冲刺

全国初中数学竞赛

CHONGCI

QUANGUO CHUZHONG

SHUXUE JINGSAI

初中数学竞赛研究组 组编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大學出版社

冲刺全国初中数学竞赛

主　编　许康华　陈　计

编　委　骆来根　金　毅　吕海国
陈碧云　朱邦建　段春炳
童正平　童常健　裘玉云
洪利芳　李海儿　闻雪洪

浙江大学出版社

编者的话

竞赛是对学有余力的学生开设的活动，旨在培养学生的创新意识和创新能力，为有特殊能力的学生提供一个展示自我的舞台。这项活动激发了参与学生的学习兴趣，也培养了一批好苗子。

在不少人看来，竞赛试题刁钻古怪。其实不然，好的竞赛试题都有很深刻的学科背景，往往取材于学科的前沿知识或实际生活，不仅具有很强的科学性、知识性，而且具有很强的趣味性、启发性。基于此，我们编写了初中各学科竞赛冲刺丛书，包括数学、物理、化学和生物共4个分册。

在编写过程中，力求取材新颖，所有的材料都是本学科的本质内容；力求试题设计的科学性、趣味性，对于一些艰深生涩、学生又不熟悉的素材一律舍弃。丛书博采了众多优秀的各类升学考试试题和竞赛试题。

丛书由竞赛命题专家和竞赛研究专家编写，是专门为那些即将参加竞赛在最后冲刺阶段而准备的珍贵材料。我们深信读者一定会喜欢，同时，我们也真诚希望广大读者提出宝贵的意见，以便及时改正。

目录

全国初中数学联赛和竞赛

第一章 数与式

【典型赛题解析】

例 1 【2005 年联赛选择题第 1 题】

化简$\dfrac{1}{4+\sqrt{59+30\sqrt{2}}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{66-40\sqrt{2}}}$的结果是(　　).

A. 无理数　　B. 真分数　　C. 奇数　　D. 偶数

分析 $\sqrt{59+30\sqrt{2}}$，$\sqrt{66-40\sqrt{2}}$是两个复合根式，如直接进行分母有理化就比较复杂，故可考虑首先化简二次根式.

解 原式$=\dfrac{1}{4+\sqrt{(5\sqrt{2}+3)^2}}+\dfrac{1}{3-\sqrt{(5\sqrt{2}-4)^2}}$

$=\dfrac{1}{7+5\sqrt{2}}+\dfrac{1}{7-5\sqrt{2}}=-(7-5\sqrt{2})-(7+5\sqrt{2})=-14.$

故选 D.

例 2 【2003 年联赛选择题第 1 题】

$2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}$等于(　　).

A. $5-4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{2}-1$　　C. 5　　D. 1

解 $2\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{17-12\sqrt{2}}=2\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}$

$=2(\sqrt{2}-1)+3-2\sqrt{2}=1.$

故选 D.

说明 以上两例主要考查的是复合二次根式的化简. 对于复合二次根式$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$的化简，通常有以下三种方法：(1)平方法，先将复合二次根式平方并化简，再将结果开方，求得原式的值. (2)配方法，如将$\sqrt{a\pm2\sqrt{b}}$中的$a\pm2\sqrt{b}$写成$(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2$的形式. (3)待定系数法，先根据复合二次根式的特点，假设原式能化成几个简单二次根式的和或差，再通过平方、化简、比较系数求出结果.

例 3 【2004 年联赛填空题第 1 题】

计算$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2003}+\sqrt{2004}}=$________.

解 原式$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2004}-\sqrt{2003})$

$=\sqrt{2004}-1=2\sqrt{501}-1.$

说明 设 P 和 Q 表示两个不恒等于零的含有根式的代数式. 如果 $P\cdot Q$ 为一个有理式，则称 P 和 Q 互为有理化因式或称共轭因式. 例如由于 $(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}-\sqrt{B})=A-B$，因而 $\sqrt{A}+\sqrt{B}$，$\sqrt{A}-\sqrt{B}$ 是一对共轭因式. 从上题可见，利用共轭因式常常可使问题得以简化.

例 4 【2000 年联赛选择题第 2 题】

若 $\dfrac{x}{3y}=\dfrac{y}{2x-5y}=\dfrac{6x-15y}{x}$，则 $\dfrac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}$ 的值是( ).

A. $\dfrac{9}{2}$ B. $\dfrac{9}{4}$ C. 5 D. 6

解 由已知条件知 $x\neq0$，$y\neq0$. 把已知等式变形并利用等比定理消去 y，得

$\dfrac{25x}{75y}=\dfrac{15y}{30x-75y}=\dfrac{6x-15y}{x}$

$=\dfrac{25x+15y+(6x-15y)}{75y+(30x-75y)+x}=\dfrac{31x}{31x}=1,$

则 $x=3y$. 故 $\dfrac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}=\dfrac{36y^2-15y^2+6y^2}{9y^2-6y^2+3y^2}=\dfrac{27y^2}{6y^2}=\dfrac{9}{2}.$

说明 此题也可以通过解方程组求出 x 与 y 之间的关系，然后代入求值.

