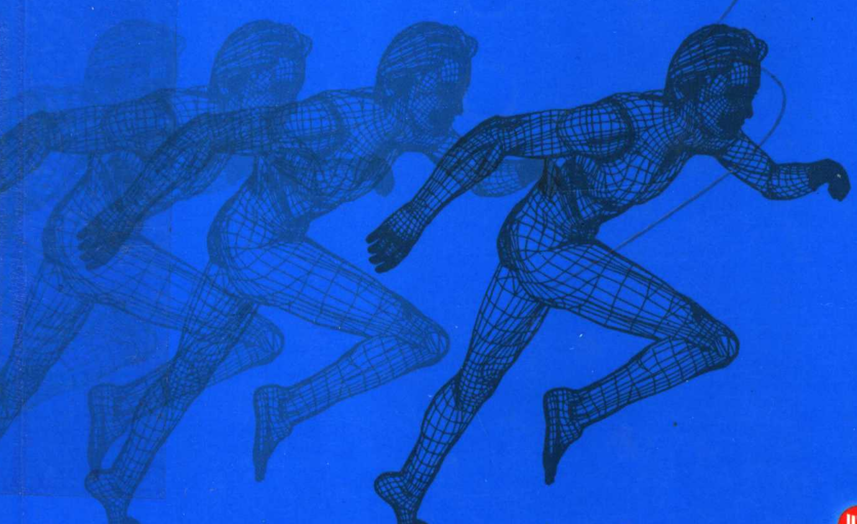
概率与统计习题解答

高等师范院校教材

GaoDengShiFan YuanXiaoJiaoCai

赵跃生◎编



华东师范大学出版社

概率与统计习题解答

赵跃生　编

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率与统计习题解答/赵跃生编. —上海:华东师范大学出版社,2007.7
ISBN 978-7-5617-5523-5

Ⅰ.概… Ⅱ.赵… Ⅲ.①概率论—高等学校—解题②数理统计—高等学校—解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第113676号

概率与统计习题解答

编　　者　赵跃生
项目编辑　朱建宝
文字编辑　李　娜
封面设计　卢晓红
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电　　话　021-62450163转各部　行政传真021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话021-62869887　021-54340188

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×1092　16开
印　　张　15.25
字　　数　290千字
版　　次　2007年8月第1版
印　　次　2007年8月第1次
印　　数　3100
书　　号　ISBN 978-7-5617-5523-5/O·196
定　　价　23.00元

出 版 人　朱杰人

前　言

1988 年，我们受原国家教委委托为师范专科学校数学专业编写了概率论与数理统计教材，当时教材的名称为《概率与数理统计》，教材由华东师范大学出版社出版发行。教材发行后，深受各高等院校和广大读者的欢迎。该教材不仅为师范专科学校的数学专业采用，许多大学(包括综合性大学、理工院校)的数学专业及非数学专业也广泛将此书作为教材或教学参考书，为此该教材连续印刷 8 次。1996 年，我们又应出版社之约，对教材进行了修订。修订版发行后继续受各高等院校及广大读者的青睐，许多读者和教师纷纷来信对教材的特色给予了充分的肯定，同时也希望我们编写与教材相配套的习题解答。考虑到读者的强烈要求，我们曾给部分高校提供过油印的习题解答，但很难满足众多读者的需要。

由于教材深受读者的欢迎，同时为使教材适应知识更新、教育发展的需要，2006 年，我们又再次对教材进行了修改，形成了第 3 版。第 3 版的教材名定为《概率与统计》。出版社考虑到广大读者的要求，希望我们编写一本相配套的习题解答作为该教材的教学辅助书籍。为此，本人受主编缪铨生教授之托，编演了该书的习题解答。

本习题解答对教材中的习题作了较详细的解答。但由于时间仓促，加之作者的水平有限，本书所提供的解答未必是最优的解答方法，解答过程中也难免会出现一些错误，敬请读者批评指正。

本习题解答的形成中，得到了缪铨生教授和华东师范大学出版社编辑的关心和帮助，借此表示衷心的谢意。

赵跃生

2007 年 3 月

目录

第1章 事件与概率

第2章 随机变量及其分布

第3章 多维随机变量及其分布

第 10 章　非参数假设检验

第 11 章　方差分析与回归分析

第 1 章 事件与概率

习题 1.1

(A)

1. 某袋中装有编号为 1、2、3、4 的签各一根，不放回地从中先后取出两根签，试写出该试验的样本空间，并写出事件 A="取出的签中最大号码为 3"所含的样本点.

