内容结构上,或体现于某些章节,或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性,教师好教,学生好学,同时保持知识完整.二者发生矛盾

时，前者优先，不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类：基础知识类；方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想（如数学建模），分别将 Mathematica、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法（如数学建模思想），体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学工具（软件）的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式，提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练，通过完整的程序与实例介绍，教会学生分析问题、动手编程、分析结果，提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第二版前言

21世纪，随着科学技术的迅速发展和计算机技术的广泛应用，线性代数这门学科在数学、物理、工程技术、电子信息、生命科学、经济管理等领域有着越来越广泛的应用.因此，线性代数作为大学数学教育中的一门基础学科，对于培养新世纪的创新人才与建设人才起着重要的作用.如何掌握好线性代数课程的基本理论知识，熟练掌握其方法，并能灵活地运用到实际中去，是线性代数教学中的主要任务.本书第二版是在第一版的基础上，根据多年的教学改革实践，按照教育部精品教材建设精神，进行全面修订而成的。

第一篇是基础篇.其基本内容是根据高等工科院校"线性代数课程教学基本要求"编写的.该篇与国内目前通用的线性代数教材整体结构基本相同，但也作了一些特色处理，如突出了初等变换的初等矩阵表示法、矩阵的特征值与特征向量的概念及求法、线性方程组解的结构；深入浅出地分析了线性相关、线性无关、矩阵的秩等难点.该篇做到了内容精炼、结构严谨、循序渐进、推理简明，是教学中的必修内容.

第二篇是应用篇.本篇是编者在线性代数教学实践及指导学生参加全国大学生数学建模竞赛培训中收集、参阅大量国内外资料，根据线性代数知识体系撰写的，很有特色.该篇分四章，包括矩阵和线性方程组的应用，矩阵相似对角化的应用，向量空间与内积的应用，实二次型理论的应用.该篇可作为学生在学习相应内容时关于线性代数应用的补充读物，也可作为教师在教学中灵活选用的内容，本篇对培养学生的应用与创新能力有很大的帮助，同时也培养学生学习线性代数的兴趣.

第三篇是实验篇.主要介绍数学软件 Matlab 及其在线性代数中的应用，本篇对培养学生运用软件与线性代数知识解决实际问题能力起着抛砖引玉的作用.本篇供学生自学用或有条件的院校在数学实验教学中选用.

本书由蔡光兴、李逢高主编，陈水林、郑列副主编.各章编写人员如下：陈水林(第一章)，李逢高(第二章)，蔡光兴(第三、四、五、八、九、十、十一章)，郑列(第六、七章)，朱永松(第十二、十三章)，此外，张凯凡、耿亮、费锡仙、方瑛、许松林、张水坤、李家雄、胡二琴、章曙雯、黄毅、杨策平、方次军、蔡振锋、常涛、朱莹、贺方超、蒋慧峰、曾莹、曾宇、陈华对部分章节内容进行了修改和整理，最后由李逢高统稿、蔡光兴定稿.

由于编者水平有限，加上时间仓促，本书不妥之处在所难免，恳请广大读者提出批评、建议，以便再版时予以修订.

编　者

2007年5月

目　录

基 础 篇

应 用 篇

实　验　篇

基　础　篇

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一章　行　列　式

行列式是为了求解线性方程组而引入的，它是研究线性代数的一个重要工具．近代以来，它又被广泛运用到物理、工程技术等多个领域．本章从解二元二式与三元三式方程组入手，引进了二阶与三阶行列式的概念，并用排列的奇偶性把行列式的概念推广到 n 阶，同时讨论了行列式的基本性质，并介绍了 n 阶行列式的计算方法与一些技巧．

第一节　排　　列

在定义 n 阶行列式前，我们先来讨论一下排列的性质．

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列指的是由这 n 个数码组成的一个有序数组．例如，2341 是一个 4 个数码的排列，31524 是一个 5 个数码的排列．n 个数码的不同排列共有 $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots2\cdot1=n!$ 个．事实上，在作 n 个数码的一个排列时，第一个位置的数码可以取这 n 个数码中的任何一个，所以有 n 种可能；当这一个位置取定以后，第二个位置的数码只能在剩下的 $n-1$ 个数码中选取，所以只有 $n-1$ 种可能．因此第一位置和第二位置的数码一共有 $n(n-1)$ 种不同的选法．同样，如果第一个、第二个位置的数码都已取定，那么第三个位置的数码只能在剩下的 $n-2$ 个数码中选取．因此，前三个位置的数码一共有 $n(n-1)(n-2)$ 种不同的选法．依此类推，一共可以得到 $n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=n!$ 个不同的排列．

