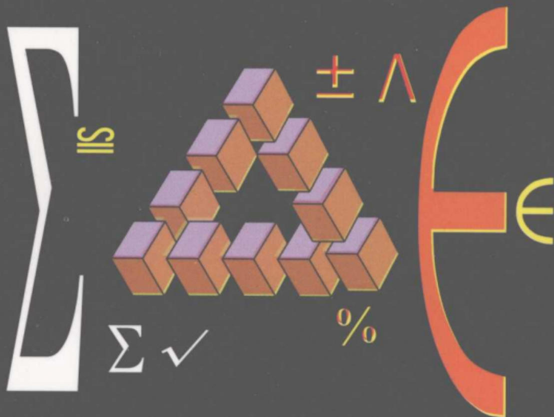
高中课本中的

# 数学基本解题方法

虞 涛 编著

下册



Mathematics

华东师范大学出版社

高中课本中的

# 数学基本解题方法

下册

Mathematics

内容提要

本书的写作是根据二期课改精神（立足于使所有学生获得必备的数学基础）和高考命题思想（重视数学基本方法的考察），依照最新教材的知识体系，从教材中提炼出基本的数学解题方法，构建每位高中学生都必须掌握的数学基础。它通过【方法阐述】、【课本溯源】、【例题选讲】、【方法点悟】、【基本训练】、【考题链接】等系列过程对高中数学中的各种基本解题方法作了全面的、深刻的诠释。它将是高中各年级学生学习数学的良师益友，也是中学数学教师平时课堂教学和高考复习辅导的宝贵材料。

ISBN 978-7-5617-5397-2

定价：12.00元

www.ecnupress.com.cn

高中课本中的

# 数学基本解题方法

（下　　册）

虞　涛　编著

华 东 师 范 大 学 出 版 社

**图书在版编目(CIP)数据**

高中课本中的数学基本解题方法.下/虞涛编著.
—上海:华东师范大学出版社,2007.5
ISBN 978-7-5617-5397-2

Ⅰ.高…  Ⅱ.虞…  Ⅲ.数学课-高中-解题
Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 071578 号

高中课本中的数学基本解题方法(下册)

编　　著　虞　涛
项目编辑　徐惟简
文字编辑　柴丽琴
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
电　　话　021-62450163转各部　行政传真021-62572105
网　　址　www.ecnupress.com.cn　www.hdsdbook.com.cn
市 场 部　传真 021-62860410　021-62602316
邮购零售　电话 021-62869887　021-54340188

印 刷 者　海安人民印刷厂有限公司
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　7.75
字　　数　221 千字
版　　次　2007 年 7 月第一版
印　　次　2007 年 7 月第一次
印　　数　8000
书　　号　ISBN 978-7-5617-5397-2/G·3169
定　　价　12.00 元

出 版 人　朱杰人

# 序

高中虽然不属于义务教育阶段，却仍然是基础教育. 高中数学课程的目标不是培养专业的数学工作者，而是为了打好数学基础，提高数学思维能力，进一步提高作为现代公民的数学素养.

虞涛老师的这本著作，通过[方法阐述]、[课本溯源]、[例题选讲]、[方法点悟]、[基本训练]、[考题链接]等系列过程，着力在数学基本方法上，完全符合高中数学教学改革的大方向. 作为一本教学辅导书，能够摆脱题海中讲究死套路的做法，具备长远的战略眼光，很不容易.

无庸讳言，教学辅导书必然要和高考相关. 自从人类实行考试制度以来，就有“考基础”还是“考创新”的争论. 时至今日，作为限制时间的笔试，主要只能考查应试者的基本知识和基本技能，很难想象在两个小时之内，能够显示一人的创造才能. 在这个意义上，有的老师认为：“基础决战高考”，还是很有道理的.

万丈高楼平地起，做任何事情都必须有坚实的基础，古今中外，概莫能外. 但是，打好基础的目的是为了发展. 在花岗岩基础上盖茅草房，则是一种浪费. 祝愿各位读者在使用本书之后能够有更大的发展. 应作者之约，遂有此序，并与大家共勉.