例 5 【2005 年联赛选择题第 3 题】

设 $r\geqslant4$，$a=\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{r+1}$，$b=\dfrac{1}{\sqrt{r}}-\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}$，$c=\dfrac{1}{r(\sqrt{r}+\sqrt{r+1})}$，则下列各式中，一定成立的是( ).

A. $a>b>c$ B. $b>c>a$ C. $c>a>b$ D. $c>b>a$

解法一 将 $r=4$ 代入得 $a=\dfrac{1}{20}=0.05$，$b=\dfrac{5-2\sqrt{5}}{10}\approx0.0528$，$c=\dfrac{\sqrt{5}-2}{4}\approx0.059$.

$\therefore c>b>a$，故选 D.

说明 解法 1 采用了赋值法(或取特殊值法)，这里需要大家对 $\sqrt{5}$ 有较精确的估计，不然也很难得到答案. 进一步应当掌握常用几个无理数的估计. 下面再给出一般的解法.

解法二 $\because r\geqslant4$，$\therefore 0<\dfrac{1}{\sqrt{r}}+\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}<1$，

$\therefore a=\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}+\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{r}}-\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}\right)<\dfrac{1}{\sqrt{r}}-\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}=b.$

而 $c=\dfrac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{r}>\dfrac{\sqrt{r+1}-\sqrt{r}}{\sqrt{r}\cdot\sqrt{r+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{r}}-\dfrac{1}{\sqrt{r+1}}=b,$

$\therefore c>b>a.$

例 6 【2004 年联赛选择题第 1 题】

已知 $abc\neq0$，且 $a+b+c=0$，则代数式 $\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}$ 的值是( ).

A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

解 原式 $=\dfrac{a^2}{bc}+\dfrac{b^2}{ca}+\dfrac{c^2}{ab}=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}$

$=\dfrac{a^3+b^3+c^3-3abc+3abc}{abc}$

$=\dfrac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc}{abc}$.

$\because a+b+c=0$，$\therefore$ 上式 $=\dfrac{3abc}{abc}=3$. 故选 A.

说明 此题主要考查 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 这个恒等式. 当然本题也可用赋值法来解，如取 $a=2,b=c=-1$，则立得答案.

例 7 【2000 年联赛填空题第 3 题】

实数 x,y 满足 $x\geqslant y\geqslant 1$ 和 $2x^2-xy-5x+y+4=0$，则 $x+y=$________.

解 $2x^2-xy-5x+y+4=(x^2-4x+4)+(x^2-xy-x+y)$

$=(x-2)^2+(x-y)(x-1)=0$.

$\because x\geqslant y\geqslant 1$，$\therefore (x-y)(x-1)\geqslant 0$.

又 $(x-2)^2\geqslant 0$，$\therefore (x-2)^2=(x-y)(x-1)=0$，$\therefore x=y=2$，$x+y=4$.

例 8 【2004 年联赛填空题第 3 题】

实数 a,b 满足 $a^3+b^3+3ab=1$，则 $a+b=$________.

解 考虑到 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$，不妨令 $c=-1$，则 $a^3+b^3-1+3ab=(a+b-1)(a^2+b^2-ab+a+b+1)=0$.

$\therefore a+b-1=0\cdots\cdots$①，或 $a^2+b^2+a+b-ab+1=0\cdots\cdots$②.

由①知 $a+b=1$.

由②知 $a^2+b^2+a+b-ab-1=0$.

配方得 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}b+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b\right)^2=0$，

$\therefore a=b=-1$，$\therefore a+b=-2$，即 $a+b=1$ 或 -2.

说明 以上两题通过配方及因式分解将等式左边化为几个非负数的和，等式右边为零，然后利用非负数的性质求解. 如果有限个非负数的和为零，那么每一个加数都必为零，即若 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 为非负数，且 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，则必有 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

例 9 【2005 年联赛填空题第 3 题】

若实数 x,y 满足 $\dfrac{x}{3^3+4^3}+\dfrac{y}{3^3+6^3}=1$，$\dfrac{x}{5^3+4^3}+\dfrac{y}{5^3+6^3}=1$，则 $x+y=$________.

分析 考虑到分母均比较大，直接解方程组较繁. 观察知，3^3，5^3 是关于 t 的方程 $\dfrac{x}{t+4^3}+\dfrac{y}{t+6^3}=1$ 的两个根，由此再进行化简.

解 由题意知 3^3，5^3 是关于 t 的方程 $\dfrac{x}{t+4^3}+\dfrac{y}{t+6^3}=1$ 的两个根，化简得

$t^2-(x+y-4^3-6^3)t-(6^3x+4^3y-4^3\cdot 6^3)=0$.

由韦达定理知 $3^3+5^3=x+y-4^3-6^3$，$\therefore x+y=3^3+4^3+5^3+6^3=432$.

说明 此题我们采用变更主元的方法，将 3^3，5^3 看成某个一元二次方程的两个根，通过构造方程，利用根与系数的关系，整体求得 $x+y$ 的值.

