上海市大学教材

高等数学

（工科用）

上册

上海人民出版社

上海市大学教材

高 等 数 学

(工 科 用)

上 册

工科《高等数学》编写组

上海人民出版社出版

(上 海 绍 兴 路 5 号)

新华书店上海发行所发行 上海中华印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 15.75 字数 387,000

1974年1月第1版 1976年8月第4次印刷

统一书号: 13171·79 定价: 1.25 元

出 版 说 明

本书共分二册：上册包括一元函数微积分和微分方程；下册包括级数，向量和空间解析几何，二元函数微积分，以及附录——线性代数初步。除附录以外，各章都配有习题和复习题.

本书可作为上海市工科院校各专业高等数学课程的教材或教学参考书．使用时，各专业应根据教学要求在内容上作适当的取舍（特别是加上星号（*）的章节）．同时，在使用中希望结合实际情况选编典型课题进行教学，以便更好地做到理论联系实际.

由于我们的马列主义水平不高，对毛主席的教育革命思想领会不够，实践经验又不足，因而教材中一定有不少缺点和错误，恳切地希望广大读者提出批评和指正.

工科《高等数学》编写组

一九七三年八月

目　录

引　言

数学是研究现实世界中的空间形式和数量关系的科学．初等数学是常数的数学，而高等数学则是变数的数学，其中最重要的部分是微积分，它在本质上不外是辩证法在数学方面的运用．高等数学是随着社会生产的不断发展而产生和发展起来的，是人们认识自然和改造自然的数学工具．学习高等数学必须以唯物辩证法为指导，努力做到理论联系实际，坚持为三大革命实践服务．

一、微积分是怎样产生和发展起来的？

恩格斯指出："**科学的发生和发展一开始就是由生产决定的。**"（《自然辩证法》）微积分正是由于生产实践的需要，在十七世纪产生的．

十六世纪的欧洲，处于资本主义萌芽时期，适应资本原始积累的需要，在残酷剥削劳动人民和掠夺殖民地的基础上，生产力得到很大的发展．工业方面有机械工场的建立和机械用于采矿、冶金等事业．美洲的发现，环球航行的成功，通商贸易的扩大，促进了交通事业的发达．生产的发展，向自然科学提出了新的研究课题，开阔了人们的眼界，同时也为自然科学研究创造了物质技术条件．哥白尼的"太阳中心说"标志着自然科学从宗教神权统治下的解放．从此，自然科学便迅速发展起来．

当时，生产和技术的大量问题迫切要求力学、天文学等基础学科的发展，这些学科是离不开数学的，因而也就推动了数学的发展．航海事业需要确定船只在海洋中的位置，这就要求精确地测

定地球的经纬度和制造准确的时钟，于是促进了对天体运行的深入研究；船舶的改进，必须探讨流体及物体在流体中运动的规律；战争中，要求炮弹打得准确，导致对抛射体运动的研究．此外，在机械、建筑、水利等方面也提出了许多课题．它们都向数学提出了种种新问题，要解决这些问题，单用原来的初等数学方法就不够了．例如，在以落体和行星为典型的机械运动的研究中，提出了许多问题，其中最基本的有两个：一个是已知路程求速度；另一个是已知速度求路程．在等速运动的情况下，这两个问题用初等数学就可以解决：速度＝路程÷时间；路程＝速度×时间．但是，在变速运动，也就是在速度随时间变化的情况下，只用初等数学的方法来解决就有困难．因为在变速运动的情况下，路程除以时间，只能得到在这段时间内的平均速度，而不能得出所要知道的每一瞬时的速度．同样地，由于速度随时间在变化，简单地用速度乘时间也不能准确地计算出路程来．这就要求数学突破研究常数的范围，提供研究物体运动及变化过程的新工具——变数数学．微积分作为变数数学的主要部分，正是适应当时的实际需要，逐渐产生出来的．

历史事实还表明，微积分的产生，是以广大劳动人民的实践经验为基础的，是与科学地继承和发展了数学上长期积累的研究成果分不开的．在古代，不论我国和西方，都已有微积分计算方法的萌芽．例如在我国，早在公元三世纪，刘徽总结了前人研究的成果，在他所著的《九章算术注》中提出了用圆内接正多边形面积计算圆面积的“割圆术”：“割之弥细，所失弥少．割之又割，以至于不可割，则与圆合体而无所失矣．”他并且用这种方法计算出圆周率 π 的近似值达到 3.1416．“割圆术”就包含了微积分思想的萌芽．公元前三世纪希腊的科学家阿基米德也曾利用圆的内接正多边形和外切正多边形来推算圆的周长和面积．到了十六世纪以后，关于面积的计算问题，又有了新的发展，人们普遍地把曲线所围成的

平面图形的一块面积近似地看成很多个细窄的矩形面积的总和. 另外，人们在研究透镜的聚光性能和一个量的极大(极小)值问题时，讨论了求曲线的切线问题，并借助运动的观点，提出了确定切线位置的一般方法. 这些都是微积分的雏形.