张奠宙

2007年于旅美途中

# 前　　言

许多教育专家和广大教师都主张中学数学教学应该从学生的双基(基本知识和基本方法)抓起,来提高学生的素质.基本知识的定义明确,它包括数学概念、定理、公式、法则等,在教材中可寻可查.基本方法又包括哪些方面呢?仁者见仁,智者见智.却没有清晰的定义或解释.不少老师和学生迫切希望明确的解释,便于平时具体的教学.历经三年,潜心研读课程标准和新教材,并请教许多数学教育专家,我对高中数学课程内容进行全面的思考,逐步有所感悟.《数学课程标准》明确提出目标:要求学生通过学习数学要“获得必要的数学基础知识和基本技能,理解基本的数学概念、数学结论的本质,了解概念、结论等产生的背景、应用,体会其中所蕴藏的数学思想和方法.”教师教学要“抓住数学知识的主干部分,突出基本原理和通用方法,切实加强数学课程的基础性.”因此,在课堂教学中,我们应充分利用通用教材,深刻地挖掘概念的内涵,生动地展现定理的形成过程,详尽地讲解例题的解答思路,清晰地阐释每一个数学分支的本质.从中归纳、总结和提炼出重要的、基本的数学解题方法,构建中学生人人应该掌握的数学基本方法.数学基本方法是数学思想的体现,是数学的行为,具有模式化与可操作性,可作为解题的具体手段,是解题的通法.“知识”是基础,“方法”是手段,“思想”是深化.通过对教材“知识”的记忆、基本“方法”的操练、数学“思想”的领悟,增强学生对数学思想方法的认识和运用能力,提高数学素质.数学高考命题历来重视考查数学基本方法,淡化数学解题技巧.体现在高考命题过程中,对于只能用技巧来解的备选问题,或是舍弃,或是改编成能用基本方法解的问题.为了帮助学生掌握解题的基本方法这个金钥匙,特别奉献

此书.

本书有以下几个特点:

1. 遵循课改理念和高考命题改革精神;

2. 依据最新二期课改教材的知识体系;

3. 坚持所有的基本方法均源自于教材;

4. 诠释各种方法内在规律和运用技巧;

5. 精选相关练习供学生自我训练提高;

6. 分类汇集近二十年内经典高考试题.

借以此书帮助学生系统地学好数学解题方法,扎实地提高素质,轻松地面对高考.

由于作者水平有限,存在不足之处,恳请读者给予指正.(E-mail:yuboya@sina.com)

虞 涛
2007.4.

# 目　　录

# 第六章 数 列

## 1. 基本量法

### 方法阐述

在等差(或等比)数列中,有五个量,它们是项数 $n$、首项 $a_1$、通项 $a_n$、公差 $d$(或公比 $q$)和前 $n$ 项和 $S_n$,它们之间满足关系:

等差数列

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$$

等比数列

$$a_n=a_1q^{n-1}$$

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1)\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq 1)\end{cases}$$

在这五个量中最重要也是最基本的量是首项 $a_1$ 和公差 $d$(或公比 $q$). 这两个量是等差(或等比)数列定义的出发点,而且有了这两个量,这个数列的其他量也就可以全部确定了,因此我们把首项 $a_1$ 和公差 $d$(或公比 $q$)称为等差(或等比)数列的基本量.

在解等差数列(或等比数列)问题时,可以把求问题中的其他量转化为求基本量,使求解的数列问题转化为求关于 $a_1$ 和 $d$(或 $q$)的

等式或不等式问题，这种解题方法不妨称之为基本量法.

## 课本溯源

在高中课本“数列”一章的“等差数列前 $n$ 项和”一节中安排了示范例题：

已知一个等差数列的前 10 项的和是 310，前 20 项的和是 1220，由此可以确定其前 $n$ 项和的公式吗?

在该题的分析中，指出“将已知条件代入等差数列前 $n$ 项和的公式后，可以得到两个关于 $a_1$ 和 $d$ 的关系式，然后确定 $a_1$ 和 $d$，从而得到所求前 $n$ 项和的公式.”这就是用基本量解数列问题的方法.

## 例题选讲

**例 1** (1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_2+a_7+a_8+a_{13}=8$，求 $a_5+a_{10}=$ ________;

(2) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_9+a_{10}=a\ (a\neq 0)$，$a_{19}+a_{20}=b$，求 $a_{100}+a_{99}=$ ________;

(3) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$，且 $a_1$，$a_3$，$a_9$ 又成等比数列，求 $\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=$ ________.

