全国高职高专教育“十一五”规划教材

高职数学教程

上册

张国勇 主编

高等教育出版社
Higher Education Press

全国高职高专教育"十一五"规划教材

高职数学教程

上　册

张国勇　主编

高等教育出版社

内容简介

本书根据高职教育特殊性和层次教学的要求以及目前高职学生数学基础的实际状况，把普通微积分学的内容有机地整合成通俗、直观、易懂的五个模块，即：第一章，极限与连续；第二章，导数与微分；第三章，积分；第四章，微积分的基本应用；第五章，多元函数微积分学初步。本书建议学时数约50学时。

本书具有篇幅小、学时少、容易教和学的特点，适用于高职院校工科和经管类专业的数学教学，也可用作文科类专业学生的选学教材，还可作为有关科技人员和学生的自学用书。

图书在版编目（CIP）数据

高职数学教程．上册/张国勇主编．—北京：高等教育出版社，2007．7
ISBN 978－7－04－021989－0

Ⅰ．高…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学－高等学校：技术学校－教材　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第078314号

策划编辑 邓雁城　**责任编辑** 崔梅萍　**封面设计** 张　志　**责任绘图** 尹文军
版式设计 张　岚　**责任校对** 王效珍　**责任印制** 尤　静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010－58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800－810－0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010－58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京市南方印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	**版　　次**	2007年7月第1版
印　　张	10	**印　　次**	2007年7月第1次印刷
字　　数	240 000	**定　　价**	14.60元

物料号　21989－00

前　言

目前，已出版的高职数学教材内容的模式大多是传统“中专”、“高专”或“本科压缩”型的，对许多教学一线的教师来说，总感觉不太好用。主要原因就是理论偏深，内容偏难，不适合高职层次教学的实际需要。

因此，我们在编写这本教材时，根据教育部制定的“高职高专教育高等数学课程教学基本要求”，基于高职教育层次的特点和实际情况，结合国家示范性高职院校建设的需要和编者长期从事高职数学课程教学教研工作的经验，从教材内容及其结构和要求上，希望打破传统“中专”、“高专”或“本科压缩”型的模式，着力于体现高职数学课程的特殊层次，并突出其教学要求的特色，力求以一种新的“工具课”模式出现。

本教材编写的思路和主要的特色是：

1. 改变了对数学内容传统的描述方式，用通俗、直观、易懂的叙述说明代替了严谨的描述，不在乎对理论知识、逻辑论证等能力上的要求，而是要使读者能了解理论知识的实际背景和用处，并能借助直观的实例表示出来，达到“看得懂，学得来，记得下，用得上”的目的。这样的处理，避免了理论的抽象性，大大降低了数学知识的难度。

2. 根据高职专业教学中的普遍需求，在不违背科学性的前提下，把教材内容有机地整合成相对独立的模块（其中一些专业教学中较少用到的内容（带 * 号）只作为选修或选学的部分），使不同的专业都可以在本教材中方便地选择教学所需的内容，增强了教材内容的弹性，有助于解决目前普遍存在的“内容多，学时少”的矛盾。

3. 力求体现“必需、够用”的教学要求，凸显数学“工具课”的作用。但不主张一味地删减理论知识，把内容砍得只剩下“枝干”，或者把教材当简单机械的工具介绍书，那样只会让学生感到乏味，学后就忘；也不刻意粘贴一些数学家的名言或数学史的一些知识，而是保留必需的理论知识并对其提供尽可能直观、通俗的说明解释，同时，很注重揭示和体现数学本身固有的文化内涵和思想方法，其目的是培养学生的思维品质和学习数学的爱好和兴趣，消除学生对数学学习的“单调、枯燥”之感。

4. 所配备的例题、习题一般都是不偏不难，针对知识点的，还有不少与专业教学联系密切的基本应用题。个别带 * 号偏难的习题供学有余力的学生选作。

5. 充分注意到与中学教改、专业课教学需要的协调配合。

6. 本教材分上、下两册共十章，上册五章为一般专业公共必修的内容，下册五章为专业选修的内容。建议全书（上、下两册）总学时数为 110 学时左右。

本书由主编制订编写方案并具体指导。参加上册编写工作的有张国勇（福建交通职业技术学院）、黄金伟（福建信息职业技术学院）、张玉祥（福建交通职业技术学院）和王为民（福建水利电力职业技术学院）。黄金伟、张玉祥参加了全书的修改和校稿工作。全书最后由主编修改定稿。