解 记 ω_{ij}="第一、二次取出的分别是 i、j 号签"，则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_{ij}:i、j=1,2,3,4;\ i\neq j\},$$

事件 A 可表示为

$$A=\{\omega_{ij}:\max(i,j)=3;\ i、j=1,2,3;\ i\neq j\}.$$

2. 连续不断地投篮，直到命中为止. 若记"投进"为 1，"投不进"为 0，试写出该试验的样本点和样本空间.

解 记 $\omega_0=000\cdots$，$\omega_n=\underbrace{00\cdots0}_{n-1}1$，$n=1,2,\cdots$；则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_n:n=0,1,2,\cdots\}.$$

3. 在图书馆按书号任选一本书，设 A 表示"选的是数学书"，B 表示"选的是中文版的"，C 表示"选的是 1999 年出版的"，试问：

(1) $AB\overline{C}$表示什么事件？

(2) 在什么条件下 $ABC=A$？

(3) $\overline{C}\cup B$ 表示什么意思？

(4) 若 $\overline{A}=B$ 是否意味着馆中所有数学书都不是中文版的？

解 (1) $AB\overline{C}$="选的是非 1999 年出版的中文版数学书"；

(2) $ABC=A$ 等价于 $A\subset BC$，因此，当图书馆的数学书都是 1999 年出版的中文版书籍时 $ABC=A$；

(3) $\overline{C} \cup B =$ “选的是中文版或非 1999 年出版的书”；

(4) $\overline{A} = B$ 表示非数学书都是中文版的，同时中文版书都是非数学书，因此，$\overline{A} = B$ 可以表明馆中所有数学书都不是中文版的.

4. 从自然数集中任取一数，记 $A=$“取出的数是 5 的倍数”，$B=$“取出的数是偶数”，试问事件 $A\cup B$，AB，$A-B$ 各表示什么意思？

解 $A\cup B=$“取出的数是偶数或 5 的倍数”；

$AB=$“取出的数是 10 的倍数”；

$A-B=$“取出的数是 5 的奇数倍”.

5. 从装有 3 个黑球 4 个白球的袋中依次取出两球，记 $A=$“第一次取出白球”，$B=$“第二次取出黑球”，$C=$“第一次取出黑球，第二次取出白球”，$D=$“两次取得的是同色球”，$E=$“两次取得的球都是黑的”，试问在这些事件中哪些事件包含哪些事件？哪些事件互不相容？有没有对立事件？

解 具有包含关系的是 $E\subset B$，$E\subset D$；

互不相容的事件是 A 与 C、A 与 E、B 与 C、C 与 D、C 与 E；

无对立事件.

6. 对目标进行 3 次射击，记 $A_i=$“第 i 次射击时射中目标”，$i=1, 2, 3$. 试用 A_1、A_2、A_3 表示事件：

(1) $B=$“恰好有 2 次射中目标”；

(2) $C=$“最多有 1 次射中目标”.

解 (1) $B = A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3$；

(2) $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3$.

7. 有一电路(图 1.1)，用 A_i 表示事件“接点开关 i 闭合”，$i=1, 2, 3, 4, 5$，试用 A_i，$i=1, 2, \cdots, 5$ 表示事件 $B=$“LR 是通路”.

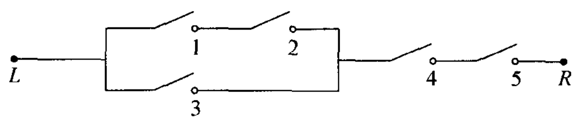


图 1.1

解 $B = A_1A_2A_4A_5 \cup A_3A_4A_5$.

8. 指出下列各等式是否成立？并说明理由.

