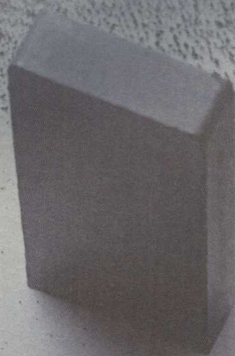


数字思维论

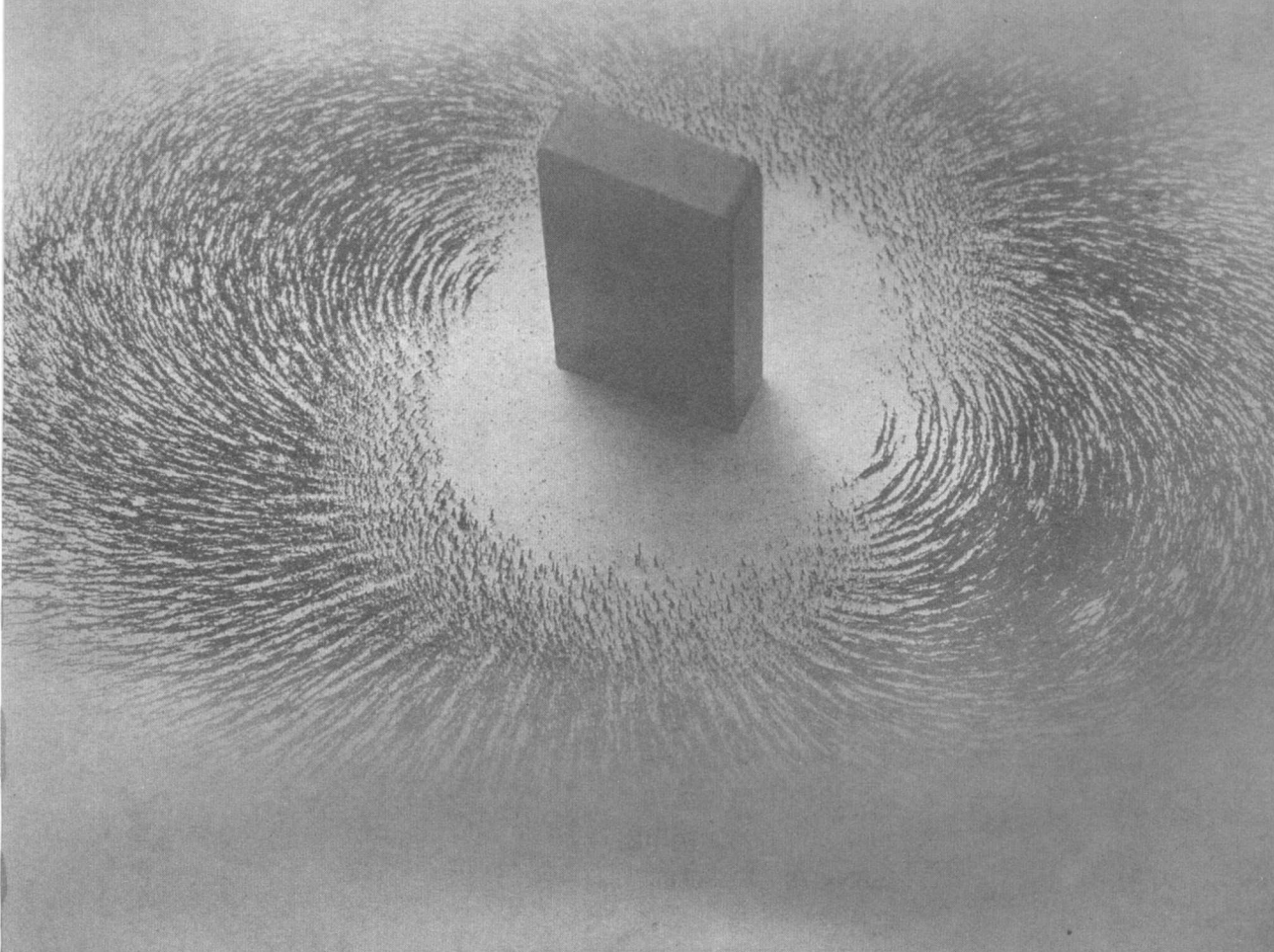
■ 汪文贤 著



浙江摄影出版社

数学思维论

■ 汪文贤 著



浙江摄影出版社

责任编辑:何 胜
封面设计:黄业成
责任校对:蒋蕾妮
责任出版:汪立峰

图书在版编目(CIP)数据

数学思维论 / 汪文贤著. —杭州:浙江摄影出版社,
2007.9

ISBN 978-7-80686-584-2

I. 数… II. 汪… III. 数学—思维方法 IV. 01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 135272 号

数学思维论

汪文贤 著

浙江摄影出版社出版、发行

(杭州市体育场路 347 号 邮编:310006)