例 10 【1996 年联赛填空题第 3 题】

设 $1995x^3=1996y^3=1997z^3$，$xyz>0$，且 $\sqrt[3]{1995x^2+1996y^2+1997z^2}=\sqrt[3]{1995}+\sqrt[3]{1996}+$

$\sqrt[3]{1997}$，则$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=$________.

分析 由于题中多次出现 1995，1996，1997，且出现一个连等式，故可考虑用设参法来解.

解 设 $1995x^3=1996y^3=1997z^3=k(k\neq0)$，

$\therefore 1995=\frac{k}{x^3}, 1996=\frac{k}{y^3}, 1997=\frac{k}{z^3}$，代入方程得

$$\sqrt[3]{\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{k}{z}}=\sqrt[3]{\frac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\frac{k}{z^3}},$$

即$\sqrt[3]{k}\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\sqrt[3]{k}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$.

$\because k\neq0, \therefore \sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$，

又 $x>0, y>0, z>0$，$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

说明 当问题中各字母之间的关系比较“隐蔽”时，可以考虑引入新的字母，而新字母与原来各字母之间的关系比较明显，从而借助于新的字母解决问题，这种方法称为设参法.

例 11 【2000 年联赛选择题第 3 题】

设 a,b 是不相等的任意正数，又 $x=\frac{b^2+1}{a}, y=\frac{a^2+1}{b}$，则 x,y 这两个数一定(　　).

A. 都不大于 2　　B. 都小于 2　　C. 至少有一个大于 2　　D. 至少有一个小于 2

解法一 不妨假设 $a<b$，则

$$\frac{b^2+1}{a}>\frac{a^2+1}{a}=\frac{(a-1)^2+2a}{a}\geqslant\frac{2a}{a}=2,$$

即$\frac{b^2+1}{a}>2$，由对称性知，x,y 中至少有一个大于 2，故选择 C.

解法二
$$\begin{aligned}xy&=\frac{b^2+1}{a}\cdot\frac{a^2+1}{b}\\&=\frac{a^2b^2+a^2+b^2+1}{ab}=\frac{(ab-1)^2+(a-b)^2+4ab}{ab}\\&>\frac{4ab}{ab}=4(\because a\neq b,\therefore \text{不能取到等号}),\end{aligned}$$

$\therefore x,y$ 中至少有一个大于 2.

解法三 不妨设 $x\geqslant y$，则

$$\begin{aligned}x&=\frac{ax+bx}{a+b}\geqslant\frac{ax+by}{a+b}=\frac{a\cdot\frac{b^2+1}{a}+b\cdot\frac{a^2+1}{b}}{a+b}\\&=\frac{a^2+b^2+2}{a+b}=\frac{(a-1)^2+(b-1)^2+2(a+b)}{a+b}>\frac{2(a+b)}{a+b}=2,\end{aligned}$$

$\therefore x,y$ 中至少有一个大于 2.

说明 在三种解法中，解法 1 利用了对称性，解法 2 利用两个正数的乘积大于 4，必有一个数大于 2，解法 3 是利用了加权平均数的性质. 如果有 n 个数，其中 f_1 出现 x_1 次，f_2 出现 x_2 次，…，f_k 出现 x_k 次，且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$（这里 n,x_i 不一定要是整数），则这 n 个数的加权平均数为

$$\frac{x_1 f_1+x_2 f_2+\cdots+x_k f_k}{x_1+x_2+\cdots+x_k}.$$

大家从上例可以看到利用加权平均数能比较方便地得到答案.

【趋势预测】

1984 年中国数学会普及工作委员会决定举办“全国初中数学联合竞赛”,1998 年又增加了“全国初中数学竞赛”. 这两项赛事都是大众化、普及性的数学竞赛,它们不像“全国高中数学联合竞赛”那样具有选拔功能. 因而更具有面向大多数的作用.

总结历年的试题,数与式不能说在试题中起着举足轻重的作用,但我们也不能忽视这块内容. 数与式在历年试题中出现的数量不多,难度也不大. 主要考查的是一些基础知识及其变形. 包括二次根式的化简与求值,因式分解,数与式的大小比较等. 估计今后几年会继续在这些类型中出题,而且难度也不会上升,但灵活度肯定会有所提高,特别是已知某些未知量之间的关系,求给定的一个式子的值,这种类型的题目应引起足够的重视. 对于出现过的一些比较特殊的解题方法也应牢记. 当然,万变不离其宗,最重要的还是要掌握其中的基本知识、基本技能及思想方法,倘能如此,相信解题就会变得更加容易.

【针对模拟】

一、选择题

1.【1998 年竞赛第 1 题】

已知 a,b,c 都是实数,并且 $a>b>c$,那么下列式子中正确的是(　　).

A. $ab>bc$　　B. $a+b>b+c$　　C. $a-b>b-c$　　D. $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

2.【2000 年联赛第 1 题】

$\sqrt{14+6\sqrt{5}}-\sqrt{14-6\sqrt{5}}$ 的值是(　　).

