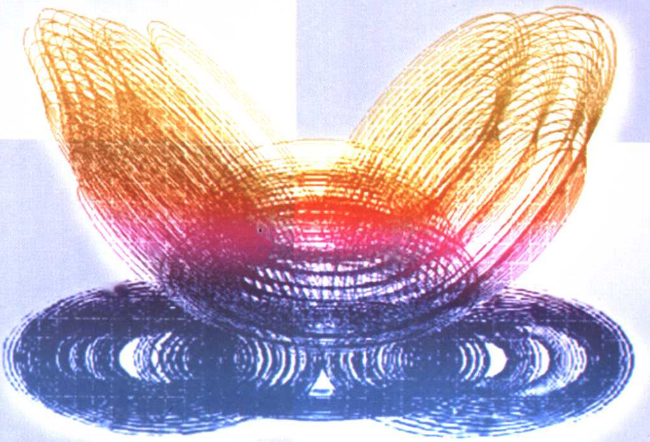
混沌系统与混沌电路

杨晓松　李清都 著



科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书重点介绍如何运用拓扑动力学技巧判定具体系统的混沌性，以及如何运用动力系统的混沌数学理论的基本思想和反馈控制技术设计混沌系统，并予以电路实现等若干课题．本书将现代动力系统纯数学理论的最新成果有机地运用于电路设计和系统分析，具有很强的理论性和实用性．

本书不仅对电子、通信、自动化等方面的研究者从事混沌电路研究有指导意义，而且对非线性物理以及应用数学工作者也有重要的启迪作用．

图书在版编目(CIP)数据

混沌系统与混沌电路/杨晓松，李清都著．—北京：科学出版社，2007
ISBN 978-7-03-019296-7

Ⅰ.混… Ⅱ.①杨…②李… Ⅲ.①混沌学②混沌学-应用-电子电路
Ⅳ.0415.5 TN710

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 099287 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超/责任校对：鲁 素
责任印制：赵德静/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年8月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007年8月第一次印刷 印张：10 3/4
印数：1—3 000 字数：197 000

定价：35.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

前　言

所谓动力系统的混沌性是指系统的动力学行为呈现一种局部不稳定而又具有有界性和某种整体混合性（或遍历性）. 动力系统混沌行为的发现和研究可以追溯到 Maxwell 和 Poincaré. 早期有许多科学家相继对混沌动力学这一激动人心的科学领域作出了贡献，如 Adamard 和 Morse 等. 著名的三体问题、遍历（或各态历经）假设以及非线性振子为混沌的早期发展提供了典型范例.

20 世纪 60 年代，一些数学家已经发现大量混沌系统的例子，如著名的 Anosov 系统，该系统有混沌性. 这种系统的一个重要特征是其结构稳定性，这意味着小的结构扰动不会改变系统的定性性质. 结构稳定性的思想主要是由 Andronov 和 Pontryagin 提出的. 在美国，Lefschetz 的工作促进了这一理论的建立. 随后，著名数学家 Smale 对结构稳定性作了进一步研究. 当时，人们相信对动力系统稍加扰动就可以产生某种结构稳定的系统，很明显，许多结构稳定的系统具有混沌吸引子或奇怪吸引子，不过这些观点对自然科学和工程科学的影响并不大.

到了 20 世纪 70 年代，人们对混沌特性的认识发生了戏剧性的变化. 下面的一系列工作激发了科学家们的想象力和激情.

（1）1963 年，美国麻省理工学院的气象学家 Lorenz 在一家气象科学杂志上发表的论文得到了人们的重视，该论文研究了一个简化的常微分方程系统，并清晰地描述了混沌特性的计算机数值研究结果，该论文所描述的混沌后来被人们称作 Lorenz 吸引子. 值得强调的是，正如大多数实际碰到的系统一样，这一系统并不是结构稳定的；

（2）Hénon 发现了一个典型的映射，具有混沌吸引子；

（3）Ruelle 和 Takens 尝试利用混沌吸引子理论解释湍流的产生机理；

（4）美国理论生物学家 May 在一篇种群动力学的论文中研究了倍周期分叉进入混沌的道路；

（5）在 May 的工作激励下，李天岩和 Yorke 研究了一类一维映射，得到了具有局部不稳定性的离散系统，为描述这一特性，他们采用了“混沌”这一术语；

（6）为理解 Cartwright 和 Littlewood 在 van der Pol 方程方面的研究工作，Smale 提出了以他的名字命名的 Smale 马蹄.