恩格斯指出："**数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，而它们也就立刻产生**".(《自然辩证法》)笛卡儿将变数引进了数学，把描述运动规律的函数关系和几何中曲线问题的研究统一起来，从而把力学中关于求速度与求路程的两个基本问题，和几何中求切线与求面积的两个基本问题统一起来. 于是，前述生产实践中提出来的问题，就可以应用数学上长期积累的关于切线和面积的研究成果加以解决，这不但使微积分的产生成为必需，而且也有了可能.

这样，由于生产实践的需要，在广大劳动人民实践经验和人们长期积累的大量数学成果的基础上，十七世纪后半叶，终于由牛顿和莱布尼茨总结并发展了前人的工作，几乎同时地建立了微积分. 正如恩格斯指出的：微积分"**是由牛顿和莱布尼茨大体上完成的，但不是由他们发明的。**"(《自然辩证法》)

毛主席教导我们："**一个正确的认识，往往需要经过由物质到精神，由精神到物质，即由实践到认识，由认识到实践这样多次的反复，才能够完成。**"由牛顿和莱布尼茨大体上完成的微积分，在实践中得到了广泛的应用，并证明它在解决实际问题中显示了成效. 但由于历史条件的限制，对变数数学中的一些基本概念和关系，还不能突破古典力学和几何直观的局限，因而还不能形成深刻的认识. 随着微积分应用的不断扩大与深入，遇到的数量关系日益复杂，迫切要求微积分上升为严格的数学理论. 在实践需要的推动下，到十九世纪上半叶，在积累起来的大量数学成果的基础上，人们终于在无穷级数的研究中开始建立了极限理论，对微积分有了

比较深刻的认识，形成了微积分的理论系统，从而使微积分能够更好地、更有效地解决实际问题，成为人们认识世界和改造世界的有力的数学工具．随着生产的进一步向前发展，数学继续向其他领域深入，变数数学的内容越来越丰富了．

微积分在生产实践中产生和发展的历史，生动地说明了“**实践、认识、再实践、再认识，这种形式，循环往复以至无穷，而实践和认识之每一循环的内容，都比较地进到了高一级的程度**”这个唯物论的反映论的真理．离开了实践，任何理论都不可能凭空地从头脑中产生出来．但是，曾有一些人，如杜林之流，把数学的产生看作是与生产需要无关的，纯粹是悟性“自己的自由创造物和想象物”，是一两个“天才”、“能者”灵感一来的发明创造．这种唯心论的先验论已为微积分产生和发展的历史事实所驳斥．在微积分形成比较深刻的理论系统以后，又有一些数学家和唯心主义哲学家，利用数学上的这个新成就，片面夸大抽象思维和逻辑推理的作用，把它们绝对化，否认数学研究的对象是客观世界的数量关系和空间形式，把数学说成是“纯粹的演绎体系”，或者说数学研究的对象不过是纯“形式的符号”，他们给数学以唯心主义的解释，企图把数学引向脱离实际的邪路上去．这些唯心主义的思想虽然已经受到马列主义的多次批判，但是它们的影响还是不可忽视的．无产阶级文化大革命以前，刘少奇一伙在教育战线上疯狂推行反革命修正主义路线．在这条路线的影响下，旧大学的高等数学教材，严重违背了辩证唯物主义的认识路线．旧教材抹煞微积分的实践来源，故意割断了人们对微积分由感性认识上升到理性认识的联系，鼓吹“极限推出微积分”，宣扬数学可以脱离社会实践而自身发展的唯心主义观点．旧教材在理论至上的思想指导下，只谈抽象的数学理论，不谈理论在实践中的应用，造成理论严重脱离实际．旧教材不讲矛盾，不讲转化，不讲辩证法，反而把形式逻辑的推理论证奉为至高无上的唯一方法，连微积分本身固有的辩证法也被形

而上学掩盖了．这就把微积分搞得神秘难懂．我们必须以马列主义毛泽东思想为武器，批判林彪一伙所鼓吹的唯心论的先验论，肃清数学领域中的唯心主义流毒，坚持政治和业务、理论和实际的统一，彻底改革旧教材．

二、微积分是怎样解决实际问题的？

为了对微积分所要解决的问题和使用的方法先有个大致的了解，下面来分析微积分中两个典型问题．

问题一 在冶金工业中有一种碎铁机，它利用一个落锤从高处自由下落把铁块砸碎（图1）．落锤砸碎铁块的能力，与它触及铁块时的动量 $K=mv$ 有关，其中 m 为落锤的质量，v 为落锤的速度．由于落锤的质量是已知的，因此要知道它的动量，就要算出落锤与铁块碰撞时的速度．而落锤下落是作自由落体运动的，所以问题就归结为：求自由落体在某个时刻的速度（即瞬时速度）．