(1) $A\cup B = A\cup \overline{A}B$；

(2) $(A-B)\cup B = A$；

(3) $(AB)(A\overline{B}) = \varnothing$；

(4) 若 $A\subset B$，那么 $A = AB$；

(5) 若 $AB=\varnothing$，且 $C\subset A$，则 $BC=\varnothing$；

(6) 若 $AC=\varnothing$，$AB=\varnothing$，则 $BC=\varnothing$.

解 (1)、(3)、(4)、(5)中的等式是成立的，其证明十分容易，从略.

(2) 与(6) 不一定成立. 一般讲，只要 $B \subset A$ 不成立，则 $(A-B) \cup B = A$ 就不成立；而当 $AB = \varnothing$，$B = C \neq \varnothing$ 时，(6) 的条件满足，但 $BC \neq \varnothing$.

9. A、B、C 三事件互不相容与 $ABC = \varnothing$ 是不是一回事？为什么？

解 A、B、C 三事件互不相容与 $ABC = \varnothing$ 不是一回事，因为，前者虽然可以推出后者等式成立，但 $ABC = \varnothing$ 推不出 $AB = \varnothing$（及 $BC = \varnothing$，$AC = \varnothing$）.

10. 证明：

(1) 德·摩根公式；

(2) 频率的非负性、规范性、可加性.

证明 (1) 下面用概率语言来证明 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

若$\overline{A \cup B}$发生，即 $A \cup B$ 不发生，从而 A 与 B 均不发生，即$\overline{A}$与$\overline{B}$都发生，故$\overline{A} \cap \overline{B}$发生，所以 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$；

反之，若$\overline{A} \cap \overline{B}$发生，即$\overline{A}$与$\overline{B}$均发生，从而 A 与 B 都不发生，即 $A \cup B$ 不发生，故$\overline{A \cup B}$发生，所以 $\overline{A} \cap \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$；

综合以上两个方面的证明，即知 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

类似可证$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(2) (i) 由于

$$F_n(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 发生的频数 } \mu_n}{\text{试验总次数 } n}$$

而 $0 \leqslant \mu_n \leqslant n$，故 $0 \leqslant F_n(A) \leqslant 1$；

(ii) 由于必然事件 Ω 在任何一次试验中都必然发生，故 Ω 发生的频数＝试验的总次数 n，从而 $F_n(\Omega) = 1$；

(iii) 若 $AB = \varnothing$，即 A 与 B 不可能同时发生，故 n 次试验中事件 $A \cup B$ 发生的频数 $\mu_n(A \cup B) = n$ 次试验中事件 A 发生的频数 $\mu_n(A) + n$ 次试验中事件 B 发生的频数 $\mu_n(B)$，从而

$$\begin{aligned} F_n(A \cup B) &= \frac{\mu_n(A \cup B)}{n} = \frac{\mu_n(A) + \mu_n(B)}{n} \\ &= \frac{\mu_n(A)}{n} + \frac{\mu_n(B)}{n} = F_n(A) + F_n(B). \end{aligned}$$

11. 若 B 分别与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，试证 B 与 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 也不相容.

证明 由已知条件知，对于任意的 $1 \leqslant i \leqslant n$，$BA_i = \varnothing$，从而 $B(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = BA_1 \cup BA_2 \cup \cdots \cup BA_n = \varnothing$，故 B 与 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 也不相容.

(B)

1. 甲、乙两人轮流抛一枚硬币,甲先抛,然后乙抛,如此继续下去. 规定首先抛出正面者获胜,试写出该试验的样本空间,并确定 $B=$"乙获胜"所含的样本点.

解 记 $\omega_0=$"各次抛均出现反面",$\omega_n=$"第 n 次首次出现正面", $n=1, 2, \cdots$; 则样本空间为

$$\Omega=\{\omega_n : n=0, 1, 2, \cdots\},$$

事件 B 可表示为

$$B=\{\omega_{2n} : n=1, 2, \cdots\}.$$

2. 一个学生做了 n 道习题,以 A_i 表示"他第 i 道题做对了"这一事件 $(1\leqslant i\leqslant n)$,试用 A_i 表示下列事件:

(1) 没有一道习题做错;

(2) 至少有一道习题做错;

(3) 恰好有一道习题做错;

(4) 至少有两道习题做对.