20 世纪 70 年代末，由于计算机技术的飞速发展和硬件的广泛普及，混沌的发现和研究在各个领域迅速扩大. 人们可以通过计算机数值计算和仿真对系统的相图作直观的研究，以深化对混沌吸引子的认识.

混沌科学的应用研究已经由控制或抑制混沌发展到如何有效地利用混沌. 目前，人们已经发现混沌有许多实际的和潜在的应用，人们可以在新款微波炉中发现“混沌除霜”装置，该装置可以使除霜时间比原来减少 60%；人们还利用天体动力学中的混沌机制设计航天器的运行轨道，以减少燃料损耗；利用混沌原理改进流体混合效率；利用混沌动力学原理改进帕金森疾病的治疗方法.

动力系统的混沌性在通信技术和信号处理方面的应用研究更是如火如荼，其中混沌通信和混沌电路设计就是这样一个方兴未艾的前沿领域，目前已经是融数学、控制理论、电子通信于一体的交叉性学科.

显而易见，混沌应用离不开混沌系统的设计，而对于混沌通信而言，混沌系统（电路）的设计是混沌应用的先决条件，因此，混沌系统（电路）的理论研究和设计具有十分重要的意义，从而成为混沌应用研究的一个重要领域. 本书一方面总结作者近年来在混沌系统分析与判定以及混沌电路设计与实现方面的研究工作，从而为该领域进一步的理论研究和工程设计提供参考；另一方面，也为对混沌感兴趣的研究人员提供学习的桥梁，帮助其迅速跨入该领域.

本书重点介绍了如何运用拓扑动力学技巧判定具体系统的混沌性以及如何运用动力系统的混沌数学理论的基本思想和反馈控制技术设计混沌系统，并予以电路实现等若干课题. 全书分六章.

第一章首先给出了混沌动力系统的基本概念和说明，包括离散系统混沌性定义和常微分方程系统的混沌性定义.

第二章介绍了混沌动力学若干理论，包括 Lyapunov 指数、符号动力学、拓扑马蹄理论、奇异环及 Shilnikov 定理及推广，为系统混沌性的判定提供某些基本方法.

第三章阐述了拓扑马蹄理论在经典混沌系统 Lorenz 系统和一类简单混沌电路系统的应用，特别对 Lorenz 的混沌吸引子作了新的阐释.

第四章给出了基于反馈控制的混沌系统设计方法. 介绍如何运用切换控制将一个简单线性系统变成混沌系统的一系列方法和范例，并给出了系统的混沌分析，特别介绍了基于拓扑马蹄理论和计算机数值处理的计算机辅助证明.

第五章介绍了线性电路与非线性电路基本知识，包括线性电路与非线性电路的基本概念和特点、基本元器件特性、基本单元电路、非线性电路分析方法以及分段线性系统的行为特点.

第六章介绍了混沌电路数值分析与硬件设计，首先介绍了过去研究较多的几种典型混沌电路及其实现机理，然后介绍了作者提出的基于反馈控制的混沌电路设计方法.

本书是将现代动力系统数学理论的最新成果有机地运用于电路设计和系统分析的一次尝试，具有很强的理论性和实用性. 因此，作者期待本书不仅对电子、

通信、自动化等方面的研究者有所帮助，而且对非线性物理以及应用数学工作者也有启迪作用. 最后期待读者对书中的不足之处给予批评指正，并提出建设性的意见.

本书的出版获得国家自然科学基金（10672062）和重庆邮电大学自动化学院重点学科建设项目基金的资助。第一作者的研究生袁泉、杨芳艳、郭克敏、邱建、周丽等同学也为本书的出版做了大量工作，在此一并致谢.

作　者

目　录

第一章　混沌动力系统的基本概念

动力系统混沌性的数学定义有若干种，最初常见的是 Li-York 定义和Devaney 定义. 虽然这些定义从数学上看是严密的，但是从物理角度看有很大的局限性，未能定性地给人以直观的启示. 为方便读者，我们将回顾一下有关的混沌定义，然后介绍一个人们较为接受的定义. 为此，我们先回顾动力系统理论中的几个基本概念. 为讨论方便，我们仅限于讨论状态空间为欧式空间 R^n 的情形，一般的讨论可参考文献[1,2].