印刷:浙江新华印刷技术有限公司

开本:787×1092 1/16

印张:17.5

字数:400 000

2007 年 9 月第 1 版

2007 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-80686-584-2

定价:25.00 元

(如有印、装质量问题,请与承印厂家联系调换)

版权所有 不得翻印 盗版必究

序

数学对于人类文明的发展一直起着重要的作用。时至今日,数学更是广泛深入地渗透到自然科学和社会的各个领域之中。除科学技术领域外,数学在社会的许多领域,诸如政治经济、社会文化、军事国防等,都显现出特殊地位和作用。

数学被人们称为思维的体操,这说明了数学在培养人的思维能力上所具有的不可替代性。因此,开展数学思维的研究,对于培养年轻一代的数学思维能力,提高他们的数学素质,具有十分重要的意义。

汪文贤先生从事数学教育三十余年,长期从事数学思维的研究和数学思维方法课程的教学工作,《数学思维论》是他的心血之作。余有幸先睹书稿,颇感受益匪浅。相信它的出版,有着不同一般的积极作用。

余虽从事数学教育工作多年,但对数学教育研究知之甚少,常感惭愧。因此,汪先生嘱我写序,实感惶恐。而盛情难却,不敢违命,故作以上数语,以表祝贺,是算为序。

于秀源

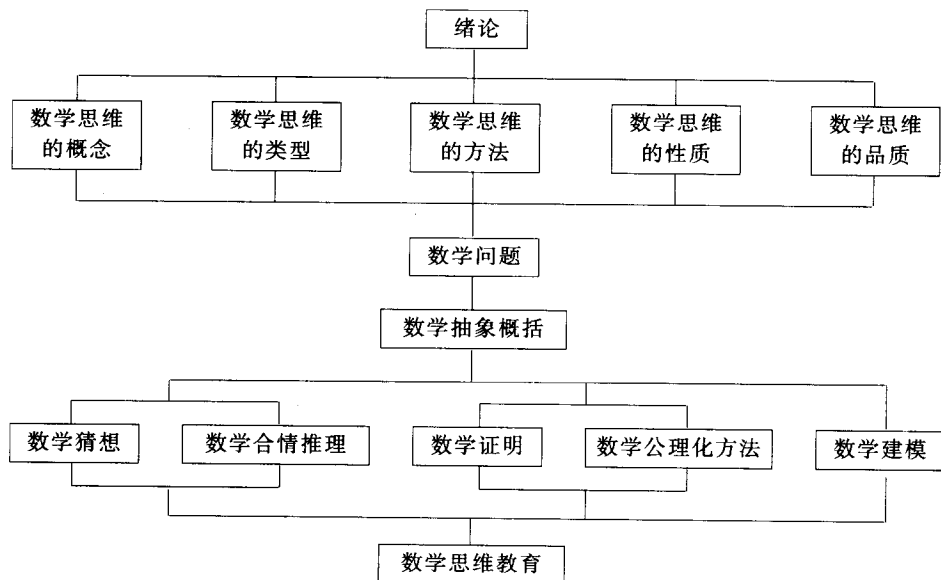
2007.2 于衢州

前 言

数学是科学,也是艺术,也还是技术,因此,培养公民的数学素质和数学专门人才对于建设社会主义强国具有重要意义.人的数学素质和数学能力的核心是数学思维能力,而数学又被誉为“思维的体操”,因此,研究数学思维,对于提高数学研究和数学教育水平都具有积极的现实意义.

数学思维论是关于数学思维的理论.思维不是数学所独有的,数学思维理论具有一般思维理论的共性;但数学思维与一般思维相比又有自己的特殊性.数学思维理论从外延上说,主要包括数学思维的概念、形式、性质、方法和品质等,构成了本书的总论部分.而本书的分论部分,主要阐述数学思维的具体方法.数学思维方法由数学问题引起,实质上就是数学抽象和概括的方法.但从外延上说,也可以有数学发现的思维方法、数学论证的思维方法和数学应用的思维方法.数学发现的思维方法主要论述数学猜想和数学合情推理,数学论证的思维方法主要论述数学证明和数学公理化方法,数学应用的思维方法则主要论述数学建模的思维方法.但笔者认为数学教育也应是数学应用的一个重要方面,并且人的数学能力必须通过数学思维教育来培养,因此,全书以数学思维教育作为结尾.