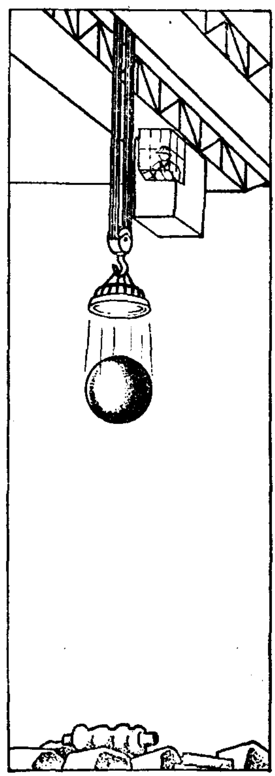


图 1

由物理学知道，自由落体的运动规律为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 s 是路程，t 是时间，$g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度．上述问题就成为：已知 $s=4.9t^2$，求自由落体在 $t=t_0$ 秒时的瞬时速度．为了确定起见，不妨取 $t_0=1$ 为例来进行讨论．

解：(1) 分析矛盾.

我们知道，物体作等速直线运动时，它的速度是不变的，可以用初等数学的方法求得，即

$$速度=\frac{路程}{时间}.$$

对于自由落体运动来说，情况就不同了. 由于自由落体的速度是随着时间而改变的，所以应用上面的公式，只能得到落体在一段时间内的平均速度，而不是落体的瞬时速度. 因此，若要以计算等速运动速度的方法为基础，来解决变速运动的速度问题，就会遇到速度“变”与“不变”的矛盾.

(2) 解决矛盾.

如何解决这个矛盾呢？毛主席教导我们：**“一切真知都是从直接经验发源的。”**劳动人民在长期生产实践中积累起来的丰富经验，给了我们很好的启示.

如为了确定桥墩的形状，人们需要掌握桥墩附近的水流情况. 一般说来，河水的流速是不断变化的，劳动人民把很短一段时间内的流速看成不变，在桥墩上游投放浮标，测得浮标在很短的一段时间内流过的路程，再把测得的路程除以这段时间，从而求得桥墩附近河水在给定时刻的流速的近似值. 劳动人民测定流速的经验告诉我们：在很短一段时间内，河水流速的变化很小，可以把变速运动近似地看作等速运动.

这就启示我们用下述分析方法来解决自由落体的速度问题. 从自由落体运动的整个过程来看，速度的变化是显著的，但在时刻 $t=1$ 秒邻近很短的一段时间内，比如从 $t=1$ 秒到 $t=1.1$ 秒这段时间内，速度变化不大. 因此，在这段很短的时间内，可以把变速运动近似地看作等速运动. 这时候，如果把落体下落的路程

$$4.9\times(1.1)^2-4.9\times1^2=1.029\ (米)$$

t=2 秒时

除以时间

$$1.1-1=0.1\ (秒),$$

便得到落体在 $t=1$ 秒到 $t=1.1$ 秒这段时间内的平均速度

$$\bar{v}_1=\frac{1.029}{0.1}=10.29\ (米/秒).$$

$\bar{v}_1$ 就是落体在 $t=1$ 秒时刻的瞬时速度 v 的一个近似值.

当时刻 $t=1$ 秒邻近的一段时间比 0.1 秒再缩短一些时，落体速度的变化就更小，从而求得的平均速度就更接近于落体在时刻 $t=1$ 秒时的瞬时速度. 比如，我们来计算从时刻 $t=1$ 秒到 $t=1.01$ 秒这段时间内落体的平均速度

$$\bar{v}_2=\frac{4.9\times(1.01)^2-4.9\times1^2}{1.01-1}=9.849\ (米/秒).$$

$\bar{v}_2$ 就比 $\bar{v}_1$ 更接近于落体在时刻 $t=1$ 秒时的瞬时速度.

一般地，落体在 $t=1$ 秒到 $t=(1+\Delta t)$ 秒这段时间内的平均速度为

$$\bar{v}=\frac{4.9\times(1+\Delta t)^2-4.9\times1^2}{(1+\Delta t)-1}=9.8+4.9(\Delta t).$$

但不管这小段时间的长度 Δt 取得多么小，$\bar{v}$ 还只是落体的平均速度，不是落体在时刻 $t=1$ 秒时的瞬时速度 v.