1.1　若干基本概念

考虑定义在 R^n 上的离散时间系统

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.1.1}$$

和连续时间动力系统

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.1.2}$$

设上述系统具有初始条件的解分别为 $\phi(k,x_0)$ 和 $\phi(t,x_0)$. 对于离散系统时间来说，其解实际上就是对初始点的迭代，即 $\phi(k,x_0)=f^k(x_0)$，所以为方便计，我们常常直接用 $f^k(x_0)$ 来表示离散系统在时刻 k 时的状态.

点 $p\in R^n$ 若满足 $\phi(k,p)=p,k\in Z^+$，则 p 称作(1.1.1)的平衡点，这里，Z^+ 表示非负整数集合. 显然，(1.1.1)的平衡点就是 f 的不动点，即 $f(p)=p$.

点 $p\in R^n$ 若满足 $\phi(t,p)=p,t\geqslant 0$，则 p 称作(1.1.2)的平衡点，显然，(1.1.2)的平衡点就是 f 的零点，即 $f(p)=0$.

点 $p\in R^n$ 若满足 $\phi(T,p)=p$，其中 T 是某一正整数，则 p 称作(1.1.1)的周期点，而满足 $\phi(T,p)=p$ 的最小正整数称为 p 的周期，仍记为 T. 显然 $f^T(p)=p$，而当 $T=1$ 时就得到平衡点.

点 $p\in R^n$ 若满足 $\phi(T,p)=p$，其中 $T>0$，则 p 称作(1.1.2)的周期点，而满足 $\phi(T,p)=p$ 的最小正数 T 称为 p 的周期，仍记为 T.

双曲平衡点　设(1.1.1)和(1.1.2)中的 $f(x)$ 是可微的. 如果 $f(x)$ 在平衡点 p 处的 Jacobi 矩阵 $\mathrm{J}f(p)$ 的每一个特征值的模不等于 1(离散时间系统情形)，或 $\mathrm{J}f(p)$ 的特征值都有非零实部(连续时间系统情形)，那么平衡点 p 称为双曲平衡点.

不变集　集合 $\Lambda\subset R^n$ 若满足 $\phi(n,\Lambda)=\Lambda,n\in Z$ 或 $\phi(t,\Lambda)=\Lambda,t\in R$，则称集

合 Λ 是对应系统的不变集. 一个集合 Λ 若满足 $\phi(n,\Lambda)=\Lambda, n\in Z^+$ 或 $\phi(t,\Lambda)=\Lambda$, $t\in R^+$,则称集合 Λ 是对相应系统的正向不变集.

极限集　给定一点 $x\in R^n$,则 x 的 ω 极限集 $\omega(x)$ 定义为 $y\in\omega(x)$ 当且仅当 y 满足如下条件:存在一个序列 $n_i\to\infty$(离散时间情形)或 $t_i\to\infty$(连续时间情形),使得

$$\phi(n_i,x)\to y \text{ 或 } \phi(t_i,x)\to y.$$

而 x 的 α 极限集 $\alpha(x)$ 定义为 $y\in\alpha(x)$ 当且仅当 y 满足如下条件:存在一个序列 $n_i\to-\infty$(离散时间情形,此时要求 f 的逆映射存在或是一个同胚)或 $t_i\to-\infty$(连续时间情形),使得当 $i\to\infty$ 时,

$$\phi(n_i,x)\to y \text{ 或 } \phi(t_i,x)\to y.$$

定义 1.1(拓扑传递)　设 $X\subset R^n$ 是系统(1.1.1)的一个紧致不变集,称(1.1.1)在 X 上拓扑传递的,如果存在 $x\in X$,使得 $\overline{\mathrm{orb}(x)}=X$,即 x 的轨道在 X 内处处稠密,这里 $\overline{\mathrm{orb}(x)}$ 是轨道(集合)$\{\phi(k,x):k\in Z^+\}$ 的闭包. 同理,可定义系统(1.1.2)在一个紧致不变集上的上拓扑传递性.