本书的基本框架结构如下图所示.



本书在写作过程中,力求做到问题和结论并重,形式逻辑和辩证逻辑并重,合情推理和演绎推理并重,数学的发现发明和证明应用并重,数学的思维理论和思维实践并重,数学思维理论的研究和数学思维教育并重.书稿是笔者在多年教学的基础上于两年前形成的,因考虑到自己学识浅薄,故而一直未出版.在领导和同事的鼓励下,思量再三,鼓足勇气,抛砖引玉,但限于笔者的能力水平,书中自然会有不少缺点,甚至错误,敬请读者多多批评指教,先致诚挚的谢意!

本书作为浙江省新世纪教改项目的一部分,其出版得到了该项目和浙江工业大学浙西分校的资助,得到了笔者工作单位——浙江工业大学浙西分校的领导和同事的关心和支持,于秀源教授认真审阅了本书的文稿,提出了许多宝贵的意见和建议,并欣然为本书作序,对本书给予充分的肯定和高度评价,这显然是对笔者的关爱和勉励,对此,一并表示深切的感谢!

浙江教育学院的蒋志萍副教授为本书的写作提供了一些相关的资料;行文之中,对国内外许多作者的专著或文献中的观点或资料,采精撷英不少,也使笔者获益良多,在此一并致以诚挚的感谢!

浙江摄影出版社为本书的编辑出版不辞辛劳,做了大量的工作,对此表示衷心的感谢!

汪文贤

2007年7月于衢江之畔

目 录

绪 论	1
第一节 数学思维论概述	1
第二节 费玛大定理	2
第三节 数学思维论的基本内容	5
第一章 数学思维的概念	7
第一节 思维概述	7
第二节 数学思维的概念	14
第二章 数学思维的类型	16
第一节 数学逻辑思维	16
第二节 数学形象思维	19
第三节 数学直觉思维	23
第四节 数学辩证思维	25
第三章 数学思维的性质	31
第一节 数学思维的规律	31
第二节 数学思维的性质	33
第四章 数学思维的品质	41
第一节 数学思维的目的性	41
第二节 数学思维的敏捷性	42
第三节 数学思维的灵活性	44
第四节 数学思维的深刻性	47
第五节 数学思维的创造性	50
第六节 数学思维的批判性	51

第五章 数学思维的方法	54
第一节 费玛大定理及其证明的启示	54
第二节 数学思维方法概述	55
第六章 数学问题	59
第一节 数学问题概述	59
第二节 著名数学问题	62
第七章 数学抽象概括	65
第一节 数学抽象	65
第二节 数学概括	74
第八章 数学猜想	78
第一节 数学猜想概述	78
第二节 数学猜想的意义	82
第三节 数学猜想的提出和解决	86
第四节 有关质数的猜想	93
第五节 由勾股定理引出的猜想	96
第九章 数学合情推理(一)	104
第一节 数学合情推理概述	104
第二节 数学观察与实验	105
第三节 数学归纳与类比	113
第四节 数学特殊化与一般化	135
第十章 数学合情推理(二)	151
第一节 数学直观与举例	151
第二节 数学想象与直觉	164
第三节 数学整体与全息	174
第十一章 数学证明	187
第一节 数学证明的产生	187
第二节 数学证明概述	189
第三节 数学演绎法	191
第四节 数学归纳法	195

第五节 数学反驳法	201
第六节 机器证明法	207
第十二章 数学公理化	212
第一节 数学公理化一例	212
第二节 数学公理化方法	213
第三节 数学公理化方法的应用	219
第十三章 数学建模	221
第一节 数学模型概述	221
第二节 数学建模	224
第三节 数学建模举例	228
第四节 数学建模名题欣赏	232
第十四章 数学思维教育	241
第一节 两类数学教育	241
第二节 大众数学教育	243
第三节 英才数学教育	249
第四节 数学问题解决教学	253
第五节 全数学教育	259
主要参考文献	266

绪 论

数学被人们称为思维的体操,但许多人对此体会不见得深刻.通过费玛大定理的发现及其证明这样具体的例子,能让我们对数学家是怎样进行数学思维的,有一初步的印象.

第一节 数学思维论概述

什么是数学思维论?顾名思义,数学思维论是关于数学思维的理论.这就至少涉及这样三个问题:(1)什么是数学思维?(2)怎样进行数学思维?(3)数学思维论主要内容有哪些?

在回答这三个问题之前,先看一个人人皆知,但又并非人人都认真思考过的事例.