解 (1) "没有一道习题做错" $=\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$;

(2) "至少有一道习题做错" $=\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$;

(3) "恰好有一道习题做错" $=\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_1\cdots A_{i-1}\overline{A}_i A_{i+1}\cdots A_n$;

(4) "至少有两道习题做对" $=\bigcup\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}^{n} A_i A_j$.

3. 试把 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 表示成 n 个两两互不相容事件之和.

解 记 $A_0=\varnothing$, $B_i=A_k\overline{A}_{k-1}\cdots\overline{A}_0 (k=1, 2, \cdots, n)$,则易知 $B_iB_j=\varnothing (i、j=1, 2, \cdots, n; i\neq j)$,且 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$.

4. 若事件 X 满足 $(\overline{X\cup A})\cup(\overline{X\cup \overline{A}})=B$,试求 X.

解 因为 $\overline{(\overline{X\cup A})\cup(\overline{X\cup \overline{A}})}=(X\cup A)\cap(X\cup \overline{A})=X\cup(A\cap\overline{A})=X$,故在所给等式两边取"逆",即得 $X=\overline{B}$.

习题 1.2

(A)

1. 掷两枚均匀的骰子,试验的所有结果可表示为 $\omega_i=$"点数之和是 i 点",

$i=2, \cdots, 12$，样本空间 $\Omega=\{\omega_2, \cdots, \omega_{12}\}$，试问 Ω 是古典概型的样本空间吗？

解 Ω 不是古典概型. 因为 Ω 虽然只有有限个样本点，但各样本点的出现不具有等可能性，例如 ω_3 出现的可能性大小是 ω_2 出现的两倍.

2. 对于古典概型，概率为零的事件是否一定是不可能事件？

解 在古典概型中，概率为零的事件一定是不可能事件，即概率为零的事件不含有任何样本点. 这是因为，如果古典概型含有 n 个样本点，则每一样本点出现的概率均为 $\frac{1}{n}$.

3. 在一盒中装有标号从 1 至 5 的五只徽章，现从中一次一只地任意摸出三只徽章，求最后摸出的徽章是奇数号的概率.

解 这是一古典概型. 基本事件总数为 P_5^3，若记 $A=$"最后摸出的徽章是奇数号"，则 A 包含的基本事件数为 $3P_4^2$，故所求事件的概率为

$$P(A)=\frac{3P_4^2}{P_5^3}=\frac{3}{5}=0.6.$$

4. a、b、c、d、e 五位学生在一张课桌上按任意次序就座，试求下列事件的概率：

(1) a 坐在边上；

(2) a 和 b 坐在边上；

(3) a 或 b 坐在边上；

(4) a 和 b 都不坐在边上；

(5) a 正好坐在中间.

解 这是一古典概型. a、b、c、d、e 五位学生在一张课桌上按任意次序就座有 $5!$ 种坐法.

(1) a 坐在边上所对应的坐法有 $2\times 4!$ 种，从而其概率为

$$p_1=\frac{2\times 4!}{5!}=\frac{2}{5}=0.4;$$

(2) a 和 b 坐在边上所对应的坐法有 $2\times 3!$ 种，从而其概率为

$$p_2=\frac{2\times 3!}{5!}=\frac{1}{10}=0.1;$$

(3) a 或 b 坐在边上所对应的坐法有 $2\times 4!+2\times 4!-2\times 3!$ 种，从而其概率为

$$p_3=\frac{2\times 4!+2\times 4!-2\times 3!}{5!}=\frac{7}{10}=0.7;$$

(4) a 和 b 都不坐在边上的概率为

$$p_4=1-p_3=0.3;$$

(5) a 正好坐在中间所对应的坐法有 $4!$ 种，从而其概率为

$$p_5 = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

5. 某城市的电话号码都是 6 位数码(每位数码可取 0 到 9 共十个数字)，如果从电话号码本中任指一个电话号码，求：

(1) 头两位是 88 的概率；

(2) 头两位都不超过 8 的概率；

(3) 6 位全不相同的概率.