稳定流形和不稳定流形

离散时间系统情形. 设(1.1.1)中的 f 是一微分同胚,p 是 f 的平衡点或 m 周期点,则集合

$$W^s(p,f)=\{x:\lim_{k\to\infty}\|f^k(x)-f^k(p)\|=0\}$$

称为 f 在点 p 处的稳定流形. 在周期轨道 orb(p)处的稳定流形则定义为

$$W^s(\mathrm{orb}(p),f)=\bigcup_{i=0}^{m-1}W^s(f^i(p),f)=\{x:\omega(x)=\mathrm{orb}(p)\}.$$

类似地,f 在 m 周期点 p 的不稳定流形则定义为

$$W^u(p,f)=\{x:\lim_{k\to\infty}\|f^{-k}(x)-f^{-k}(p)\|=0\}.$$

而轨道 orb(p)的稳定流形则定义为

$$W^u(\mathrm{orb}(p),f)=\bigcup_{i=0}^{m-1}W^u(f^i,f)=\{x:\alpha(x)=\mathrm{orb}(p)\}.$$

连续时间系统情形. 设 $\phi(t,x_0)$ 是(1.1.2)解,p 是一平衡点或周期解上一点,则集合

$$W^s(p,f)=\{x:\lim_{t\to\infty}\|\phi(t,x)-p\|=0\}$$

称为 f 在点 p 处的稳定流形. 而该点的不稳定流形则定义为

$$W^s(p,f)=\{x:\lim_{t\to-\infty}\|\phi(t,x)-p\|=0\}.$$

若 $\mathrm{orb}(p)=\{\phi(t,p):0\leqslant t\leqslant T\}$ 是周期为 T 的解,在周期轨道 orb(p)处的稳定流形则定义为

$$W^s(\mathrm{orb}(p),f)=\bigcup_{0\leqslant t\leqslant T}W^s(\phi(t,p),f)=\{x:\omega(x)=\mathrm{orb}(p)\}.$$

同理，可定义周期轨道 orb(p)处的不稳定流形.

1.2　离散时间系统的混沌性定义

考虑如下离散时间系统

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x \in R^n.$$

定义 1.2(对初值敏感依赖)　设 $X \subset R^n$ 是 f 的一个紧致不变集，如果存在 $\gamma > 0$，使得对任何 $x \in X$ 和任一个 $\delta > 0$，存在某个 y 满足 $\| y - x \| < \delta$ 和某个整数 $n > 0$，使得

$$\| \phi(n,y) - \phi(n,x) \| \geqslant \gamma,$$

则称 f 在该紧致不变集上对初值敏感依赖.

下面我们给出 Li-York 混沌的定义如下[3~5].

定义 1.3(Li-York 意义下的混沌)　设 X 是紧致度量空间，f 是 X 到自身的连续映射，d 是 X 上的一个度量. 如果存在不可数集合 $S \subset X$，满足

(1) $\limsup\limits_{x \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0, \forall x, y \in S, x \neq y$;

(2) $\liminf\limits_{x \to \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0, \forall x, y \in S$.

则称 f 在 X 上是 Li-York 意义下混沌的，这里的 S 也称为“f 的混沌集”. 下面叙述混沌的 Devaney 定义.

定义 1.4(Devaney 意义下的混沌)　设 X 是紧致度量空间，f 是 X 到自身的连续映射. 如果下述三个条件满足：(1)f 是拓扑传递的；(2)f 的周期点在 X 中处处稠密；(3)f 是对初始条件敏感依赖的. 则称 f 在 Devaney 意义下是混沌的.

人们对这个定义分析以后，发现条件(3)是条件(1)和(2)的直接推论，因此又有修改的 Devaney 混沌定义如下.

定义 1.5　若 f 满足定义 1.4 中的条件(1)和(2)，就称 f 在修改的 Devaney 意义下是混沌的.

以上定义从数学角度讲比较严格，但是混沌的物理意义则体现得不甚清楚，比较容易为人们所接受的应是下面的定义[1].

定义 1.6　设 $f: R^n \to R^n$ 是一同胚映射. 一个不变集 $\Lambda \subset R^n$ 如果满足下面条件：存在一个有界开区域 U 满足 $\Lambda \subset \mathrm{int} U$，使得

$$\Lambda = \bigcap_{j=-\infty}^{\infty} f^j(U),$$

那么称 Λ 是孤立的，U 则称为不变集 Λ 的孤立邻域.

定义 1.7　设 Λ 是 f 的一个不变集，如果下面条件成立：

(1) Λ 是孤立不变集；

(2) Λ 不可分解(Λ 拓扑传递)；

(3) f 在 Λ 上的限制对初始条件敏感依赖.

那么称 f 在 Λ 上混沌,或简单地说 f 是混沌的. 不可分解的定义见定义 1.10.

注 从物理角度讲,条件(3)指的是一个系统的混沌性主要体现在局部的不稳定性,条件(1)和(2)体现出在某个范围的整体混合性.