A. 1　　B. $\sqrt{5}$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. 5

3.【1999 年联赛第 1 题】

$\frac{1}{1-\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{1+\sqrt[4]{3}}+\frac{2}{1+\sqrt{3}}$ 的值是(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. -2

4.【2001 年竞赛第 1 题】

化简 $\frac{2^{n+4}-2(2^n)}{2(2^{n+3})}$ 得(　　).

A. $2^{n+1}-\frac{1}{8}$　　B. -2^{n+1}　　C. $\frac{7}{8}$　　D. $\frac{7}{4}$

5.【2005 年联赛 D 卷第 1 题】

$\sqrt{5-\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$ 与 $\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}$ 的(　　)

A. 和为 1　　B. 差为 1　　C. 积为 1　　D. 商为 1

6.【2005 年全国联赛 E 卷第 1 题】

若 $a=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$,$b=2+\sqrt{6}-\sqrt{10}$,则 $\frac{a}{b}$ 的值为(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$　　D. $\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{10}}$

7.【2000 年竞赛第 1 题】

设 a,b,c 的平均数为 M，a,b 的平均数为 N，N,c 的平均数为 P，若 $a>b>c$，则 M 与 P 的大小关系是(　　).

A. $M=P$　　B. $M>P$　　C. $M<P$　　D. 不确定

8.【2005 年竞赛第 2 题】

若 $M=3x^2-8xy+9y^2-4x+6y+13$(x,y 是实数)，则 M 的值一定是(　　).

A. 正数　　B. 负数　　C. 零　　D. 整数

9.【2006 年竞赛第 2 题】

已知 $m=1+\sqrt{2}$，$n=1-\sqrt{2}$，且 $(7m^2-14m+a)(3n^2-6n-7)=8$，则 a 的值等于(　　).

A. -5　　B. 5　　C. -9　　D. 9

10.【2002 年竞赛第 1 题】

设 $a<b<0$，$a^2+b^2=4ab$，则 $\frac{a+b}{a-b}$ 的值为(　　).

A. $\sqrt{3}$　　B. $\sqrt{6}$　　C. 2　　D. 3

11. 已知 a,b,c,d 的四个不同的实数，且 $(b+d)(b+a)=1$，$(c+d)(c+a)=1$，则 $(b+d)(c+d)$ 的值为(　　).

A. 1　　B. -1　　C. 2　　D. 0

12.【2005 年联赛 D 卷第 2 题】

使代数式 $y=\frac{x^2+11}{x+1}$ 的值为整数的全体自然数 x 的和是(　　).

A. 5　　B. 6　　C. 12　　D. 22

13.【1999 年竞赛第 3 题】

已知 $\frac{1}{a}-|a|=1$，那么代数式 $\frac{1}{a}+|a|$ 的值为(　　).

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$　　C. $-\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

14.【2002 年竞赛第 2 题】

已知 $a=1999x+2000$，$b=1999x+2001$，$c=1999x+2002$，则多项式 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

15.【2002 年联赛第 2 题】

若 $m^2=n+2$，$n^2=m+2(m\neq n)$，则 $m^3-2mn+n^3$ 的值为(　　).

A. 1　　B. 0　　C. -1　　D. -2

16.【2002 年竞赛第 4 题】

设 a,b,c 为实数，$x=a^2-2b+\frac{\pi}{3}$，$y=b^2-2c+\frac{\pi}{6}$，$z=c^2-2a+\frac{\pi}{2}$，则 x,y,z 中，至少有一个值(　　).

A. 大于 0　　B. 等于 0　　C. 不大于 0　　D. 小于 0

17.【2001 年竞赛第 6 题】

若 a,b 是正数，且满足 $12345=(111+a)\cdot(111-b)$，则 a 与 b 之间的大小关系是(　　).

A. $a>b$　　B. $a=b$　　C. $a<b$　　D. 不能确定

18.【2005 年竞赛第 4 题】

已知 $A=48\times\left(\frac{1}{3^2-4}+\frac{1}{4^2-4}+\cdots+\frac{1}{100^2-4}\right)$，则与 A 最接近的正整数是(　　).

A. 18　　B. 20　　C. 24　　D. 25

19.【2005 年联赛 D 卷第 5 题】

设 a,b,c,d 为正数，$a>b>c>d$，记 $x=\sqrt{(ab+cd)(a-b)(c-d)}$，$y=\sqrt{(ac+bd)(a-c)(b-d)}$，$z=\sqrt{(ad+bc)(a-d)(b-c)}$，则以 x,y,z 为边长(　　).

A. 必可构成一个锐角三角形　　B. 必可构成一个钝角三角形

C. 必可构成一个直角三角形　　D. 不一定构成三角形

20.【2005 年联赛 E 卷第 3 题】

已知 $\alpha=3+2\sqrt{2}$，$\beta=3-2\sqrt{2}$. 若 $\alpha^{10}+\beta^{10}$ 是一个正整数，则它的末位数字是(　　).

A. 2　　B. 4　　C. 6　　D. 8

二、填空题

21.【1999 年竞赛第 7 题】

已知 $x=\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，那么 x^2+y^2 的值为________.