解 假定该城市的电话号码是从 000000 到 999999 共 10^6 个，则

(1) 头两位是 88 的号码有 10^4 个，故所求概率为

$$p_1 = \frac{10^4}{10^6} = \frac{1}{100} = 0.01;$$

(2) 头两位都不超过 8 的号码有 $9\times9\times10^4$ 个，故所求概率为

$$p_2 = \frac{9\times9\times10^4}{10^6} = \frac{81}{100} = 0.81;$$

(3) 6 位全不相同的号码有 P_{10}^6 个，故所求概率为

$$p_3 = \frac{P_{10}^6}{10^6} = \frac{189}{1\,250} = 0.151\,2.$$

6. 在元件盒中装有 50 件固体组件，其中有 25 件一等品，15 件二等品及 10 件次品，从中任取 10 件，问下列事件的概率有多大？

(1) 恰有两件一等品，两件二等品；

(2) 恰有两件一等品；

(3) 没有次品.

解 从 50 件固体组件中任取 10 件有 C_{50}^{10} 种取法.

(1) 恰有两件一等品，两件二等品所对应的取法有 $C_{25}^2C_{15}^2C_{10}^6$ 种，故所求概率为

$$p_1 = \frac{C_{25}^2C_{15}^2C_{10}^6}{C_{50}^{10}} \approx 0.000\,644;$$

(2) 恰有两件一等品所对应的取法有 $C_{25}^2C_{25}^8$ 种，故所求概率为

$$p_2 = \frac{C_{25}^2C_{25}^8}{C_{50}^{10}} \approx 0.031\,6;$$

(3) 没有次品所对应的取法有 C_{40}^{10} 种，故所求概率为

$$p_3 = \frac{C_{40}^{10}}{C_{50}^{10}} \approx 0.825.$$

7. 分发一副 52 张的扑克牌，发第十四张牌是 A 的概率是多少？头一个 A 正好出现在第十四张的概率是多少？

解 根据题意，只要考虑发出前 14 张牌的情况. 由于问题与顺序有关，因此总的发法有 P_{52}^{14} 种.

记 B_1 =“发第十四张牌是 A”. 先考虑第十四张的那张 A，它可以是四种花色中的任一张，有 C_4^1 种；再考虑前十三张牌，它是余下的 51 张牌中的任意 13 张，有 P_{51}^{13} 种发法；因此发第十四张牌是 A 所对应的发法有 $C_4^1P_{51}^{13}$ 种，故

$$P(B_1)=\frac{C_4^1P_{51}^{13}}{P_{52}^{14}}=\frac{1}{13}\approx 0.076\,9.$$

记 B_2 =“头一个 A 正好出现在第十四张”. 由于前 13 张牌只能在不含 A 的 48 张牌中任取，有 P_{48}^{13} 种发法；而第十四张的那张 A 可以是四种花色中的任一张，有 C_4^1 种；因此头一个 A 正好出现在第十四张所对应的发法有 $C_4^1P_{48}^{13}$ 种，故

$$P(B_2)=\frac{C_4^1P_{48}^{13}}{P_{52}^{14}}\approx 0.031\,2.$$

8. 甲袋中有 3 只白球、7 只红球、15 只黑球；乙袋中 10 只白球、6 只红球、9 只黑球，现从两袋中各取一球，求两球颜色相同的概率.

解 从甲、乙两袋中各取一球有 $C_{25}^1C_{25}^1$ 种取法. “两球颜色相同”可以同是白球（有 $C_3^1C_{10}^1$ 种），可以同是红球（有 $C_7^1C_6^1$ 种），也可以同是黑球（有 $C_{15}^1C_9^1$ 种）；因此两球颜色相同所对应的取法有 $C_3^1C_{10}^1+C_7^1C_6^1+C_{15}^1C_9^1$ 种，故所求概率为

$$p=(C_3^1C_{10}^1+C_7^1C_6^1+C_{15}^1C_9^1)/C_{25}^1C_{25}^1=\frac{207}{625}=0.331\,2.$$

9. 有 6 个人在一座 10 层大楼的底层进入电梯，设他们中的每一个人自第二层开始在每一层离开是等可能的，求 6 个人在不同层次离开的概率.