1.3 离散时间系统 Lyapunov 指数

Lyapunov 指数可以表征系统运动的特征,它沿某一方向取值的正负和大小表示长时间系统相邻轨道沿该方向平均发散或收敛的快慢程度. 而所有 Lyapunov 指数之和($\sum\lambda_i$)大体上表征轨道平均发散的快慢. 任何吸引子必定有一个 Lyapunov 指数是负的;而对于混沌,必定有一个 Lyapunov 指数是正的. 因此,人们往往通过计算正 Lyapunov 指数来作为系统混沌性的判据.

一维可微映射 $f:R\to R$,其在一点 p 的 Lyapunov 指数可定义为下列极限

$$l(p,f)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln|(f^k)'(p)|.$$

对于 n 维映射 $f:R^n\to R^n$,其 Lyapunov 指数就和方向有关了,因此,其定义依赖于初始点和该点处切空间(仍是 R^n)中向量的选取.

定义 1.8 令 $f:R^n\to R^n$ 是可微映射,$p\in R^n$ 是一点,其正向轨道 $\mathrm{orb}^+(p)$ 有界. 令 v 是 R^n 中一向量,则 f 在点 p 沿着向量 v 的方向的 Lyapunov 指数定义为

$$l(p,v,f)=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\ln\|\mathrm{D}(f^k(p))v\|.$$

简记为 $l(p,v)$,这里

$$\mathrm{D}(f^k(p))=\mathrm{D}f(p_{k-1})\cdots\mathrm{D}f(p_0),$$

其中 $p_i=f^i(p)$ 或等价 $p_i=\phi(i,p)$.

如果 f 在点 p 处沿所有方向的 Lyapunov 指数都存在,则 f 在该点至多有 n 个不同 Lyapunov 指数,考虑到重数,我们可以说 f 在 p 点有 n 个 Lyapunov 指数. 实际问题的讨论中,人们常常按大小顺序将 Lyapunov 指数写为

$$l_1(p,f)\geqslant l_2(p,f)\geqslant\cdots\geqslant l_n(p,f).$$

关于 Lyapunov 指数有如下几个简单事实.

定理 1.1 设 f 是一 n 维微分同胚,在点 p 处 f 的 Lyapunov 指数存在,且

$$|\det(\mathrm{D}f(p))|=\Delta=\text{常数},$$

那么

$$l_1(p,f)+\cdots+l_n(p,f)=\Delta.$$

定理 1.2 设 p 是微分同胚 f 的一个 m 周期点,令 λ_j 是 $\mathrm{D}(f^m(p))$ 的一个特征值,v^j 是对应的(广义)特征向量. 那么有

$$l(p,v^i,f)=\frac{1}{m}\ln|\lambda_j|.$$

定理 1.3　设 f 是一微分同胚，假定 $l_i(p_0,f)$ 存在（$1\leqslant i\leqslant n$）. 若点 x_0 满足

$$\lim_{j\to\infty}\|f^j(x_0)-f^j(p_0)\|=0,$$

那么 $l_i(x_0,f)$ 存在，且

$$l_i(x_0,f)=l_i(p_0,f).$$

有关证明参考文献[1].

1.4　离散系统混沌吸引子

一个物理系统有意义的变量往往是那些可以持续观测到的物理量，因此就自然产生了吸引集合和吸引子的概念.

仍假定系统(1.1.1)的以 x_0 为初始值的解表示为 $\phi(k,x_0)$.

定义 1.9　集合 Λ 如果满足条件：

(1) 存在一个有界区域 U，满足 $\phi(1,U)\subset\mathrm{int}(U)$；

(2) $\Lambda=\bigcap_{k\geqslant 0}\phi(k,U)$.

则称 Λ 为一吸引集合，U 称为捕捉域. 这里 $\mathrm{int}(U)$ 表示 U 的内部.

定义 1.10　吸引集合 Λ 如果不包含一个吸引集作为其真子集（如果一非空集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ 是吸引集，则 $\Lambda'=\Lambda$），则称 Λ 是不可分解的. 一个不可分解的吸引集合称为吸引子.

关于吸引子还有更强的定义.

定义 1.11　如果吸引集合 Λ 满足条件：存在 $x\in\Lambda$，使 $\omega(x)=\Lambda$，则 Λ 叫做吸引子.

下面给出混沌吸引子的定义[1].

定义 1.12　如果吸引子 Λ 满足条件：系统在 Λ 上对初始条件敏感依赖，则称 Λ 是混沌吸引子.

虽然上面给出了混沌吸引子的数学定义，但如何判定一个实际系统有混沌吸引子是十分困难的事情.