本教材的编审和出版得到了高等教育出版社有关领导和编辑们的关心和支持，编者表示由衷的感谢！

本教材虽在广泛征求意见的基础上经过反复的修改，但由于编者水平有限，加之时间仓促，不足乃至错漏在所难免，恳请数学教改方面的专家和广大教师提出宝贵的意见和建议，以便再版时修订。

张国勇

2007年2月于福建交通职业技术学院

目 录

1 第一章　极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，极限概念是微积分学的一个最基本、最重要的概念．一方面，它是建立微积分学的基础；另一方面，极限的思想和分析方法将贯穿微积分学的始终，后面将要学到的微分与积分都借助于极限方法来描述．本章将介绍函数极限和函数连续的基本概念、基本性质和基本运算．

1.1 函数的概念

1.1.1 基本初等函数

我们把幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数），指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），三角函数和反三角函数统称为基本初等函数，其中三角函数为：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$，反三角函数为：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$．

一般的，我们把基本初等函数和整式函数或它们的数乘、和差所得到的式子称为简单函数．例如 $y=u^{-2}$，$y=3\cdot 2^{x}-1$，$y=\frac{1}{2}\sin x$，$y=2x^{3}+3x-7$ 等都是简单函数．

1.1.2 复合函数

如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，D 表示使得函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 都有定义的 x 值的集合，当变量 x 任取 D 中的一个数时都有唯一确定的 y 与之对应，则称 y 是 x 的复合函数，记作 $y=f(\varphi(x))$，其中 x 称为自变量，u 称为中间变量．若复合函数是由多个函数复合而成，则中间变量可用变量 u,v,w,s,t 等表示．

注意：函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，否则就没有意义．

例如 $y=2^{2x}$ 和 $y=\arctan 2x$ 是复合函数；而 $y=\arcsin(x^{2}+2)$ 则没有意义．

一般的，我们可以把复合函数分解为若干个简单函数．

例 1.1.1　指出函数 $y=2\cos^{2}3(x^{2}+2)^{2}-1$ 的复合过程．

解 复合过程为 $y=2u^2-1,u=\cos v,v=3w^2,w=x^2+2$.

1.1.3 初等函数

由基本初等函数和常数经过有限次的四则运算或经过有限次的复合步骤所构成的，并且可用一个解析式子表示的函数叫做初等函数.

例如 $y=2^{x^2}$，$y=3\sin x$，$y=2+\sqrt{x}$，$y=\sin^3 2x$，$y=\ln(x-1)$，$y=\arctan\sqrt{3x}$ 等都是初等函数. 不难发现，我们过去所见到的函数一般都是初等函数.

1.1.4 分段函数

有些函数虽然也可以用解析式表示，但不能用一个解析式表示，在定义域的不同范围具有不同的解析式，这样的函数称为分段函数. 例如

$$y=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}\quad y=\begin{cases}1+x, & x<0,\\ 2^x, & 0\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$$

等都是分段函数. 此外，有的分段函数也可以用一个解析式表示. 例如 $y=\begin{cases}x, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ 可表示为 $y=|x|$，也可表示为 $y=\sqrt{x^2}$，因此，它是初等函数.

习题1.1

1. 指出下列各函数的复合过程：

(1) $y=2+\sqrt{2x+1}$； (2) $y=2^{\cos 3x}$；

(3) $y=3\ln^2(x-1)$； (4) $y=\operatorname{arccot}(2x^2-1)$.

2. 已知 $y=1+\sqrt{u}$，$u=2x^3-1$，试把 y 表示为 x 的函数.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ 0, & x=0\\ x-1, & x<0,\end{cases}$，求 $f(-2)$，$f(0)$，$f(3)$.

1.2 函数极限

1.2.1 当 $x\to\infty$ 时的极限

考察函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的图形(图 1.2.1)，容易发现不论 $x\to-\infty$ 或 $x\to+\infty$ 都有 $y\to 0$. 我们称该函数当 $x\to\infty$ 时的极限为 0(或 $f(x)$ 收敛于 0)，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}y=0$.