例如，1，2，3 这 3 个数码的全体不同的排列一共有 $3!=6$ 个，它们是

$$123,132,231,213,312,321$$

注意，在上面 3 个数码的排列里，除了 123 的数码是按自然顺序排列的以外，其余的排列中，都有较大的数码排在较小的数码前面的情况．例如，在排列 132 里，3 比 2 大，但 3 排在 2 的前面；在 321 里，2 排在 1 的前面，3 排在 1 和 2 的前面．一般地，在一个排列里，如果某一个较大的数码排在某一个较小的数码前面，就说这两个数码构成一个逆序．例如，排列 132 有一个逆序；321 有三个逆序．在一个排列里出现的逆序总数叫做这个排列的逆序数．

例如，1432 这个四个数码的排列中，43、42、32 是逆序，1432 的逆序数就是 3；而 2431 排列的逆序数为 4．

逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列．例如，1432 为奇排列，2431 为偶排列．

对任意一个排列，我们可以按照以下方法来计算它的逆序数：设任给排列为

$P_1P_2\cdots P_n$，其中 P_i（$1\leqslant i\leqslant n$）为自然数，考虑 P_i（$1\leqslant i\leqslant n$），如果比 P_i 大的且排在 P_i 前面的元素有 t_i 个，就说 P_i 这个元素的逆序数是 t_i，全体元素的逆序数之和

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$$

即为这个排列的逆序数.

例 1　求排列 45321 的逆序数.

解　在排列 45321 中，4 排在首位，逆序数为 0；在 5 之前比 5 大的数没有，逆序数也为 0；3 的前面比 3 大的数有 4 和 5，故逆序数为 2；2 的前面比 2 大的数有 4、5、3，故其逆序数为 3；1 的前面比 1 大的数有 4、5、3、2，故逆序数为 4. 于是，排列的逆序数为

$$t=0+0+2+3+4=9$$

为叙述方便，以后一般排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$. 如例 1 中有 $\tau(45321)=9$.

定义 1　把一个排列中某两个数字 i 与 j 交换一下位置，而其余的数字不动，就得到另一个同阶的新排列，对排列施行的这样一个交换称为一个对换，并用符号 (i,j) 来表示.

例如，经过 1，2 对换，排列 2431 就变成了 1432，排列 2134 就成了 1234. 又如，对排列 31542 陆续施行一系列对换，可以得出排列 12345：先把 5 换到第五位置，即施行对换(5，2)得 31245；4 已在第四位置，不必动它；施行对换(3，2)得 21345；最后再施行对换(2，1)，就得 12345.

上面由排列 31542 得出排列 12345 的方法显然具有一般性，即任一排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 通过一系列对换都能得到排列 $1234\cdots n$，并且有

定理 1　任意两个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 总可以通过一系列对换互变.

证明　由上面讨论已知，通过一系列对换可以由 $i_1i_2\cdots i_n$ 得到 $12\cdots n$，由 $j_1j_2\cdots j_n$ 得出 $12\cdots n$，按照相反次序施行 $j_1j_2\cdots j_n$ 变到 $12\cdots n$ 的变换，就可以得出由 $12\cdots n$ 变到 $j_1j_2\cdots j_n$ 的变换，这样可以实现由 $i_1i_2\cdots i_n$ 变到 $12\cdots n$，再由 $12\cdots n$ 变到 $j_1j_2\cdots j_n$ 的变换.

定理 2　对换改变排列的奇偶性.

证明　先证明相邻对换的情形，即对换的两个数在排列中是相邻的情形. 排列

$$\overbrace{\cdots}^{A} jk \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.1}$$

经过 (j,k) 对换变成

$$\overbrace{\cdots}^{A} kj \overbrace{\cdots}^{B} \tag{1.2}$$

其中 A 与 B 都代表若干个数码. 显然，在(1.1)中，如 j,k 与其他的数构成逆序，则在排列(1.2)中仍然构成逆序；如不构成逆序，则在(1.2)中也不构成逆序；不同的

只是 j,k 的次序. 如果原来 j,k 组成逆序,那么经过对换,逆序数就减少一个;如果原来 j,k 不组成逆序,那么经过对换,逆序数就增加一个. 不论增加 1 还是减少 1,排列的逆序数的奇偶性总是变了. 因此,在这种情形下,定理成立.

再看一般情形,设排列为

$$\cdots j i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots \tag{1.3}$$

经过 (j,k) 对换,排列(1.3)变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots \tag{1.4}$$

易知,这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现. 从(1.3)出发,把 k 与 i_s 对换,再与 i_{s-1} 对换,如此继续下去,把 k 一位一位地向左移动. 经过 $s+1$ 次相邻位置的对换,排列(1.3)就变成

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \tag{1.5}$$

从(1.5)出发,再把 j 一位一位地向右对换,经过 s 次相邻位置的对换,排列(1.5)就变成了排列(1.4). 因此,(j,k) 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现. $2s+1$ 是奇数,相邻位置的对换改变排列的奇偶性,显然,奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性.

由上定理,可得下列结果.