**思路剖析** 把求解问题转化为对 $a_1$ 和 $d$(或 $q$)的基本量问题的研究.

**解** (1) 因为
$$\begin{aligned}a_2+a_7+a_8+a_{13}&=(a_1+d)+(a_1+6d)+(a_1+7d)+(a_1+12d)\\&=4a_1+26d=2(2a_1+13d)=8,\end{aligned}$$
所以 $2a_1+13d=4$.

故 $a_5+a_{10}=(a_1+4d)+(a_1+9d)=2a_1+13d=4$.

(2) $a_9+a_{10}=a_1q^8+a_1q^9=a_1q^8(1+q)=a$,

同理 $\quad a_{19}+a_{20}=a_1q^{18}+a_1q^{19}=a_1q^{18}(1+q)=b$.

又 $a\neq 0$，所以 $q^{10}=\dfrac{b}{a}$，故

$$a_{100}+a_{99}=a_1q^{99}+a_1q^{98}=a_1q^{98}(1+q)$$
$$=a_1q^8(1+q)\cdot(q^{10})^9$$
$$=a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^9=\frac{b^9}{a^8}.$$

(3) 由条件 $a_3^2=a_1a_9$，即$(a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+8d)$，所以

$$a_1=d,$$
$$a_n=d+(n-1)d=nd.$$

故 $\dfrac{a_1+a_3+a_9}{a_2+a_4+a_{10}}=\dfrac{d+3d+9d}{2d+4d+10d}=\dfrac{13d}{16d}=\dfrac{13}{16}$.

**点评** (1) 找出条件中基本量 $a_1$ 和 $d$ 的关系与结论中 $a_1$ 和 $d$ 的关系式，利用这个关系式作为桥梁沟通了条件与结论，这里并没有分别求出 $a_1$ 和 $d$，而是利用 $a_1$ 和 $d$ 的关系式作为整体量转到结论上.

(2) 找出 $a_{100}+a_{99}$ 中基本量的关系式与条件 $a_9+a_{10}=a$，$a_{19}+a_{20}=b$ 中基本量间的关系整体进行转化.

(3) 该题是一个等差数列与等比数列综合问题，利用基本量法找出了一个 $a_1=d$ 的简单关系式，为问题的解决提供了方便.

**例 2** (2002 年高考·北京)等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，公差不为零，且 $a_1$，$a_3$，$a_{11}$ 恰好是某等比数列的前三项，那么该等比数列公比的值为________.

**思路剖析** **(解一)** 将条件转化为基本量 $a_1$、$d$ 的关系，从而求出 $a_1$、$d$，再求 $q$.

**(解二)** 利用基本量建立 $a_{11}$ 与 $a_3$ 的关系，从而找出 $a_3:a_1$，即 $q$.

**解** **(解一)** 因为$\{a_n\}$为等差数列，$a_1=2$，设公差为 $d$ $(d\neq 0)$，

则 $$a_3=a_1+2d,\ a_{11}=a_1+10d.$$

由于 $a_1$，$a_3$，$a_{11}$ 为等比数列的前三项，所以

$$a_3^2=a_1a_{11}, 即 (a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+10d).$$

解得 $d=0$（舍）或 $d=3$，所以 $a_3=2+2d=8$.



设等比数列的公比为 $q$，则 $a_3=a_1\cdot q$，即 $8=2q$，故 $q=4$.

**(解二)** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d$，则

$$d=\frac{a_n-a_m}{n-m}=\frac{a_{11}-a_3}{11-3}=\frac{a_{11}-a_3}{8},$$

所以 $$a_{11}=a_3+8d.$$

又 $a_1$，$a_3$，$a_{11}$ 为等比数列的前三项，

所以 $\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_{11}}{a_3}$，即 $\frac{a_1+2d}{a_1}=\frac{a_3+8d}{a_3}$，

所以 $\frac{2d}{a_1}=\frac{8d}{a_3}$，则 $\frac{a_3}{a_1}=\frac{8d}{2d}=4\ (d\neq0)$.