一般的，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to A$(常数)，则称当 $x\to\infty$ 时 $f(x)$ 的极限为 A，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

否则，称$f(x)$的极限不存在．当$x\to-\infty$时$f(x)$的极限记为$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$；当$x\to+\infty$时$f(x)$的极限记为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$．极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在且相等.

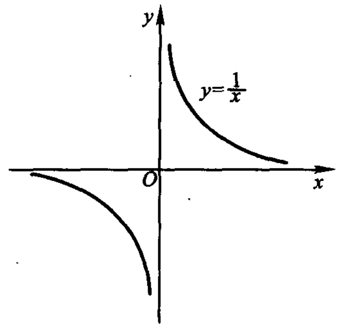

图 1.2.1

例 1.2.1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，但$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x\neq\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在.

1.2.2 当 $x\to x_0$ 时的极限

例 1.2.2 考察当$x\to0.5$时，函数$f(x)=2x+1\to$?

列表观察

从左侧→0.5←从右侧

x	…	0.49	0.499	0.499 9	…	0.5	…	0.500 1	0.501	0.51	…
$f(x)$	…	1.98	1.998	1.999 8	…	2	…	2.000 2	2.002	2.02	…

从表中可以看出当$x\to0.5$(无论x从左侧或从右侧趋于0.5)时，函数$f(x)=2x+1$的值总是趋于2. 这样我们称当$x\to0.5$时，函数$f(x)=2x+1$的极限为2，记为$\lim\limits_{x\to0.5}(2x+1)=2$.

一般的，当$x\to x_0$时，$f(x)\to A$(常数)，则称当$x\to x_0$时$f(x)$的极限为A，记为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 若$x$从左侧趋于$x_0$(记为$x\to x_0^-$)时$f(x)$的极限为$A$，则称当$x\to x_0^-$时$f(x)$的左极限为$A$，记为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$；若$x$从右侧趋于$x_0$(记为$x\to x_0^+$)时$f(x)$的极限为$A$，则称当$x\to x_0^+$时$f(x)$的右极限为$A$，记为$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$. 显然，极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$和$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$存在且相等.

例 1.2.3 观察说明$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

注意到函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}$在$x=1$点处没有意义，而当$x\to1$时，函数$\dfrac{x^2-1}{x-1}$的值的变化趋势却是2. 这说明当$x\to x_0$时，函数$f(x)$的极限与函数在$x=x_0$处有没有定义无关；反之，有定义也未必有极限.

如$f(x)=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0,\end{cases}$在$x=0$处有定义，但由于$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-1$，即左、右极限不相等，所以当$x\to0$时$f(x)$的极限不存在.

判断分段函数$f(x)$在其定义域交界点x_0处的极限是否存在时，需要考察其左右极限的情况.

例 1.2.4 函数$f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant1,\\ 1, & x>1,\end{cases}$判别函数当$x\to0$，$x\to1$，$x\to1.7$时极限的存在性，

若存在则求之.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在;

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$, 所以 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1.7} f(x)=\lim\limits_{x\to 1.7} 1=1$.

思考:有的需要考察左右极限,有的则不需要,为什么?

习题1.2

1. 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

2. 设 $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{1}{x-1}, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x, & x>0, \end{cases}$ 求 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时的左、右极限,并说明 $f(x)$ 当 $x\to 0$ 时的极限是否存在.

3. 设 $f(x)=\begin{cases} x^2+2x-1, & x\leqslant 1, \\ x, & 1<x<2, \\ 2x-2, & x\geqslant 2 \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to -5} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

1.3 极限的四则运算

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 则有

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$.

注:此公式仅适用于有限项,否则不成立.

如 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2}\right)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{n^2}+\cdots+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n^2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$.

特殊地有 $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x)=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=cA$ (c 为常数).

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

以上运算法则对 $x\to\infty$ 也成立. 注意法则成立的前提是 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 存在,若前提条件不满足,则法则失效. 如

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\neq\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}-\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}.$$

例 1.3.1 求 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+4x-2}$.