谁都看见过荷叶上的露珠吧,它是球形的;水银洒在地上,也是球形的.可你想过是什么原因吗?从物理学的角度去解释,那是因为水、水银具有一种张力,使得它们抱成一团,成为球体状.那么从数学的角度,应该怎样解释这一自然现象呢?人们猜想:那是因为在表面积一定的条件下,所有立体中球体具有最大的体积.人们又对自己猜想的正确性,从逻辑上加以了论证.于是,如果为了节约原材料,人们就尽可能把容器设计并建造成球体.这样就能确保在原材料一定的情况下,使得容器具有最大的容积.

由立体的球,人们自然联想到平面的圆,猜想:周长一定的平面图形,圆具有最大面积.当然为保证这一猜想的正确性,同样要对它进行必要的证明.据此,在铁丝长度一定的情况下,为使铁丝围成最大面积,就要将铁丝围成圆.

分析以上两个例子,会发现其中有一些共同的地方:

- (1) 面对一个相应的情境,人们需提出一个数学问题;
- (2) 通过对该问题的分析,人们要发现一个数学猜想;
- (3) 对所发现猜想的正确与否,要加以证明或否定;
- (4) 对被证明为正确的数学定理,要进行应用.

很自然地,人们会产生以下问题:

- (1) 数学问题和猜想是怎样被提出和发现的?
- (2) 数学猜想是怎样被证明或否定的?
- (3) 对于数学定理或其他数学知识,又是怎样应用的?

以上例子所展现的过程,实际上就是数学家们发现数学、证明数学和应用数学过程的一个缩影.每一过程都体现了数学家们是如何进行数学思维的.

于是,所谓数学思维,我们可以简单地说,就是像数学家那样去思维,或者说数学思维就是数学活动中的思维.具体一点说,数学思维是以数学为对象,以数学活动为载体的一种思维.这就是说,数学思维是人脑对数学对象的本质属性与内在联系的概括、间接的反

映过程。

而数学思维论,则是研究数学思维的概念、形式、性质、品质和方法,寻求数学猜想的发现、证明和数学知识的应用,探索数学思维教育的途径和方法的理论。

数学作为人们认识世界的结果,与其他科学认识一样,也同样有“实践——认识——再实践——再认识”这样一个过程。这就是数学认识的一般性。因此,研究数学思维,必须研究数学思维的一般性。譬如,我们研究数学思维的性质和方法,就要涉及一般思维的性质和方法。

以数学思维的性质为例,凡是思维都具有概括性和间接性,数学思维也不例外,同样也具有概括性和间接性。

但是,数学研究的对象是数量关系、空间形式和抽象结构,这种研究对象显得更为抽象和特殊。这种研究对象的特殊性和抽象性,势必产生与其他科学不同的、特有的认识方法和理论形式,由此就产生数学认识的特殊性。如研究数学思维性质和方法问题,除了上面说的要涉及一般的思维性质和方法外,数学还有自己特殊的思维性质和方法需要我们去研究。

以数学思维的特殊性为例,由于数学思维对象的特殊性和抽象性,决定了数学思维方法的特殊性。这种特殊性表现在数学知识由经验形态上升为理论形态的特有的认识方法——三段论式的演绎法和公理化法,以及由此产生的特有的理论形态——公理系统和形式系统。这表明数学不能像自然科学那样,仅凭使用观察和实验、类比和归纳等方法,得出结论就可完事。数学还必须应用演绎法,用演绎法论证结论的正确性。

前面我们曾说过,所谓数学思维,简单地说,就是像数学家那样思维。那么数学家又是如何思维的呢?下面我们给出一个具体的例子,通过这一具体的例子,我们看看著名数学家是如何进行数学思维的。

第二节 费玛大定理

一、费玛大定理概述

近代数学如参天大树,已是分支众多,枝繁叶茂,硕果累累。在这棵苍劲挺拔的大树上,结着各种不同的果实,有问题,有猜想,有定理,有证明,等等,其中数学问题中的难题是这些果实中的一类。在数不胜数的难题中,最耀眼夺目的是四色问题、费玛大定理和哥德巴赫猜想等问题。它们被称为近代三大数学难题。

自费玛(Fermat, 1601—1665)提出“ $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3, n \in \mathbf{N}$) 无正整数解”这一猜想后(这里 n 表示自然数, $\mathbf{N}$ 表示自然数集。后文如无特别说明,它们的含义与此处相同), 300多年来,它使世界上许多著名数学家殚精竭虑,有的甚至耗尽了毕生精力,但都未成正果。1993年,43岁的英国数学家怀尔斯(Wiles, 1953—)终于证明了这一猜想的正确性,揭开了费玛猜想的神秘面纱。这一成功证明被认为是“20世纪最重大的数学成就”。

此事说来话长,要追溯到1637年。当时30多岁的费玛在读丢番图(Diophantus, 约210—290)的名著《算术》的法文译本时,读到书中关于不定方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的全部正整数解时,产生了以下想法:即如果把方程中的2次方换成3次方,或者更高次方,情况将如何?