而 $\frac{a_3}{a_1}$ 是其公比，故公比为 4.

**点评** 解二中用到一个公式 $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$. 此式用基本量法很容易证得：

设 $a_n=a_1+(n-1)d$，$a_m=a_1+(m-1)d$，

两式相减得 $a_n-a_m=(n-m)d$，即 $d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$.

同理等比数列有公式 $q^{n-m}=\frac{a_n}{a_m}$.

**例 3** (2005 年高考·湖北)设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q$，前 $n$ 项之和为 $S_n$. 若 $S_{n+1}$，$S_n$，$S_{n+2}$ 成等差数列，求公比 $q$ 的值.

**思路剖析** 利用基本量法将条件转化为 $q$ 的方程，从而求出 $q$ 的值.

**解** 设首项 $a_1(a_1\neq0)$，则

$$S_n=\begin{cases}na_1 & (q=1),\\ \dfrac{a_1-a_nq}{1-q}=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & (q\neq1).\end{cases}$$

① 当 $q \neq 1$ 时，由于 $2S_n = S_{n+1} + S_{n+2}$，

所以
$$2 \cdot \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^{n+1})}{1-q} + \frac{a_1(1-q^{n+2})}{1-q}.$$

因为 $a_1 \neq 0$，$q \neq 1$，所以 $q^{n+2} + q^{n+1} = 2q^n$.

又 $q \neq 0$，所以 $q^2 + q - 2 = 0$，则 $q = 1$ 或 $-2$，

但 $q \neq 1$，所以 $q = -2$.

② 当 $q = 1$ 时，$S_n = na_1$，

所以
$$2na_1 = (n+1)a_1 + (n+2)a_1,$$

因为 $a_1 \neq 0$，等式不成立.

总之所求公比 $q = -2$.

**点评**　等比数列有两个必须关注的情况：

① 等比数列 $a_1 \neq 0$，$q \neq 0$，这是等比数列成立的先决条件；

② 求和要注意分公比 $q = 1$ 和 $q \neq 1$ 两种情况讨论.

## 方法点悟

一般来说，等差(或等比)数列问题，最后总可以归结到求基本量 $a_1$，$d$(或 $q$)的问题. 这是解决有关等差(或等比)数列问题最基本的方法，但它并不一定是最好的方法. 不过，对于条件不复杂的问题，基本量法是够用的.

利用基本量法解题的一般步骤可以归纳为：

① 设首项 $a_1$，公差 $d$(或公比 $q$)；

② 用 $a_1$、$d$(或 $q$)表示题目中的其他量；

③ 利用题设条件通过代数运算求出 $a_1$、$d$(或 $q$)；

④ 求出所要求的其他量.

## 训练问题

**1.** 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_7 \cdot a_9 = 16$，且 $a_5 = \frac{1}{2}$，则 $a_{12} =$ ________.

2. 设等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $a_2+a_8=15-a_5$，则 $S_9=$ ________.

3. 设等差数列$\{a_n\}$中，$a_5=6$，$a_3=3$. 若 $a_3$，$a_5$，$a_m$ 成等比数列，则 $m=$ ________.

4. 已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_4^2+2a_4a_7+a_6a_8=2008$，则 $a_5a_6=$ ________.

5. 等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和记为 $S_n$，若 $a_2+a_6+a_{10}$ 为一个确定的常数，则下列各数中也是常数的是（　　）.

(A) $S_6$　　(B) $S_{11}$　　(C) $S_{12}$　　(D) $S_{13}$

6. (2007 年高考·江西)已知等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$，若 $S_{12}=21$，则 $a_2+a_5+a_8+a_{11}=$ ________.

7. 设 $S_n$ 为等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项的和. 已知 $S_7=7$，$S_{15}=75$，令 $b_n=\dfrac{S_n}{n}$，求数列$\{b_n\}$的通项公式.

8. 已知等比数列$\{a_n\}$及等差数列$\{b_n\}$，其中 $b_1=0$，公差 $d\neq 0$. 若将这两个数列的对应项相加，得到一个新数列 1，1，2，…，求这个新数列的前 10 项之和.

## 考题链接

1. (2005 年高考·全国)如果 $a_1$，$a_2$，…，$a_8$ 为各项都大于零的等差数列，公差 $d\neq 0$，则（　　）.