解 原式 $=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}x^2-\lim\limits_{x\to -1}3x+\lim\limits_{x\to -1}1}{\lim\limits_{x\to -1}x^2+\lim\limits_{x\to -1}4x-\lim\limits_{x\to -1}2}=\dfrac{(-1)^2-3(-1)+1}{(-1)^2+4(-1)-2}=-1$.

以下各例都无法直接应用法则,需适当的化简后再应用. 求解时应清楚每一步求法的根据.

例 1.3.2 求 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{3x^2+x-10}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x(x+2)}{(3x-5)(x+2)}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{3x-5}=\dfrac{2}{11}$.

我们把分子和分母都趋于 0 的极限形式地记为$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型. 求$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型极限的一般方法是先分式约简再求之. 常用的方法有因式分解法、提取公因式法、分子或分母有理化法.

例 1.3.3 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

例 1.3.4 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x^3-5}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}{3-\dfrac{5}{x^3}}=0$.

我们把分子和分母都趋于∞的极限形式地记为$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型. 求$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型极限的一般方法是将分式约简或分子分母同除以 x 的最高次幂或除以某个以∞为极限的函数式等.

例 1.3.5 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x-2)^{15}}{(x-1)^8(2x+1)^7}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{15}}{\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^8\left(2+\dfrac{1}{x}\right)^7}=\dfrac{1}{2^7}$.

此例基于结论:若 $|q|<1$,则 $\lim\limits_{x\to +\infty}q^x=0$.

例 1.3.6 求 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2^x+3^x}{2^{x+1}+3^{x+1}}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+\dfrac{1}{3}}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+1}+1}=\dfrac{1}{3}$.

除了$\left(\dfrac{0}{0}\right)$和$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型以外还有$(\infty-\infty)$型等形式的极限,一般可以通过通分等方法转化为

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$或$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型的极限来求.

例 1.3.7 求$\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{4}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4-(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-1}{x+2}=-\dfrac{1}{4}$.

例 1.3.8 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}+1}=1$.

注:对于上面所出现的$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型、$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$型、$(\infty-\infty)$型等形式的极限,今后还有更方便的求法(洛必达法则).

习题1.3

1. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+3}{2x^2+1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x}{3x^4-x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^2-x}{x^4-2x-1}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-1)^4-1}{2x^4+1}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2^{-x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$;

(8) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}\right)$.

2. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+5}{x^2+1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4x+1}{2x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+5}{x-3}$;

(4) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$;

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\sin 2x}{1-\cos 4x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x}{1-x}$;

(9) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$;

(10) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

(11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

(12) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

1.4 两个重要极限

1.4.1 第一个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

表 1.4.1 列出了当 x 趋近于 0 时函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 的一些函数值.

表 1.4.1

x	1	0.5	0.1	0.01	…
$\dfrac{\sin x}{x}$	0.841 47	0.958 85	0.998 33	0.999 98	…

从表 1.4.1 与图 1.4.1 可以看出，当 $x\to 0$ 时，函数 $\dfrac{\sin x}{x}\to 1$，即 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，当然也可以写成 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$.

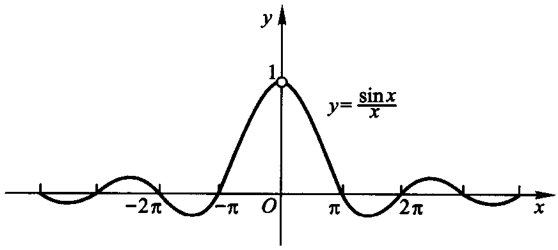

图 1.4.1

例 1.4.1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 3x}{3x}\xlongequal{令 3x=y}3\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=3$.

从例 1.4.1 我们可看出公式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 实际上可以写成

$$\lim_{f(x)\to 0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1.$$

注意：其中 $f(x)\to 0$ 表示当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to 0$.

利用公式 $\lim\limits_{f(x)\to 0}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$ 求极限，写起来更简捷方便.

例 1.4.2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sin 2x}{2x\cos 2x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}\right)=2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos 2x}=2$.

例 1.4.3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{4\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$.

例 1.4.4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

例 1.4.5 求$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)}{2\cdot\dfrac{x-\pi}{2}}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)}{\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

1.4.2 第二个重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

表 1.4.2 列出了当 x 趋近于 0 时函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$的一些函数值.