经过一番深思,费玛在这页书的空白处写下了如下的一段话:任何一个数的立方,不能分成两个数的立方之和;任何一个数的四次方,不能分成两个数的四次方之和.一般地,不可能将一个高于二次的幂分成两个同次的幂之和.同时他还说,他已发现了以上结论的美妙证法,可惜由于空白地方太小,写不下这一美妙的证明.如果真如费玛所称,是由于书页的空白处太小,而未能让费玛写下天才的思想,那其后所引起的一切,真非“遗憾”一词所能涵盖.

费玛去世后,人们在整理他的遗物时,发现了上述写在书眉上的那段话.1670年,费玛的儿子发表了费玛的这一部分页端笔记.这就是被我们称为费玛大定理的著名猜想.

1993年之前,数学家们一直未能对费玛猜想给出正确的证明.因此,费玛的这一断言始终被称为费玛猜想.

读到这里,我们可能会想:费玛一定是个数学专业工作者.又是什么东西使得费玛作出如此令后人敬仰的数学成就呢?

事实上,费玛的数学经历并非我们想象那样,费玛仅是一位业余数学爱好者,被后人誉为“业余数学家之王”.1601年,他出生在法国南部图卢兹附近一位皮革商人的家庭.童年时期是在家里受的教育.长大后,父亲送他去大学学法律,毕业后当了一名律师.从1648年起,担任图卢兹市议会议员.费玛在数学上的卓越成就,源于他对数学的爱好和敏锐.由此可知,强烈的兴趣爱好和科学敏锐,对于科学研究是何等的重要.虽然费玛童年时并没有进入学校接受所谓的正规教育,长大后学的又是法律,可这些都没能妨碍他成为著名的数学家.

费玛酷爱数学,把自己所有的业余时间都用于研究数学和物理.由于他思维敏捷,记忆力强,天资聪颖,又具备研究数学所必须的顽强精神,所以获得了丰硕的成果,使他跻身于17世纪大数学家的行列,并名垂青史.数学上的天赋,再加上对数学的热爱与钻研,对业余时间的正确利用,造就了一位世界级的大数学家.

费玛一生提出了许多猜想,但早在19世纪初叶,这些猜想基本已被证实或推翻.唯独方程 $x^n + y^n = z^n$ ($n \geq 3, n \in \mathbb{N}$)正整数解的存在问题,悬而未决达数百年之久,史称“费玛最后问题”.

1993年6月23日,当英国数学家怀尔斯在剑桥大学的牛顿数学研究所作以“模型式、椭圆曲线和伽罗华表示”的报告时,宣告费玛猜想已被他证明.从此,费玛猜想就成为费玛大定理,又称费玛最后定理.

二、费玛大定理的证明

从费玛时代起,巴黎科学院曾先后两次提供奖章和奖金,奖励能证明费玛大定理的人.布鲁塞尔科学院也悬赏重金,但都无结果.1908年,德国数学家佛尔夫斯克尔(V. Volfskehl)逝世的时候,将他的10万马克赠给了德国哥廷根科学会,作为费玛大定理的解答奖金.哥廷根科学会宣布,奖金在100年内有效.但哥廷根科学会不负责稿件的审查.

10万马克在当时是一笔很大的财富,而费玛大定理又是小学生都能听得懂的问题.于是,不仅专搞数学这一行的人,就连很多工程师、牧师、教师、学生、银行职员、政府官吏和一般市民,都在钻研这个问题.在很短时间内,各种刊物公布的“证明”就有上千个之多.真乃“重赏之下必有勇夫”.

当时德国的《数学和物理文献实录》杂志社,自愿对这方面的论文进行鉴定,到1911

年初为止,共审查了 111 个“证明”,全都是错的.由于实在受不了沉重的审稿负担,不得不宣布停止这一审查鉴定工作.写到这里,我们不禁想起一个这样的小故事.据说,希尔伯特(Hilbert,1862—1943)有一个学生,写了一篇关于证明费玛大定理的论文.一天晚上,学生拿着自己的证明去找老师,希望老师能帮他审核自己对费玛大定理的证明.可希尔伯特却要他的学生回去好好休息,第二天再去找他.结果是,第二天这个学生找到希尔伯特说,他已发现自己的证明是错误的.