(A) $a_1a_8>a_4a_5$　　(B) $a_1a_8<a_4a_5$

(C) $a_1+a_8>a_4+a_5$　　(D) $a_1a_8=a_4a_5$

2. (2006 年高考·全国)设 $S_n$ 是等差数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和，若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{3}$，则$\dfrac{S_6}{S_{12}}=$（　　）.

(A) $\dfrac{3}{10}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{8}$　　(D) $\dfrac{1}{9}$

3. (2005 年高考·全国)在$\dfrac{8}{3}$和$\dfrac{27}{2}$之间插入三个数，使这五个数成等比数列，则插入的三个数的乘积为________.

4. (1996 年高考 · 全国)设等比数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$. 若 $S_3 + S_6 = 2S_9$, 求数列的公比 $q$.
5. (2005 年高考 · 全国)在等差数列$\{a_n\}$中,公差 $d \neq 0$, $a_2$ 是$a_1$ 与 $a_4$ 的等比中项, 已知数列 $a_1$, $a_3$, $a_{k_1}$, $a_{k_2}$, …, $a_{k_n}$,…成等比数列,求数列$\{a_n\}$的通项 $k_n$.
6. (2004 年高考 · 上海)若干个能唯一确定一个数列的量称为该数列的"基本量". 设$\{a_n\}$是公比为 $q$ 的无穷等比数列,下列$\{a_n\}$的四组量中,一定能成为该数列"基本量"的是第几组. (写出所有符合要求的组号)①$S_1$ 与 $S_2$;②$a_2$ 与 $S_3$;③$a_1$ 与 $a_n$;④$q$ 与 $a_n$. 其中 $n$ 为大于 1 的整数, $S_n$ 为$\{a_n\}$的前 $n$ 项和.
7. (2004 年春季高考 · 上海)在等差数列$\{a_n\}$中,当$a_r = a_s (r \neq s)$时,$\{a_n\}$必定是常数数列. 然而在等比数列$\{a_n\}$中,对某些正整数 $r$、$s$ $(r \neq s)$,当 $a_r = a_s$ 时,非常数数列$\{a_n\}$的一个例子是________.
8. (2004 年春季高考 · 上海)某市 2003 年共有 1 万辆燃油型公交车. 有关部门计划于 2004 年投入 128 辆电力型公交车,随后电力型公交车每年的投入比上一年增加 50%,试问:
(1) 该市在 2010 年应该投入多少辆电力型公交车?
(2) 到哪一年底,电力型公交车的数量开始超过该市公交车总量的$\frac{1}{3}$?

## 2. 知三求二法

### 方法阐述

在等差数列的研究中,会经常涉及到的有五个量:

| $a_1$ | $d$ | $a_n$ | $n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ |
| 首项 | 公差 | 第 $n$ 项 | 项数 | 前 $n$ 项和 |

围绕他们有三个基本的公式：

$$a_n = a_1 + (n-1)d;$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2};$$

$$S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d.$$

在等比数列的研究中会经常涉及到的有五个量：

| $a_1$ | $q$ | $a_n$ | $n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ | $\updownarrow$ |
| 首项 | 公比 | 第 $n$ 项 | 项数 | 前 $n$ 项和 |

围绕他们有三个基本的公式：

$$a_n = a_1q^{n-1};$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_nq}{1-q}\ (q \neq 1);$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q \neq 1).$$

每个公式都含有四个量. 在一般情况下，知道其中的三个量利用公式通过求代数式的值或解方程(组)总可以求出其他两个量，这种方法不妨简称之为知三求二法. 知三求二法实质上是方程的思想运用于等差或等比数列问题中的具体表现.

## 课本溯源

在高中课本“数列”一章的“等差数列前 $n$ 项和”一节中，安排例题：

已知一个等差数列的前 10 项的和是 310，前 20 项的和是 1220，由此可以确定其前 $n$ 项和的公式吗？

课本还专门提出一个思考问题：“在求等差数列的 $a_1$，$a_n$，$d$，$n$，$S_n$ 时，需要知道其中几个才能求出其他几个？”课本用这种提示性语言指出知三求二法在解决等差(或等比)数列问题中的意义.