22.【2001 年竞赛第 7 题】

已知 $x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$，$y=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，那么 $\frac{y}{x^2}+\frac{x}{y^2}=$________.

23. 规定一种运算，“$*$”：对于任意实数对 (x,y) 恒有

$(x,y)*(x,y)=(x+y+1,x^2-y-1)$.

若实数 a,b 满足 $(a,b)*(a,b)=(b,a)$，则 $a=$________，$b=$________.

24.【2003 年竞赛第 6 题】

已知 $x=1+\sqrt{3}$，那么 $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=$________.

25.【2002 年联赛第 7 题】

已知 $a<0$，$ab<0$，化简 $\frac{1}{|a-b-3\sqrt{2}|-|b-a+\sqrt{3}|}=$________.

26. 已知 a,b,x,y 都为实数，且 $y+|\sqrt{x}-2|=1-a^2$，$|x-4|=3y-3-b^2$. 则 $a+b+x+y$ 的值为________.

27. 如果 $\frac{t_1}{|t_1|}+\frac{t_2}{|t_2|}+\frac{t_3}{|t_3|}=1$，则 $\frac{|t_1t_2t_3|}{t_1t_2t_3}$ 的值为________.

28. 实数 x,y,z 满足 $x=y+\sqrt{2}$，$2xy+2\sqrt{2}z^2+1=0$，则 $x+y+z$ 的值等于________.

29. 设 a,b,c 为非零实数，且 $a+b+c\neq0$. 若 $\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，则 $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}=$________.

30. 如果 $a+b+c=0$，$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+3}=0$，那么，$(a+1)^2+(b+2)^2+(c+3)^2$ 的值为

________.

31. 已知$\frac{y+z-x}{x+y+z}=\frac{z+x-y}{y+z-x}=\frac{x+y-z}{z+x-y}=p$，则 $p^3+p^2+p=$________.

32. 已知 x,y,z 均为非负实数，且满足 $3x+2y+z=5$，$x+y-z=2$. 若 $s=2x+y-z$，则 s 的最大值与最小值的和为________.

33. 多项式 x^3-x-a 与多项式 x^2+x-a 有非常数公因式，则 $a=$________.

34.【2000 年竞赛第 7 题】

已知 $a=\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{1}$，那么$\frac{3}{a}+\frac{3}{a^2}+\frac{1}{a^3}=$________.

35.【2006 年竞赛第 6 题】

已知 a,b,c 为整数，且 $a+b=2006$，$c-a=2005$. 若 $a<b$，则 $a+b+c$ 的最大值为______.

36.【1999 年竞赛第 9 题】

已知 $ab\neq0$，$a^2+ab-b^2=0$，那么$\frac{2a-b}{2a+b}$的值为________.

37. 已知 $a+b+c=3$，$a^2+b^2+c^2=3$，则 $a^{2008}+b^{2008}+c^{2008}$ 的值为________.

38. 已知$(x+\sqrt{x^2+2008})(y+\sqrt{y^2+2008})=2008$，则

$x^2-3xy-4y^2-6x-6y+60=$________.

39. 已知 $0\leqslant a-b\leqslant1$，$1\leqslant a+b\leqslant4$. 那么，当 $a-2b$ 达到最大值时，$8a+2002b$ 的值等于________.

40. 已知 x,y,z,a,b 均为非零实数，且满足 $\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{a^3-b^3}$，$\frac{yz}{y+z}=\frac{1}{a^3}$，$\frac{zx}{z+x}=\frac{1}{a^3+b^3}$，$\frac{xyz}{xy+yz+zx}=\frac{1}{12}$，则 a 的值为________.

三、解答题

41. 试将实数$\sqrt{11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})}$改写成由三个正整数的正二次根的和.

42. 分解因式：$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$.

43. 若正数 a,b,c 满足 $a+c=2b$，求证：$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$.

44. 若$\frac{a}{ab+a+1}+\frac{b}{bc+b+1}+\frac{c}{ca+c+1}=1$，求 abc.

45. 证明恒等式：$a^4+b^4+(a+b)^4=2(a^2+ab+b^2)^2$.

46. 已知非零实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$. 求证：

(1)$a^3+b^3+c^3=3abc$；

(2)$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$.

47. 设 $S=\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2006^2}+\frac{1}{2007^2}}$. 求不超过 S 的最大整数$[S]$.

48. 已知 $x,y>0$，$x^2+xy+y^2>3$. 求证：x^2+xy，y^2+xy 至少有一个大于 2.

第二章　方程和不等式

【典型赛题分析】

例 1　【1998 年全国联赛第 11 题】

设 a、b 为实数，那么 a^2+ab+b^2-a-2b 的最小值是________.

分析　这是求一个二元二次多项式的最值. 求解这种类型的题大多数利用配方法(注意要使每个非负数能同时为零)或一元二次方程的判别式法.

解法一　配方法：

$$\begin{aligned}a^2+ab+b^2-a-2b &= a^2+(ab-a)+b^2-2b\\&=\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+(b-1)^2-\frac{1}{4}(b-1)^2\\&=\left(a+\frac{b-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2-1\\&\geqslant 0+0-1(\text{当 } a=0、b=1 \text{ 时等号成立})\\&=-1,\end{aligned}$$

$\therefore a^2+ab+b^2-a-2b$ 的最小值为 -1.