虽然源源不断而来的证明全是错的,但是,人们对数学的强烈兴趣和热情,使证明仍然络绎不绝;虽然当初的 10 万马克,由于受货币的多次大幅贬值,折算成后来的马克已无多大价值.但是,人们热爱科学的可贵精神,对科学的不懈追求,丝毫不因此而受影响.300 多年来,许多伟大的数学家,如欧拉(Euler,1707—1783)、高斯(Gauss,1777—1855)、阿贝尔(Abel,1802—1829)、狄利赫莱(Dirichlet,1805—1859)、勒让德(Legendre,1752—1833)、库默(Kummer,1810—1893)、柯西(Cauchy,1789—1857),另外还有许多数学爱好者,都为攻克这一难题而进行了辛勤的努力,付出了巨大的精力.有的数学家如库默、范迪维尔(Vandiver)等人甚至贡献了毕生的精力.难怪有人说,“费玛”如此多娇,引无数英雄竞折腰.

时至 1993 年,终于由怀尔斯给出了正确的证明.怀尔斯出生于英国的一个神学家庭,从小对费玛猜想十分好奇、感兴趣,这个美妙的猜想导致他进入了数学的殿堂.怀尔斯回忆起 1963 年,当他还只是个 10 岁小孩时,在图书馆中的一本书上发现了费玛猜想.当时他想,费玛猜想看上去如此简单,简单得就连一个 10 岁孩子也能理解.但历史上这么多大数学家都未能解决它.就是从那时起,怀尔斯立下了“永不放弃它,必须解决它”的壮志.大学毕业后,他开始了幼年的理想,决心去圆童年的梦.这再一次说明了好奇心是多么的可贵.

怀尔斯深知信息时代的特点.因此,证明工作是在极其秘密的情况下进行的.在整个费玛大定理证明的过程中,他一直守口如瓶,秘不告人.

为了攻克费玛猜想,怀尔斯历经 7 年的艰辛.天道酬勤,工夫不负有心人.1993 年初,证明工作取得了突破性的进展,怀尔斯认为胜利在望.但他很慎重,因为证明的正确性需要检验,而能担任检验工作的人必须是这一领域顶尖的专家.此时,怀尔斯想到了他的同事凯兹,他秘密地邀请凯兹担任证明的检验.检验工作在两人之间,通过一门书报讨论课的方式秘密地进行着.冗长的检验工作完成后,怀尔斯认为宣布秘密的时机已经来临.说来也巧,当时怀尔斯的老师科茨(Coates),计划在剑桥大学举办一个数学研讨会而向他约稿.怀尔斯也认为能在母校发表他辛苦的研究成果极具纪念性,因此欣然接受邀约.但为避免不必要的困扰与压力,他给的演讲题目是“模型式、椭圆曲线和伽罗瓦表示”,根本看不出与费玛猜想有何关联.

1993 年 6 月 23 日 10 点 30 分,怀尔斯在庄重的寂静中写下费玛大定理,并轻缓地宣布演讲结束.此时,许多双要作例行鼓掌的手定格在了空中,大厅顿时鸦雀无声.半分钟后,雷鸣般的掌声似乎要掀翻大厅的屋顶.英国学者们再也顾不上他们的绅士风度了,忘情地欢呼着.

消息很快轰动了全世界.各种大众传媒纷纷报道,并称之为“世纪性的成就”.这项证明被列入 1993 年世界科技十大成就之一.

可不久,传媒又迅速地报出了一个“爆炸性”新闻:怀尔斯的长达 200 页的论文送交审查时,却被发现证明有漏洞。此时,先前参与秘密审查证明的凯兹发现一个之前未被察觉的错误。又经过一年多的努力,怀尔斯意识到三年前被他打入冷宫的 Iwasawa 定理恰可用来修补这个漏洞。1994 年 9 月 19 日,一个星期一的早晨,怀尔斯发现了问题的答案。于是,他重新写了一篇 108 页的论文,寄往美国。论文顺利通过审查,美国的《数学年刊》杂志于 1995 年 5 月发表了他的这一篇论文。怀尔斯因此获得了 1995—1996 年度的沃尔夫数学奖。

著名数学家丘成桐教授曾举王国维先生所讲的做大学问的三个阶段来形容数学研究的历程。怀尔斯关于费玛大定理证明的研究历程,与王国维的三阶段理论确是相当的吻合。

第一阶段是晏殊所说的:

昨夜西风凋碧树,独上高楼,望尽天涯路。

第二阶段是柳永的词:

衣带渐宽终不悔,为伊消得人憔悴。

以这两句话形容怀尔斯在 7 年中所受的煎熬,再看看他骨瘦如柴的身躯,感觉特别贴切。

第三阶段是引用辛弃疾的词:

众里寻他千百度,蓦然回首,那人却在灯火阑珊处。

在绕了一大圈之后,怀尔斯猛然发现三年前被搁置一旁的 Iwasawa 理论,恰可修补他先前所犯的错误。如此情节真是此词最佳写照。

由费玛猜想所引起的数学故事,到此似乎可以真正告一段落了。但是,人们的问题是不会终结的。有人问,难道怀尔斯的证明就是费玛的证明吗?当然不是!怀尔斯的证明是 20 世纪的证明,长达 108 页,绝非费玛当时所谓的美妙证明。那么费玛当时脑中浮现的美妙证明又是怎样的呢?这个谜语是否能解开真的是很难说。

经过 300 多年的不断奋战,数学家们世代的努力,围绕费玛大定理作出了许多重大的发现,并促进了一些数学分支的发展,尤其是代数数论的发展。现代代数数论中的核心概念“理想数”,正是为了解决费玛大定理而提出的。难怪大数学家希尔伯特称赞费玛大定理是“一只会下金蛋的母鸡”。而怀尔斯的证明则被数学家科茨评价为是“人类智力活动的一曲凯歌”。

第三节 数学思维论的基本内容

数学思维的概念、形式、性质、品质和方法等内容构成了数学思维论的本体内容。数学问题及其解决则是数学思维理论的核心内容。而数学发现(包括数学猜想与合情推理)、证明(包括公理化方法)和应用的方法则是数学思维方法的展开。数学思维教育的内容是数学思维理论的重要组成部分。事实上,我们完全可以把数学教育看成是数学应用的基本内容之一。因为数学素养作为人的基本素质之一,在当今社会是必不可少的,数学素质也是人的基本素质之一。

数学思维作为人类思维的一种,其概念、形式、类型、性质、品质和方法等问题,一方面

从属于一般的思维,即具有一般思维的共性;另一方面,又有自己特殊的个性.因此,在对一般共性有个了解的基础上,我们着重讨论它的个性,即侧重于思维在数学领域中的相关问题的讨论.

要进行数学思维,首先就得有数学问题,因为由前面我们知道,数学思维就是解决数学问题的思维.数学问题基本上来源于以下两个方面:一是来自于数学内部,是数学自身产生的问题;二是来自于自然、社会和人类的实践,是数学外部产生的问题.

对数学问题的思考探索,就可能产生数学猜想.要否定一个数学猜想,只要举出一个反例即可;但要肯定一个数学猜想,则要进行严格论证.数学猜想的产生,一般是通过观察和试验,类比和归纳,一般化和特殊化,想象和联想,直观和直觉等合情推理方法得到.对于这样得到的猜想,在数学中,必须通过演绎方法进行证明,才能确定其正确性.对零散的数学知识,数学公理化方法是使其系统化的基本思维方法.对于现实中的数学问题,可以使用建模的方法来解决.数学建模,使数学不仅是科学而且还是技术的思想,得到了较好体现,使数学应用于实际问题的解决有了用武之地.

数学的发现、证明和应用,实际上都属于数学问题解决.诚然,数学的发现仅仅是数学问题解决的初始形态,因为猜想作为数学发现的一个重要方面,其本身也还是个数学问题.猜想只有在得到严格的论证后,才能认为问题被解决.

因此,培养人的解决数学问题的能力,是数学思维理论最终得以落实的关键和归宿.由于数学作为思维的体操,具有对人进行思维教育的得天独厚的条件,所以对学生进行数学思维教育应成为数学教育的核心,并且数学教育是数学应用的根本,这不仅仅可以从应用数学人才是要通过数学教育培养来说明,更可从我国大学数学专业毕业生,大多是从事数学教育工作得到证实.

第一章

数学思维的概念

数学思维这一概念是由数学、思维这两个子概念有机结合而成的。数学思维从属于思维。因此,要界定数学思维的含义,首先就得对思维这一概念有个基本的理解和把握。另外,人们常说,数学是思维的体操,这表明思维是数学的核心内容。因此,从这个意义上说,也应该首先明确什么是思维。思维也是一门科学,具有自己比较完整的科学体系和非常丰富的内容。但限于篇幅,在此我们只能作一个概述性的了解。

第一节

思维概述

一、思维的概念

何为思维?所谓思维,其同义词有思考、思想等。从不同的角度认识思维,对什么是思维就会有不同的回答。

从心理学角度来说,思维是一种心理现象,并且是人的心理过程中最复杂的心理现象之一。目前心理学界对思维这一概念比较公认的定义是:思维是人脑对客观事物的本质属性及其内在规律性的反映。换言之,思维就是人类专门去揭示事物内在的本质属性和规律性的心理活动。这是思维与其他心理活动根本不同的地方。