在形而上学看来，平均速度就是平均速度，瞬时速度就是瞬时速度，它们是一成不变的两种事物. 但是，在辩证法看来，瞬时速度和平均速度是一对矛盾，它们既有质的区别，又在一定条件下可以互相转化. 恩格斯指出：“**辩证法在考察事物及其在头脑中的反映时，本质上是从它们的联系、它们的连结、它们的运动、它们的产生和消失方面去考察的。**”(《反杜林论》)我们看到，Δt 越小，平均速度就越接近于瞬时速度；当 Δt 无限变小时，平均速度就无限接近于瞬时速度. 这就是说：在 Δt 无限变小的过程中，平均速度就向瞬时速度转化. 这里，转化的条件是 Δt 无限变小. 因此，我们可以从 Δt 无限变小的过程中，考察平均速度 $\bar{v}$ 的变化趋势，来寻求瞬时速度 v.

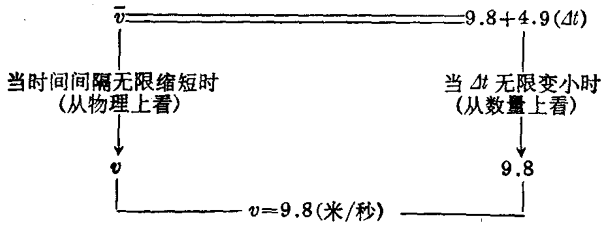
从 $\bar{v}$ 的表达式

$$\bar{v}=9.8+4.9(\Delta t)$$

中可以看出，当 Δt 无限变小时，$\bar{v}$ 无限接近于一个确定值 9.8. 因此，自由落体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度是 9.8 米/秒，即

$$v=9.8\ (\text{米/秒}).$$

上面关于平均速度向瞬时速度转化的分析，可图示如下：



综合上面的讨论，我们得到求自由落体的瞬时速度的步骤如下：

第一步：以“不变代变”，求出在 $t=1$ 秒到 $t=(1+\Delta t)$ 秒这段时间内的平均速度 $\bar{v}$.

第二步：在 Δt 无限变小的过程中，考察平均速度 $\bar{v}$ 的变化趋势，从而得出自由落体在 $t=1$ 秒时的瞬时速度 v.

问题二 在生产实际中，往往要求曲线围成的平面图形的面积．例如，在计算船舶的排水量时，需要知道船体横截面的面积(图 2)．

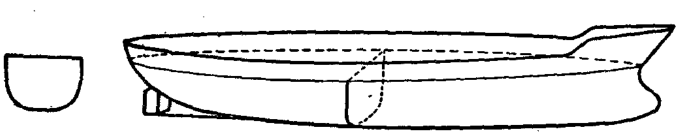


图 2

关于计算曲线围成的图形面积的一般讨论，将在第四章中进行．现在先看一个简单的例子．

计算由抛物线 $y=x^2$ 及直线 $x=1$, $y=0$ 所围成的曲边三角形(图 3) 的面积.

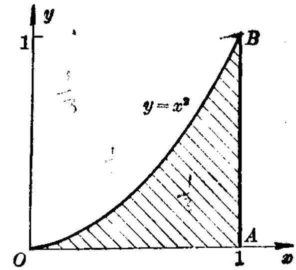


图 3

解: (1) 分析矛盾.

我们知道, 矩形底边上各点处的高度是不变的, 它的面积可以用初等数学的方法计算, 即

矩形面积=高×底.

对于曲边三角形来说, 情况就不同了. 它的底边上各点处的高度 $y=x^2$ 是变的, 所以不能直接应用上面的公式来计算曲边三角形的面积. 现在, 要以矩形面积的计算方法为基础, 解决曲边三角形面积的计算问题, 就会遇到高度"变"与"不变"的矛盾.

(2) 解决矛盾.

我们还是从劳动人民的实践经验出发, 来寻求解决这个矛盾的方法.

劳动人民为了控制流量, 做好防洪、灌溉工作, 需要估算河道横断面的面积. 他们在河道两岸 A、B 两点拉一根绳子, 然后沿着绳子每隔一定距离, 用竹竿测量一下水深, 再以量得的深度为高, 算出如图 4 所示的窄矩形的面积, 并把这些窄矩形的面积加起来, 作为河道横断面面积的近似值. 这就是, 通过把河道断面分成许多窄条, 把每个窄条中河床的深度看成不变的, 从而估算出河道横断面的面积. 劳动人民估算河道断面面积的经验告诉我们: 从整体来看, 河床深度的变化是显著的, 但从一小段看, 深度变化不大, 可以近似地看成不变.

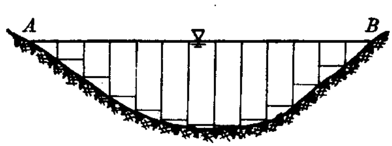


图 4

这就启示我们用下述方法来解决曲边三角形面积的计算问