下面给出的判别方法虽然不够严格，但对“大多数”系统还是比较有效的（从数值角度和实验角度讲）.

数值（实验）判定混沌吸引子的准则. 如果找到一个集合 Λ，使得下面的条件都满足，则可以断言 Λ 是混沌吸引子.

(1) 有很多不在同一轨道上的点 $x_1,\cdots,x_k$，使得

$$\omega(x_i)=\Lambda,\quad 1\leqslant i\leqslant k;$$

(2) 至少有一个 Lyapunov 指数为正，比如 $l(x_i)>0$；

(3)所有 n 个 Lyapunov 指数不为 0.

条件(1)意味着 Λ 的吸引域有非零测度,并且 Λ 不可分解;条件(2)表明系统在 Λ 上对初始条件敏感依赖;条件(3)表明 Λ 有某种鲁棒性.

关于吸引集有如下重要定理.

定理 1.4 假设 U 是吸引集合 Λ 的一个捕捉域,则下面性质成立:

(1) 集合 Λ 是闭集;

(2) Λ 是正、负不变集;

(3) 如果 $x\in U$,则 $\omega(x)\subset\Lambda$;

(4) 如果 $\bar{x}$ 是 Λ 中双曲不动点,则 $W^u(\bar{x})\subset\Lambda$;若 γ 是 Λ 中双曲闭轨,则 $W^u(\gamma)\subset\Lambda$.

1.5 连续系统的混沌性定义

1.5.1 敏感依赖性

定义 1.13 系统 $\dot{x}=F(x)$在点 x_0 处满足:存在一个 $\gamma>0$,使得对任意一个 $\delta>0$,存在某个 y_0,使得$\|y_0-x_0\|<\delta$ 以及对某个 $\tau>0$,有

$$\|\phi(\tau,y_0)-\phi(\tau,x_0)\|\geqslant\gamma.$$

则称该系统在 x_0 处对初始条件敏感依赖.

定义 1.14 系统称为在一个集合 S 中的点在限制到 S 上的情形下的对初始条件敏感依赖,如果存在一个 $\gamma>0$,使得对任一个 $x_0\in S$ 以及任一个 $\delta>0$,存在 $y_0\in S$,满足$\|y_0-x_0\|<\delta$ 以及 $\tau>0$,使得

$$\|\phi(\tau,y_0)-\phi(\tau,x_0)\|\geqslant\gamma_1.$$

例 考虑极坐标描述系统

$$\begin{cases}\dot{\gamma}=\gamma(\gamma^2-1),\\ \dot{\theta}=1.\end{cases}$$

该系统在集合 $\gamma=1$ 上任一点对初始条件敏感依赖,但限制在 $\gamma=1$ 上,则无敏感依赖性.

1.5.2 混沌定义

定义 1.15 设 Λ 是系统(1.1.2)的一个不变集,如果下面条件成立:

(1) Λ 是孤立不变集;

(2) Λ 不可分解(Λ 拓扑传递);

(3) $\phi(t,x)$在 Λ 上的限制对初始条件敏感依赖.

那么称 (1.1.2)在 Λ 上混沌,或简单说,(1.1.2)是混沌的.

1.6　连续时间系统的 Lyapunov 指数

前面我们讨论了连续时间系统对初始条件的敏感依赖性，并给出了数学定义，但这类定义不具备“操作性”，实际研究中不好验证，下面我们给出 Lyapunov 指数定义，由于 Lyapunov 指数易于计算，因此常被人们用来刻画解对初值的敏感依赖性，借以说明系统的混沌性.

为理解 Lyapunov 指数的含义，我们先考虑两个初始条件很近时，对应解的误差：给定 $x_0 \approx y_0$，则

$$\phi(t,y_0)-\phi(t,x_0)\approx \mathrm{D}_x\phi(t,x_0)(y_0-x_0).$$

对任一初始条件曲线 $x(s)$，令

$$v(t)=\frac{\partial}{\partial s}\phi(t,x(s))\big|_{s=0}=\mathrm{D}_x\phi(t,x(0))\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}.$$

令 $v_0=\dfrac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}$，则 $v(t)$满足首次变分方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t)=\mathrm{D}f(\phi(t,x_0))v(t),$$

并且

$$v_0=\frac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}\bigg|_{s=0}.$$

若令 $v_c=y_0-x_0$，那么 $v(t)$则表示两解在时刻 t 时的(无穷小)位移.

