21世纪大学数学精品教材

丛书主编　蔡光兴　戴明强

离散数学

方承胜　殷志祥　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪大学数学精品教材·

离散数学

方承胜　殷志祥　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科（本科 1 普通类和本科 2 一类）数学系列教材，体现了对数学精品的归纳及本套教材的精品特征，具有鲜明的特点，按照统一的指导思想组编而成.

离散数学是现代数学的重要分支，本书着重介绍集合论、代数系统、图论、数理逻辑四个方面的内容，分为四篇：第一篇为集合论部分，包括集合的基础知识、关系、函数等内容；第二篇为代数系统部分，包括代数系统的基本知识、群与环和域、格与布尔代数等内容；第三篇为图论部分，包括图论的基础知识、特殊图等内容；第四篇为数理逻辑部分，分别介绍命题逻辑与谓词逻辑的相关知识.

本书可作为高等院校理工科计算机专业及其相关专业的基础课程教材，也可作为教研工作者的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

离散数学/方承胜，殷志祥主编.—北京：科学出版社，2007
（21 世纪大学数学精品教材）
ISBN 978-7-03-019858-7

I.离… II.①方…②殷… III.离散数学－高等学校－教材 IV.O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 135606 号

责任编辑：王雨舸／责任校对：王望容
责任印制：高 嵘／封面设计：宝 典

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉嘉捷印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007 年 8 月第一次印刷 印张：17 1/2
印数：1—5 000 字数：330 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《21 世纪大学数学精品教材》丛书序

《21 世纪大学数学精品教材》为大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)数学系列教材,体现了对数学精品教材的归纳及本套教材的精品特征.

一、组编机构

丛书设组编委员会,编委由 12 所高校数学院系的负责人构成(按姓氏笔画):

王公宝　方承胜　江世宏　李逢高　杨鹏飞　时　宝　何　穗　张志军

欧贵兵　罗从文　周　勇　高明成　殷志祥　黄朝炎　蔡光兴　戴明强

丛书主编:

蔡光兴　戴明强

二、编写特点

1. 适用性

教材的适用性是教材的生命力所在,每本教材的篇幅结合绝大部分高等院校数学院系对课程学时数的要求.部分教材配有教学光盘,便于教学.

2. 先进性

把握教改、课改动态和学科发展前沿,反映学科、课程的先进理念、知识和方法.

3. 创新性

市场需求和市场变化决定教材创新需要,数学教学在知识创新、思维创新等方面负有责任,一定程度的创新使教材更具冲击力和影响力.

创新与继承相结合,是继承基础上的创新.

创新转变为参编者、授课者的思想和行为,达到文化融合.

4. 应用性

丛书的读者对象为应用型和研究应用型大学本科(本科 1 普通类和本科 2 一类)学生,应用性是数学学科和数学教学发展的新特点,或展现在教材内容结构上,或体现于某些章节,或贯穿于其中.

5. 教学实践性和系统性

教材具有可操作性,教师好教,学生好学,同时保持知识完整.二者发生矛盾

时，前者优先，不过分追求体系完整.

三、指导思想

《21世纪大学数学精品教材》大致可划分为两大类：基础知识类；方法与应用类.

1. 基础知识类

(1) 遵循高等院校教学指导委员会关于课程的教学基本要求，知识体系相对完整，结构严谨，内容精炼，循序渐进，推理简明，通俗易懂.

(2) 融入现代数学思想(如数学建模)，分别将 Mathematica、Matlab、SAS、SPS 等软件的计算方法，恰当地融入课程教学内容中，培养学生运用数学软件的能力.

(3) 强化学生的实验训练和动手能力，可将实验训练作为模块，列入附录，供教学选用或学生自学自练，使用者取舍也方便.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

2. 方法与应用类

(1) 融入现代数学思想和方法(如数学建模思想)，体现现代数学创新思维，着力培养学生运用现代数学工具(软件)的能力，使教材真正成为基于现代数学软件的、将数学软件融合到教材与教学内容的现代精品教材.

(2) 加强教学知识与内容的应用性，注重数学思想和方法的操作与应用及其实用性. 通过实例、训练、实验等各种方式，提高学生对数学知识、数学方法的应用能力及解决问题的能力.

(3) 强化学生的实验训练，通过完整的程序与实例介绍，教会学生分析问题、动手编程、分析结果，提高学生的实验操作水平、实际动手能力和创新能力.

(4) 教材章后均列出重要概念的英文词汇，布置若干道英文习题，要求学生用英文求解，以适应教育面向世界的需要，也为双语教学打下基础.

(5) 为使学生巩固知识和提高应用能力，章末列出习题，形式多样. 书后配测试题，书末提供解题思路或参考答案.

《21世纪大学数学精品教材》组编委员会

2006年9月

前　言

离散数学是现代数学的重要分支，它与计算机科学中的数据结构、操作系统、编译理论、算法分析等课程联系紧密，也是研究自动控制、管理科学、电子工程等的重要工具. 离散数学是理工科高等院校计算机专业及其相关专业的一门重要的基础课.

离散数学的内容十分丰富，原则上凡是以离散量为研究对象的数学均属于离散数学. 本书着重介绍集合论、代数系统、图论、数理逻辑等四个方面的内容，划分成相应的四篇. 第一篇(第 1～3 章)为集合论部分，包括集合的基础知识、关系、函数等内容；第二篇(第 4～6 章)为代数系统部分，包括代数系统的基本知识、群与环和域、格与布尔代数等内容；第三篇(第 7～8 章)为图论部分，包括图论的基础知识、特殊图等内容；第四篇(第 9～10 章)为数理逻辑部分，分别介绍命题逻辑与谓词逻辑的相关知识.