解 由于每个人可以在除底层外的 9 层中的任一层离开，因此，6 个人的离开方式共有 9^6 种. “6 个人在不同层次离开”相当于“从 9 层中任意确定 6 层，每层各有一人离开”，因此它所对应的离开方式有 $C_9^6\times 6!=P_9^6$ 种，故所求概率为

$$p=\frac{P_9^6}{9^6}\approx 0.113\,8.$$

10. 某人有 5 把钥匙，其中两把是开门的，现随机地取出一把钥匙试着开门，不能开门的就扔掉，问第三次才能打开门的概率是多少？如果试过的钥匙不扔掉，这个概率又是多少？

解 根据题意，只要考虑前三次开门的情况，且问题与顺序有关. 记 A =“第三次才打开门”.

(1) 无放回情形. 总的取法有 P_5^3 种,而"第三次才打开门"表示前两次开门的钥匙只能在打不开门的那三把钥匙中取,第三次开门时才在能打开门的那两把钥匙中取,因此 A 所对应的取法有 $P_3^2P_2^1$ 种,故

$$P(A)=\frac{P_3^2P_2^1}{P_5^3}=\frac{1}{5}=0.2;$$

(2) 有放回情形. 此时总的取法有 5^3 种,A 所对应的取法为 $3^2\times2$ 种,故

$$P(A)=\frac{3^2\times2}{5^3}=\frac{18}{125}=0.144.$$

11. 一个盒子里装有标号 1, 2, …, 10 的标签,今随机地选取两张标签,假若

(1) 标签的选取是无放回的;

(2) 标签的选取是有放回的;

求两张标签上的数字为相邻整数的概率.

解 记 A="两张标签上的数字为相邻整数".

(1) 无放回情形. 问题与顺序无关,总的取法有 C_{10}^2 种,而 A 发生可能出现的结果为 1 与 2, 2 与 3, …, 9 与 10,共 9 种,故

$$P(A)=\frac{9}{C_{10}^2}=\frac{1}{5}=0.2.$$

(2) 有放回情形. 考虑顺序比较方便处理,此时总的取法有 10^2 种,而 A 所对应的取法有 9×2 种,故

$$P(A)=\frac{9\times2}{10^2}=0.18.$$

12. 给定 20 个人,问在 12 个月中正好包含 2 个人生日的月份有 4 个且正好包含 3 个人生日的月份有 4 个的概率是多少?

解 每个人的生日可以在 12 个月份中的任何一个,现有 20 人,因此所有可能结果有 12^{20} 个. 记 A="正好包含 2 个人生日的月份有 4 个且正好包含 3 个人生日的月份有 4 个",则 A 相当于"先从 12 个月份中确定不同的两个组别,每一个组别中各有 4 个月份;然后第一组的每个月份中正好包含 2 个人的生日,另一组的每个月份中正好包含 3 个人的生日",故 A 所含有的可能结果有 $C_{12}^4C_8^4C_{20}^2C_{18}^2C_{16}^2C_{14}^2C_{12}^3C_9^3C_6^3C_3^3$ 种,于是

$$P(A)=\frac{C_{12}^4C_8^4C_{20}^2C_{18}^2C_{16}^2C_{14}^2C_{12}^3C_9^3C_6^3C_3^3}{12^{20}}=\frac{(12!)\cdot(20!)}{(2!)^4\cdot(3!)^4\cdot(4!)^3\cdot12^{20}}.$$

13. 掷 10 次均匀的硬币,求出现正面的次数多于反面次数的概率.

解 记 A="出现正面的次数多于反面的次数",B="出现反面的次数多于正面的次数",C="出现正面与反面的次数相等". 则由题意: $A\cup B\cup C=\Omega$,且 A、

B、C 两两互不相容，从而

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

又由对称性可知 $P(A) = P(B)$，故

$$P(A) = \frac{1}{2}[1 - P(C)].$$

为此，我们只需计算 $P(C)$. 由于掷 10 次硬币共有 2^{10} 种可能结果，而出现正面、反面的次数相等意味着正面、反面各出现了 5 次，它有 C_{10}^{5} 种可能结果，因此

$$P(C) = \frac{C_{10}^{5}}{2^{10}},$$

从而

$$P(A) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{C_{10}^{5}}{2^{10}}\right].$$

14. 柜子里有 10 双鞋，现随机地取出 8 只，求下列事件的概率：

(1) 取出的鞋都不成双；

(2) 取出的鞋恰有两只是成双的；

(3) 取出的鞋至少有两只成双；

(4) 取出的鞋全部成双.