定理 3 当 $n \geqslant 2$ 时,n 个数字的奇排列与偶排列的个数相等,各为 $\frac{1}{2}n!$ 个.

证明 设 n 个数字的奇排列共有 p 个,而偶排列共有 q 个,对这 p 个奇排列施行同一个对换 (i,j),那么由定理 2,得到 p 个偶排列. 由于对这 p 个偶排列施行对换 (i,j),又可以得到原来的 p 个奇排列,所以这 p 个偶排列各不相等,但一共只有 q 个偶排列,所 $p \leqslant q$. 同理可得 $q \leqslant p$,所以 $p=q$.

第二节 n 阶行列式的概念

行列式起源于解 n 元 n 式方程组. 我们知道,最简单、最基本的方程组是二元二式方程组,它的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

在中学学解方程组时,我们利用加减消元法解之(当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时),可得

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\[2ex] x_2 = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}$$

但此公式不容易记忆,因此也就不便于应用. 针对这一缺点,Sarrus 创造性地

引入记号

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \triangleq ad-bc \tag{1.6}$$

从而使上述公式变为容易记忆的形式

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

在引入的上述记号中，横排称为行，竖排称为列，因为共有二行二列，所以称为二阶行列式.

二阶行列式的定义本身也给出了它的计算方法

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

从左上角到右下角的对角线称为主对角线，沿主对角线上的二元素之积取正号. 从右上角到左下角的对角线称为次对角线，沿次对角线上的二元素之积取负号. 这种计算方法称为二阶行列式的对角线法则.

在解一般形式的三元三式方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

时，暂把前两个方程中的 x_1 视为常数，利用二元二次方程组求解公式求出 x_2 与 x_3 后，再代入第三个方程求得 x_1 为

$$\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{22}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

用同样的方法可求得 x_2 与 x_3.

与解二元一次二式方程组时遇到的问题一样，上述公式既不便于记忆也不便于应用. 为此，我们也像引入二阶行列式那样引入三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \triangleq a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32} \tag{1.7}$$

从而把解三元一次三式方程组的一般公式变为便于记忆的形式

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad x_3=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

以 D_1,D_2,D_3 和 D 分别代替 x_1,x_2,x_3 的分子和 x_1 的分母，则上式可简记为

$$x_1=\frac{D_1}{D} \qquad x_2=\frac{D_2}{D} \qquad x_3=\frac{D_3}{D}$$

依此类推，有理由猜测解未知数更多的方程组时也有类似的结论，可以定义出更高阶的行列式，但随着阶数的增加，这样的做法计算量过大，显然是不可取的. 因此我们考虑通过对二阶、三阶行列式的特点进行归纳来猜测 n 阶行列式的一般规律. 让我们研究一下三阶行列式的规律. 由(1.7)式易见三阶行列式有下列几个特点：

(1) 三阶行列式是 3!个项的代数和.

(2) 它的每项都是行列式中三个元素的乘积，这三个元素恰好是每行每列各一个.

(3) 每项都带有确定的符号，且其符号满足下列规律：若把一般项记为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的形式，即行下标排成 123，则 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$ 的符号为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}$.

这样(1.7)式就可写成下列形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

同样(1.6)式也可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

由此，我们来给出一般 n 阶行列式的定义.

定义 2 由 n^2 个数(实或复数)排成一个 n 行 n 列的表，并在两边各画一条竖线记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (a_{ij}\text{表示位于第 } i \text{ 行、第 } j \text{ 列位置的数}) \tag{1.8}$$

所表示的数 D 称为 n 阶行列式. 这个数 D(即 n 阶行列式)等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.9}$$

的代数和. 这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列,(1.9)式的符号由 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$ 来确定. 这一定义可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.10}$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

我们称(1.10)式为 n 阶行列式的展开式. 今后我们用符号 $\det(a_{ij})$ 来表示以 a_{ij} 为元素的 n 阶行列式,在不至混淆的时候也常用 $|A|$,$|B|$ 记号表示 n 阶行列式.

一个 n 阶行列式正是前面所说的二阶和三阶行列式的推广. 特别,当 $n=1$ 时,一阶行列式 $|a|$ 就是数 a.

定义 2 表明,为了计算 n 阶行列式,首先作不同行不同列元素的乘积,把构成这些乘积的元素按行指标排成自然顺序,然后由列指标所排列的奇偶性来决定这一项的符号.

由定义 1 可以看出,n 阶行列式是由 $n!$ 个项组成. 由于 $n!$ 是一个很大的数 $(4!=24,5!=120,\cdots)$,此时用定义求行列式的值在一般情况下是十分困难的. 下面我们用定义来求两个特殊行列式的值.

例 2 计算下列四阶行列式的值:

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解 D 的一般项可以写为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$,对于 j_1 只能取 1 或 4,因为,第一行的元素除第一和第四列的元素外,其余元素均为零,于是

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com