解法二　判别式法：

设 $a^2+ab+b^2-a-2b=m$，因此关于 a 的一元二次方程 $a^2+(b-1)a+(b^2-2b-m)=0$ 有实数根.

$\therefore \Delta_1\geqslant 0$，即 $(b-1)^2-4(b^2-2b-m)\geqslant 0$，$\therefore -3b^2+6b+1+4m\geqslant 0$，

$\because -3<0$，而关于 b 的不等式 $-3b^2+6b+1+4m\geqslant 0$ 有实数解. 说明二次函数 $y=-3x^2+6x+1+4m$ 与 x 轴有交点.

$\therefore \Delta_2\geqslant 0$，即 $6^2-4\times(-3)\times(1+4m)\geqslant 0$，$\therefore m\geqslant -1$.

经检验，当 $a=0$、$b=1$ 时，$m=-1$.

$\therefore a^2+ab+b^2-a-2b$ 的最小值为 -1.

例 2　【1999 年全国全国竞赛第 13 题】

设实数 s、t 分别满足 $19s^2+99s+1=0$，$t^2+99t+19=0$，并且 $st\neq 1$，求 $\frac{st+4s+1}{t}$ 的值.

分析　本题问题是考查根与系数的关系——韦达定理.

解　显然，s、t 均不为零.

把方程 $t^2+99t+19=0$ 两边同除以 t^2，得

$19\left(\frac{1}{t}\right)+99\left(\frac{1}{t}\right)+1=0.$

由于 $19\left(\frac{1}{t}\right)^2+99\left(\frac{1}{t}\right)+1=0$ 和 $19s^2+99s+1=0$，因此 $\frac{1}{t}$ 和 s 是方程 $19x^2+99x+1=0$ 的根，$st\neq 1$，则 $\frac{1}{t}$ 和 s 是方程 $19x^2+99x+1=0$ 两个不同的实数根，所以 $s+\frac{1}{t}=-\frac{99}{19}$，$\frac{s}{t}=$

$\frac{1}{19} \cdot \frac{st+4s+1}{t}=\left(s+\frac{1}{t}\right)+4\frac{s}{t}=-\frac{99}{19}+4\times\frac{1}{19}=-5.$

例 3 【2000 年全国全国竞赛第 13 题】

设 m 是不小于 -1 的实数，使得关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x+m^2-3m+3=0$ 有两个不相等的实数根 x_1、x_2.

(1)若 $x_1^2+x_2^2=6$，求 m 的值.

(2)求 $\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 的最大值.

分析 主要用到的知识是一元二次的判别式与实数根个数的关系及韦达定理；利用二次函数的增减性，求二次三项式在某一区间内的极值.

解 $\because \Delta=[2(m-2)]^2-4\times1\times(m^2-3m+3)=-4m+4>0$，

$\therefore m<1$. 结合题设知，$-1\leqslant m<1$.

由韦达定理知：$x_1+x_2=-2(m-2)$，$x_1x_2=m^2-3m+3$.

(1)已知 $x_1^2+x_2^2=6$，则

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=[-2(m-2)]^2-2(m^2-3m+3)=2m^2-10m+10.$

$\therefore 2m^2-10m+10=6$. 解得 $m=\frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$.

由 $-1\leqslant m<1$ 得，$m=\frac{5-\sqrt{17}}{2}$.

(2) $$\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}=\frac{m[x_1^2(1-x_2)+x_2^2(1-x_1)]}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$=\frac{m[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-x_1x_2(x_1+x_2)]}{x_1x_2-(x_1+x_2)+1}$$

$$=\frac{m\{[-2(m-2)]^2-2(m^2-3m+3)-(m^2-3m+3)[-2(m-2)]\}}{(m^2-3m+3)-[-2(m-2)]+1}$$

$$=2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}(-1\leqslant m<1).$$

由于当 $-1\leqslant x<1$ 时，函数 $y=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$ 的值是随 x 的增大反而减小的，因此当 $m=1$ 时，$2\left(m-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}(-1\leqslant m<1)$ 取到最大值 10.

$\therefore \frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 的最大值为 10.

说明 本题第 2 小题中难点是如何把 $\frac{mx_1^2}{1-x_1}+\frac{mx_2^2}{1-x_2}$ 化为只含 x_1+x_2 和 x_1x_2 的形式.

例 4 【2002 年全国联赛二试第 1 题】

已知 a,b,c 三数满足方程组 $\begin{cases}a+b=8\\ab-c^2+8\sqrt{2}c=48\end{cases}$，试求方程 $bx^2+cx-a=0$ 的根.

分析 已知方程组中有三个未知数，而组成方程组的方程个数只有两个，同时我们还发现在方程组中出现 $a+b$ 和 ab，进而考虑韦达定理.