$$y_0=x(s),\quad x_0=x(0).$$

更简单地，若令 $\delta(t)=\phi(t,y_0)-\phi(t,x_0)$，则有

$$\dot{\delta}(t)=f(\phi(t,y_0))-f(\phi(t,x_0))\approx \mathrm{D}f(\phi(t,x_0))\delta(t).$$

两边对 S 求偏导，那么两解的差异 $\delta(t)$的增长率 l 由下式定义

$$\|\delta(t)\|\approx c\mathrm{e}^{-at}.$$

取对数，有

$$l=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|\delta(t)\|}{t}.$$

此数定义为初始条件 x_0 确定的 Lyapunov 指数.

定义 1.16　令 $v(t)$是初始条件为 $v(0)=v_0$，并且满足首次变分方程的解，则由初始条件 x_0 和无穷小初始位移向量 v_0 确定的 Lyapunov 指数 $l(x_0,v_0)$定义为

$$l(x_0,v_0)=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln\|v(t)\|}{t}\text{(若该极限存在)}.$$

注　一般地，对不同的 v_0，n 维系统在初始条件 x_0 至多有 n 个不同的 Lyapunov 指数.

关于 Lyapunov 指数,下面几个性质非常有用.

定理 1.5　(1) 设 x_0 是系统不动点(平衡点),则由该点确定的 Lyapunov 指数是系统在该点线性化矩阵的特征值的实部;

(2) 对一给定初始条件 x_0,若解 $\phi(t,x_0)$有界,并且 $\omega(x_0)$不含平衡点,则

$$l(x_0,f(x_0))=0.$$

即系统沿着轨道方向的 Lyapunov 指数为零. 特别地,系统在周期轨道上必有一个 Lyapunov 指数为零.

该定理中的结论(2)从几何上说明一条有界轨道 $\phi(t,x_0)$上任意彼此邻近两点为初始条件的解既不彼此收敛也不彼此发散.

定理 1.6　设一系统的两条轨道 $\phi(t,x_0)$和 $\phi(t,y_0)$有界并指数收敛,即存在 $a>0,c\geqslant1$,使得$\|\phi(\tau,y_0)-\phi(\tau,x_0)\|\leqslant ce^{-at}$,$t\geqslant0$. 那么系统由点 x_0 和 y_0 确定的 Lyapunov 指数相等.

由著名的 Liouville 定理知,关于 Lyapunov 指数和有下面的性质.

定理 1.7　设系统 $\dot{x}=f(x)$,$x\in R^n$ 在点 x_0 处的 Lyapunov 指数为 $l_1(x_0)$,$\cdots$,$l_n(x_0)$,那么有

$$\sum_{j=1}^{n}l_j(x_0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\nabla f(\phi(t,x_0))\mathrm{d}t,$$

这里$\nabla f=\dfrac{\partial f}{\partial x_1}+\cdots+\dfrac{\partial f}{\partial x_n}$.

Lyapunov 指数的数值计算也不是容易的事,但判定一个系统是否对初值敏感依赖时,只需要知道是否有正 Lyapunov 指数就够了,因此下面的事实比较有用.

定理 1.8　考虑下面系统及其沿着轨道 $\phi(t,x_0)$的首次变分方程

$$\dot{x}=f(x),$$
$$\dot{\upsilon}=\mathrm{D}f(\phi(t,x_0))\tau.$$

则对大多数向量 υ_0,极限

$$l(x_0,\upsilon_0)=\lim_{\tau\to\infty}\frac{\|\upsilon(t)\|}{t}$$

给出了系统在 x_0 处的最大 Lyapunov 指数.

Lyapunov 计算例子. 考虑系统

$$\begin{cases}\dot{x}=-y+x(1-x^2-y^2),\\ \dot{y}=x-y(1-x^2-y^2).\end{cases}$$

该系统有解

$$(x(t),y(t))=(\cos t,\sin t),$$

沿着该解的 Jacobi 矩阵是

$$A(t)=\begin{pmatrix}-2\cos^2 t & -1-2\cos t\sin t\\ 1-2\cos t\sin t & -2\sin^2 t\end{pmatrix}.$$

容易验证

$$v_1(t)=\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix},\quad v_2(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

满足方程

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t}=A(t)v(t).$$

因为$(x(0),y(0))=(1,0)$,所以

$$v_1(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad v_2(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

其中一个 Lyapunov 指数为

$$l_1((x(0),y(0));v_1(0))=l((1,0);(1,0))=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left\|\mathrm{e}^{-2t}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\right\|$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{-2t})}{t}=-2.$$

另外一个 Lyapunov 指数为

$$l_2((1,0);v_2(0))=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln\left\|\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}\right\|=\lim_{t\to\infty}\frac{\ln(1)}{t}=0.$$

1.7　连续系统的混沌吸引子

考虑连续时间系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(t,x),$$

以 x_0 为初始值的解表示为 $\phi(t,x_0)$.