解 本题所说的 10 双鞋，其相互之间是有差异的. 从 10 双鞋中随机地取出 8 只有 C_{20}^{8} 种不同的取法.

(1) 记 A="取出的鞋都不成双"，它的实现相当于"先从 10 双鞋子任取 8 双，然后再在每一双鞋子中各取一只". 因此 A 所对应的取法有 $C_{10}^{8} \cdot 2^{8}$ 种，故

$$P(A) = \frac{C_{10}^{8} \cdot 2^{8}}{C_{20}^{8}}.$$

(2) 记 B="取出的鞋恰有两只是成双的"，它的实现相当于"先从 10 双鞋子任取一双，然后从余下的 9 双鞋中任取 6 双并在每双中各取一只". 因此 B 所对应的取法有 $C_{10}^{1} \cdot C_{9}^{6} \cdot 2^{6}$ 种，故

$$P(B) = \frac{C_{10}^{1} \cdot C_{9}^{6} \cdot 2^{6}}{C_{20}^{8}}.$$

(3) 记 C="取出的鞋至少有两只成双"，显然，$C=\overline{A}$，故

$$P(C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{C_{10}^{8} \cdot 2^{8}}{C_{20}^{8}}.$$

(4) 记 D="取出的鞋全部成双"，D 所对应的取法有 C_{10}^{4} 种，故

$$P(D)=\frac{C_{10}^4}{C_{20}^8}.$$

请读者思考：如果10双鞋子全部相同，且只要左、右脚鞋各一只就可配成一双，则本题的结论又如何？

15. 同时掷五个骰子，求下列事件的概率：

(1) A="点数各不相同"；

(2) B="至少出现两个6点"；

(3) C="恰有两个点数相同"；

(4) D="某两个点数相同，另三个同是另一个点数"；

(5) E="点数总和等于10".

解 由于每个骰子有6个点数，因此，同时掷五个骰子有 6^5 种不同的结果(考虑顺序).

(1) "点数各不相同"的实现相当于"先在6个不同点数中任意确定5个，然后让它们有序地各出现一次"，因此 A 所对应的掷法有 $C_6^5\times 5!=P_6^5$ 种，故

$$P(A)=\frac{P_6^5}{6^5}\approx 0.0926;$$

(2) $\overline{B}$="至多出现一个6点"，而"一个6点都不出现"所对应的掷法有 5^5 种，"恰好出现一个6点"所对应的掷法有 $C_5^1\times 5^4$ (C_5^1 反映的是哪个骰子出现6点)种，故

$$P(\overline{B})=\frac{5^5+C_5^1\times 5^4}{6^5}=2\times\left(\frac{5}{6}\right)^5,$$

于是

$$P(B)=1-2\times\left(\frac{5}{6}\right)^5;$$

(3) "恰有两个点数相同"的实现相当于"先在6个点数中确定出现两次的那个点数和另外三个各出现一次的点数，然后再确定它们出现的顺序(含有相同元素的排列)"，前者有 $C_6^1C_5^3$ 种确定法，后者有 $\frac{5!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!}=\frac{5!}{2!}=P_5^3$ 种排列法，因此 C 所对应的掷法有 $C_6^1C_5^3P_5^3$ 种，故

$$P(C)=\frac{C_6^1C_5^3P_5^3}{6^5}=\frac{25}{54};$$

(4) "某两个点数相同，另三个同是另一个点数"，其点数有 $C_6^1C_5^1$ 种确定法，其顺序(位置)有 $\frac{5!}{2!\times 3!}=C_5^2$ 种，所以 D 所对应的掷法有 $C_6^1C_5^1C_5^2$ 种，故