这里所谓事物的本质属性,指的是能决定一类事物的主要特征的、共同的、不可缺少的根本特性。而事物的内在规律,主要是指事物之间的因果关系和必然联系。科学研究表明,无论是自然现象还是社会现象,几乎世界上一切事物的存在,都是“有序”的。这种有序性就是事物内在的规律性。

从哲学认识论来说,思维是大脑对现实的一种反映。辩证唯物主义认为,存在是第一性的,思维是第二性的,存在决定意识。所谓思维,就是人脑对客观事物的本质属性、相互关系及其内在规律性的概括与间接的反映。

由上可知,心理学和哲学对思维的定义基本上是相同的。思维作为人类的一种理性认识活动,推动着人类社会的发展,同时它也推动着人类自身智能的发展。

田运主编的《思维辞典》中,给思维这一概念下了这样的定义:在特定物质结构中对客体深远区层实现穿透性反映的物质运动叫思维。

在这一定义中,所谓的“特定物质结构”,基本上是指人的大脑(在人工智能研究中,电脑也有人认为是属于这个特定的物质结构)。

而定义中的“穿透性反映”是一个需要加以剖析的概念。何为“穿透性反映”?“由表及里,由此及彼”就是对“穿透性反映”的通俗描述。主体对客体深远区层实现穿透性反映,可以通过抽象、概括和各种思维工具的运用,也可凭借于直觉和感知。但不论运用何种方式,

反映的结果必须和客体深远区层的实在状态相一致(反映同一律)。但是,主体对客体深远区层的反映结果又经常地、大量地存在不同律。解决这一矛盾的一个办法就是对信息进行加工(包括对信息的采集和筛选)。平常说的“去粗取精,去伪存真”就是对信息加工的通俗描述。因此,在这个意义上可以说,思维是“主体对信息的系统加工”。这就是现代认知心理学对思维这一概念的界定。

由于现代认知心理学把人脑模拟成信息加工的机器,因而思维被理解为人脑对信息的转换,包括对信息的接收、存取和加工,以及对信息转换的调控(包括对信息转换的控制和反馈)。

从逻辑学的观点来研究思维,认为思维是以语言作为载体,揭示事物变化、发展的逻辑关系的过程。形式逻辑则是表示概念、判断、推理的思维形式;辩证逻辑则是研究对立统一、质量互变和否定之否定的思维形式。

总之,从不同的角度,可以对思维给出不同的定义。

但事实上,由于思维的非直观性和复杂性,到目前为止,科学尚未彻底揭示思维的本质及其内在规律。

知道了什么是思维,接着我们就可以对思维的类型、规律、性质和方法进行一个大致的分析。

二、思维的类型

按照钱学森对思维的分类,思维可分为逻辑思维、形象思维和直觉思维三种。逻辑思维又分为形式逻辑思维和辩证逻辑思维。直觉思维又分为灵感思维和顿悟思维。

1. 逻辑思维

逻辑思维(这里主要指形式逻辑思维)又称抽象思维,是一种运用概念、命题(判断)和推理来反映现实的思维。这是一种运用逻辑工具对思维内容进行抽象推演的思维,是一种线性形式的思维,是人类思维的基本活动形式之一,在人类的认识活动中具有极为重要的作用。逻辑思维具有把客观具体的对象,经思维而变化为抽象的概念、关系等,这样一种抽象性特点。这是逻辑思维的最基本的性质。

概念、命题(判断)和推理是逻辑思维的基本形式。

(1) 概念

概念是思维的细胞,它是反映一定范围内现象的具体和普遍本性或“普遍类型”的思维运动的主要形式,是“对事物的本质的理解”的同义语。概念是逻辑思维的最基本的思维形式。这种形式是在对感觉、知觉和表象所提供的材料进行思维加工的基础上产生的,这就是说,概念是综合已有经验的结果。

例如,“一”这个概念,就是人们对“一个人”、“一把石刀”、“一个猎物”、“一棵树”等各种客观存在的事物,在头脑中经过多次反复的认识,而最终抽象概括出“一”这一概念的。而这个“一”正是这许多不同事物在数量关系上所具有的共同的本质属性。

概念有内涵和外延之分。概念的内涵反映的是这一概念的本质属性;概念的外延反映的是这个概念所涵盖的范围。

例如,平行四边形这一概念的内涵是“两双对边分别平行的四边形”,而它的外延是指所有的平行四边形。

(2) 命题(判断)