解 原方程组可化为 $\begin{cases}a+b=8\\ab=48+c^2-8\sqrt{2}c\end{cases}$，由韦达定理知，$a,b$ 是关于 z 的一元二次方程

$z^2-8z+(48+c^2-8\sqrt{2}c)=0$ 的两个实数根.

$\therefore \Delta=8^2-4\times1\times(48+c^2-8\sqrt{2}c)=-4(c-4\sqrt{2})^2\geqslant0$,

$\because -4(c-4\sqrt{2})^2\leqslant0$, $\therefore -4(c-4\sqrt{2})^2=0$ 即 $\Delta=0$,

$\therefore c=4\sqrt{2}$,方程 $x^2-8x+(48+c^2-8\sqrt{2}c)=0$ 的实数根为 $x_1=x_2=4$.

$\therefore \begin{cases}a=4\\b=4\\c=4\sqrt{2}\end{cases}$. $\therefore$原方程化为 $4x^2+4\sqrt{2}x-4=0$,

$\therefore x_1=\dfrac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$, $x_2=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$.

例 5 【2003 年全国联赛第二大题第 3 小题】

已知实数 a,b,c,d 互不相等,且 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=x$,试求 x 的值.

分析 本题属于有限制条件的方程(组)的类型,基本的方法是消元降次,还利用方程的轮换的性质得出几个类似的方程.除此之外由于有限制条件,求出的解还必须检验.

解 由已知逐次代入得

$$x=a+\frac{1}{b}=a+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{c}}=a+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{d}}}=a+\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{a}}}}=\frac{a^2x^3-2a^2x-x}{ax^3-x^2-2ax+1}.$$

$\therefore (x^3-2x)(a^2-xa+1)=0$.由 a,b,c,d 的轮换性可得

$(x^3-2x)(b^2-xb+1)=0$, $(x^3-2x)(c^2-xc+1)=0$, $(x^3-2x)(d^2-xd+1)=0$.

但关于 y 的一元二次方程 $y^2-xy+1=0$ 最多只有两个不相等的实数根,而实数 a,b,c,d 互不相等,因此 a^2-xa+1, b^2-xb+1, c^2-xc+1, d^2-xd+1 不可能同时为零.因而 $x^3-2x=0$,解得 $x=0$ 或 $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$.

检验:

(1)把 $x=0$ 代入方程组 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=x$ 得,$a=c$,这与已知实数 a,b,c,d 互不相等矛盾.

(2)把 $x=\sqrt{2}$ 和 $a=1$ 代入方程组 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=x$ 得,$b=\sqrt{2}+1$, $c=-1$, $d=\sqrt{2}-1$.

(3)把 $x=-\sqrt{2}$ 和 $a=1$ 代入方程组 $a+\dfrac{1}{b}=b+\dfrac{1}{c}=c+\dfrac{1}{d}=d+\dfrac{1}{a}=x$ 得,$b=-\sqrt{2}+1$, $c=-1$, $d=-\sqrt{2}-1$.

$\therefore x=\sqrt{2}$ 或 $x=-\sqrt{2}$.

例 6 【2004 年全国联赛第二大题第 2 小题】

已知实数 a,b 满足 $a^3+b^3+3ab=1$,则 $a+b=$________.

解 设 $x=a+b$, $a^3+b^3+3ab=1$ 可化为 $x^3-3abx+3ab-1=0$.因式分解得,$(x-1)(x^2+x+1-3ab)=0$,得 $x=1$ 或 $x^2+x+1=3ab$.

把 $x=a+b$ 代入 $x^2+x+1=3ab$ 并配方整理得，$\frac{1}{2}[(a-b)^2+(a+1)^2+(b+1)^2]=0$，所以 $a=b=-1$，此时 $a+b=-2$.

因此，$a+b=1$ 或 $a+b=-2$.

例 7 【2004 年全国竞赛第 10 题】

实数 x,y,z 满足 $x+y+z=5$，$xy+yz+zx=3$，则 z 的最大值是________.

分析 利用一元二次方程的根与系数的关系，构造一个一元二次方程的两个实数根恰为 x,y. 根据判别式求 z 的范围.

解 方程组可化为：

$$\begin{cases}x+y=5-z\\ xy=3-z(x+y)=3-5z+z^2\end{cases},$$

即 x,y 是关于 w 的一元二次方程 $w^2-(5-z)w+(3-5z+z^2)=0$ 的两个根.

$\therefore \Delta=(5-z)^2-4\times(3-5z+z^2)=\left(z-\frac{13}{3}\right)(z+1)\geqslant 0$

$\therefore -1\leqslant z\leqslant \frac{13}{3}$.

$\therefore z$ 的最大值是 $\frac{13}{3}$.

例 8 【2005 年全国竞赛第 5 题】

设 a,b 是正整数，且满足 $56\leqslant a+b\leqslant 59$，$0.9<\frac{a}{b}<0.91$，则 b^2-a^2 等于（　　）.

A. 171　　B. 177　　C. 180　　D. 182

解 $\because 0.9<\frac{a}{b}<0.91$，$a,b$ 是正整数. $\therefore 0.9b<a<0.91b$.