定义 1.17　一个集合 Λ 如果满足条件:

(1) 存在一个有界区域 U,满足 $\phi(t,U)\subset\mathrm{int}(U)$;

(2) $\Lambda=\bigcap_{t\geqslant 0}\phi(t,U)$.

则称 Λ 为吸引集合,U 称为捕捉域,$\mathrm{int}(U)$表示 U 的内部.

定义 1.18　一个吸引集合 Λ 如果不包含一个吸引集作为其真子集(如果一非空集合 $\Lambda'\subset\Lambda$ 是吸引集,则 $\Lambda'=\Lambda$),则称 Λ 是不可分解的. 一个不可分解的吸引集合称为吸引子.

关于吸引子还有更强的定义.

定义 1.19　如果一吸引集合 Λ 满足条件:存在 $x\in\Lambda$,使 $\omega(x)=\Lambda$,则 Λ 叫做吸引子.

下面给出混沌吸引子的定义[1].

定义 1.20　如果一个吸引子 Λ 满足条件：系统在 Λ 上对初始条件敏感依赖，则称 Λ 是混沌吸引子.

虽然上面给出了混沌吸引子的数学定义，但如何判定一个实际系统有混沌吸引子是十分困难的事情.

下面给出的判别方法虽然不够严格，但对“大多数”系统还是比较有效的(从数值角度和实验角度).

数值(实验)判定混沌吸引子的准则. 如果找到一个集合 Λ，使得下面的条件都满足，则可以断言 Λ 是混沌吸引子.

(1) 有很多不在同一轨道上的点 $x_1,\cdots,x_k$，使得

$$\omega(x_i)=\Lambda,\quad 1\leqslant i\leqslant k;$$

(2) 至少有一个 Lyapunov 指数为正，比如 $l(x_i)>0$；

(3) 所有 $n-1$ 个 Lyapunov 指数不为 0.

同离散时间系统一样，条件(1)意味着 Λ 的吸引域有非零测度，并且 Λ 不可分解；条件(2)表明系统在 Λ 上对初始条件敏感依赖；条件(3)表明 Λ 有某种鲁棒性. 注意这里的条件(3)同离散时的情形不一样，这是由于定理 1.5 结论(2)的缘故.

关于吸引集有如下重要定理.

定理 1.9　假设 U 是吸引集合 Λ 的一个捕捉域，则下面性质成立：

(1) 集合 Λ 是闭集；

(2) Λ 是正、负不变集；

(3) 如果 $x\in U$，则 $\omega(x)\subset\Lambda$；

(4) 如果 $\bar{x}$ 是 Λ 中双曲不动点，则 $W^u(\bar{x})\subset\Lambda$. 若 γ 是 Λ 中双曲闭轨，则 $W^u(\gamma)\subset\Lambda$.

证明参见文献[1]，(闭或周期)轨道的双曲性讨论，可参考下面的定义和 3.1 节.

1.7.1　双曲性与半双曲性

由于系统的混沌性总是与系统某种程度上的双曲性有关，因此研究系统的某种双曲性是动力系统研究的主要课题之一，下面就时间连续系统给出双曲性和半双曲性概念[6].

定义 1.21(双曲性定义)　设 $\phi(t,x)$是由微分方程 $\dot{x}=F(x)$定义 R^n 上的流，在 R^n 中的紧致集合 Λ 称为双曲的，如果存在 Λ 上切丛的一个不变分裂 $T\Lambda=E^s\oplus E^1\oplus E^u$ 和正常数 k,λ，使得

(1) E^s 上收缩，即$\|D\phi(t,x)/E_x^s\|\leqslant k\mathrm{e}^{-\lambda t}$，$\forall x\in\Lambda$，$\forall t>0$；

(2) 在 E^u 上发散，即$\|D\phi(-t,x)/E_x^u\|\leqslant k\mathrm{e}^{-\lambda t}$.

双曲性从数学上讲是一个非常好的性质，容易建立一套优美的数学理论，具有