表 1.4.2

x	2	10	100	1 000	10 000	…
$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$	2.250	2.594	2.705	2.717	2.718	…

从表 1.4.2 可以看出,当 $x\to\infty$ 时,函数$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\to\mathrm{e}$,即

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\quad 或\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},其中\ \mathrm{e}=2.718\,281\,828\,45\cdots$$

和第一个重要极限相类似,公式$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$ 可以写成

$$\lim_{f(x)\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}.$$

公式$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$ 可以写成

$$\lim_{f(x)\to\infty}\left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}.$$

注意:其中 $f(x)\to\infty$ 表示当 $x\to x_0$ 时 $f(x)\to\infty$.

同样,利用公式 $\lim\limits_{f(x)\to0}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$ 或 $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{f(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}$ 求极限,写起来更简捷方便.

例 1.4.6 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\dfrac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}\cdot3}=\mathrm{e}^3$.

例 1.4.7 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^x$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2x}\right)^{2x\cdot\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

例 1.4.8 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{2x}\right)^{x}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{-\dfrac{2x}{3}}\right)^{-\frac{2x}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}=e^{-\frac{3}{2}}$.

例 1.4.9 求$\lim\limits_{x\to 0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 0}[1+(-3x)]^{\frac{1}{-3x}\cdot(-6)}=e^{-6}$.

例 1.4.10 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-x}{3-x}\right)^{x+2}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{x-3}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x-3}\right)^{5}=e\cdot 1=e$.

习题1.4

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\tan x}$;

(7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^{3}x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 2x}{x}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{5x}\right)^{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x}\right)^{x}$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{x}$;

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$;

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x}}$;

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x}$;

(8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$.

1.5 无穷小与无穷大

1.5.1 无穷小与无穷大的概念

例如$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^{n}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}x^{2}=0$，$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$等，都属于一种类型的极限，即当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，其极限都是0.

一般的，若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，则称$f(x)$为当$x \to x_0$时的无穷小量（简称无穷小）.

若$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，则称$f(x)$为当$x \to x_0$时的无穷大量（简称无穷大）.

注意：（1）说某个变量是无穷大或无穷小，一定要指出x的趋向.

（2）无穷大"∞"不是一个数而是一个符号，表示绝对值无限大的一个变量；无穷小是表示以0为极限的变量，常数中只有0才是无穷小.

关于无穷大和无穷小有下面常用到的性质：

（1）在自变量的同一变化过程中，若$f(x)$是无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷小；反之，若$f(x)\,(f(x) \neq 0)$是无穷小，则$\dfrac{1}{f(x)}$是无穷大.

例 1.5.1 求$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1)$.

解 因为$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2 - 3x + 1} = 0$，所以$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 - 3x + 1) = \infty$.

（2）有限个无穷小的和仍是无穷小.

注：若是无穷多个无穷小求和，则结论不一定成立，如$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2} \right) = \dfrac{1}{2}$.

（3）有界函数与无穷小之积仍是无穷小.

例 1.5.2 求极限：

（1）$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x}$；（2）$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}$.

解 （1）由于$\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$，而$\left| \sin \dfrac{1}{x} \right| \leqslant 1$，所以$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \sin \dfrac{1}{x} = 0$；

（2）由于$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$，而$|\sin x| \leqslant 1$，所以$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x} = 0$.

（4）有限个无穷小的积仍是无穷小.

1.5.2 无穷小阶的比较

观察：当$x \to 0$时，$x, 2x, x^2$三个函数值的变化情况.

x	1	0.5	0.1	0.01	0.001	…	$x \to 0$
$2x$	2	1	0.2	0.02	0.002	…	
x^2	1	0.25	0.01	0.000 1	0.000 001	…	
$x(x+1)$	2	0.75	0.11	0.010 1	0.001 001	…	

从表中可看出当$x \to 0$时，x与$2x$趋于0的"速度"可认为是"基本相当"，而x^2比x与$2x$趋于0的"速度"就"快"得多．如何用数学的形式来刻画这种趋于0的"速度"的"快慢"呢？

注意到：

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{2x} = 0$ （分子比分母趋于0的"速度"快）；