$\because 56\leqslant a+b\leqslant 59$. $\therefore 1.9b=0.9b+b<a+b\leqslant 59$，$56\leqslant a+b<0.91b+b=1.91b$.

$\therefore 29\frac{61}{191}<b<31\frac{11}{19}$

$\because b$ 是正整数. $\therefore b=30$ 或 $b=31$.

当 $b=30$ 时，由 $0.9b<a<0.91b$，得 $27<a<27.3$，不存在这样的整数 a.

当 $b=31$ 时，由 $0.9b<a<0.91b$，得 $27.9<a<28.21$，由于 a 是整数，因此 $a=28$.

经检验，当 $a=28$、$b=31$ 时确实满足已知条件.

$\therefore a=28$，$b=31$. $\therefore b^2-a^2=177$，选 B.

说明 本题主要运用了不等式的放缩法. 由于运用放缩法将字母的范围扩大了，因此对所求字母的值必须检验.

例 9 【2005 年全国竞赛第 11 题】

8 个人乘速度相同的两辆小汽车同时赶往火车站，每辆车乘 4 人（不包括司机）. 其中一辆小汽车在距火车站 15 千米的地方出现故障，此时，距停止检票的时间还有 42 分钟. 这时唯一可利用的工具是另一辆小汽车，已知包括司机在内这辆车限乘 5 人，且这辆车的平均速度是 60 千米/小时，人步行的平均速度是 5 千米/小时. 试设计两种方案，通过计算说明这 8 个人能够在停止检票前赶到火车站.

解 方案一：当汽车出现故障时，乘这辆车的 4 人先下车步行，另一辆车把车内的 4 人送到某个地点后，让他们下车步行再立即返回接送先前步行的另外 4 人，使得这 8 个人同时到达

火车站.

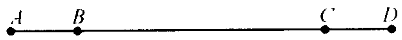

图 2-1

设点 A 为汽车发生故障处，点 D 为火车站，点 C 为第一批乘客下车点，点 B 为第二批乘客上车点. 第一批乘客步行的路程为 AB，在第一批乘客步行时汽车行驶的路线为：$A \to B \to C \to B$，路程为 $(2BC+AB)$；第二批乘客步行的路程为 CD，在第一批乘客步行时汽车行驶的路线为：$C \to B \to C \to D$，路程为 $(2BC+CD)$，由于两批乘客的步行速度一样，汽车的速度不变，因此，$AB=CD$. 设 $AB=x$，$BC=15-2x$. 由题意得，$\frac{x}{5}=\frac{2(15-2x)+x}{60}$，解得 $x=2$. 这 8 人从故障处出发到达火车站时所需时间为 $\frac{2}{5}+\frac{15-2}{60}=\frac{37}{60}$（小时），$\frac{37}{60}$ 小时 $=37$ 分 <42 分. 因此这个方案可行.

方案二：类似方案一，当汽车出现故障时，乘这辆车的 4 人先下车步行 1 千米后在原地候车，另一辆车把车内的 4 人送到离火车站 1 千米处让他们下车步行，再立即返回接送先前步行的另个 4 人. 每批乘客步行的时间：$\frac{1}{5}$ 小时；汽车从出发后离故障点 1 千米处至离火车站 1 千米处所需时间或离火车站 1 千米处返回至离故障点 1 千米处所需时间：$\frac{13}{60}$ 小时 $>\frac{1}{5}$ 小时；汽车行驶的时间：$\frac{14+13+14}{60}=\frac{41}{60}$（小时），$\frac{41}{60}$ 小时 $=41$ 分 <42 分.

因此这个方案可行.

说明：本题是利用解方程的形式设计行进方案. 由于要做到尽可能地节省时间，汽车在途中任意一点至多返回一次，在不乘车时尽量步行前进. 本题是目前流行的数学建模的一个实例，当然本题没有要求求最佳方案，而是要求设计两种不同的方案.

例 10 【2005 年全国联赛第三大题第 1 题】

设 a,b,c 为实数，$ac<0$，且 $\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c=0$，证明：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有大于 $\frac{3}{4}$ 而小于 1 的根.

解 由 $\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c=0$ 得，$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}b+c=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a$，

当 $x=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 时，$y_1=\frac{3}{5}a+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}b+c=\frac{3}{5}a-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}a=\frac{3-\sqrt{10}}{5}a\cdots\cdots$①，

当 $x=1$ 时，$y_2=a+b+c=a+b+c-\frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}a+\sqrt{3}b+\sqrt{5}c)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}c$，

由于 $3-\sqrt{10}<0$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$，$\sqrt{5}-\sqrt{3}>0$，$-ac>0$，所以

$$y_1y_2=\frac{3-\sqrt{10}}{5}a\left[\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}c\right]=\frac{(3-\sqrt{10})(\sqrt{2}-\sqrt{2})}{5\sqrt{3}}a^2-\frac{(3-\sqrt{10})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5\sqrt{3}}ac<0$$

因此，方程必有一个根大于 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ 而小于 1，而 $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}>\frac{3}{4}$，所以一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有大于 $\frac{3}{4}$ 而小于 1 的根.