本书为《21 世纪大学数学系列精品教材》之一，在编写时严格遵循高等院校教学指导委员会关于离散数学课程的基本要求，力求知识体系的相对完整. 教材每章后列出重要概念的英文词汇，并布置了若干道英文习题，要求用英文求解. 为了巩固知识和提高应用能力，每章末配备了一定数量的习题，书末提供了解题思路或参考答案.

本书由方承胜、殷志祥任主编，严斌辉、李逢高任副主编. 第 1、10 章由方承胜编写，第 2、3 章由严斌辉编写，第 4、5 章由殷志祥编写，第 6 章由张家秀编写，第 7、8 章由王天虹编写，第 9 章由李逢高、雷勇、贺方超编写. 全书由方承胜统稿、定稿.

由于编者水平有限，不足之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者

2007 年 3 月

目　录

第一篇　集　合　论

第四篇　数理逻辑

第一篇 集 合 论

集合论是现代数学最基本的概念，已深入到各门科学和技术领域中. 集合的重要文献首先由康托尔(G Cantor) 在 19 世纪末发表的，他提出了关于基数、序数和良序集等理论，奠定了集合论的基础. 20 世纪初，策梅洛(Zermelo) 列出了第一个集合论的公理系统，人们在此基础上逐步形成了公理化集合论和抽象集合论. 对于计算机科学工作者来说，集合论的知识是不可缺少的. 在开关理论、有限自动机、形式语言等领域中，集合论有广泛的应用.

本篇介绍集合论的基础知识，如集合的运算、序偶、关系、函数、基数等.

第1章　集合及其表示

在本章中，我们将介绍集合与子集、幂集等基本概念，研究集合的交、并、补运算及其性质，还将介绍集合的计数，以及集合的划分和覆盖.

1.1　集合及其表示方法

1.1.1　集合的概念

在现代数学中集合的概念已被普遍采用. 但集合很难用别的词来定义. 一般地，把一些确定的彼此不同的具有某种特定性质的事物作为一个整体来考虑时，这个整体就称为一个集合. 组成集合的事物称为集合的元素或元. 例如，图书馆的藏书、全体中国人、自然数的全体、直线上的点等，均分别构成一个集合，它们的元素分别是：图书馆的每本书、每一个中国人、每一个自然数、直线上的每个点.

通常用大写英文字母 $A,B,X,Y,\cdots$ 表示集合的名称；用小写英文字母 $a,b,x,y,\cdots$ 表示组成集合的事物，即元素. 若元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$，亦称 A 包含 a，或 a 在 A 之中，或 a 是 A 的成员；若元素 a 不属于 A，记作 $a\notin A$，亦称 A 不包含 a，或 a 不在 A 中，或 a 不是 A 的成员. 一个集合，若其组成集合的元素是有限的，则称为有限集，否则就称为无限集.

几个常用集合的表示符号：

N　正整数或自然数集合 $(1,2,3,\cdots)$；

Z　整数集合 $(0,-1,1,-2,2,\cdots)$；

Q　有理数集合（有理数是可以表示成 p/q 形式的数，这里 p,q 都是整数，且 $q\neq 0$）；

R　实数集合（包括全部有理数和无理数）；

C　复数集合（复数是形如 $a+ib$ 的数，其中 a,b 是实数，$i=\sqrt{-1}$）.

1.1.2　集合的表示

表示集合有如下两种常用的方法：

(1) 将某集合的元素列举出来，称为列举法. 例如，$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2,3\}$，$D=\{$桌子，灯泡，自然数，老虎$\}$，$C=\{2,4,6,\cdots,2n\}$，$S=\{a,a^2,a^3\}$ 等.

(2) 通过说明集合 A 的元素具有性质 P 的形式. 其一般形式为

$$A = \{a \mid a \text{ 具有性质 } P\},$$

称为描述法. 例如,

$$A = \{x \mid x \text{ 是正奇数}\},$$
$$B = \{x \mid x \text{ 是中国的省}\},$$
$$C = \{x \mid x \text{ 是直线 } L \text{ 上的点}\}.$$

用描述法表示一个集合,其方法不是唯一的,因为描述集合的元素往往可以有多种不同的方法. 例如,集合$\{1,2,3,4\}$可表示为$\{a \mid a \in \mathbf{N}, a \leqslant 4\}$,也可表示为

$$\{a \mid a \in \mathbf{N}, a < 6, a \mid 12\}.$$

下面介绍一个特殊的集合.

定义 1-1 不包含任何元素的集合,称为空集,记为 $\varnothing$.

空集是一个很有用的概念,例如,$\{x \mid x^2 + 1 = 0, x \in \mathbf{R}\} = \varnothing$,即说明方程 $x^2 + 1 = 0$ 无实根.

1.1.3 集合的相等与包含

集合的相等与包含是集合之间的两个基本关系,两个集合相等是按照下述原理定义的.

外延性原理 两个集合是相等的,当且仅当它们有相同的元素.

两个集合 A 和 B 相等,记为 $A = B$;两个集合不相等,则记为 $A \neq B$. 例如

$$\{1,2,4\} = \{1,4,2\}.$$

集合的元素还可以允许是一个集合. 例如,$S = \{a, \{1,2\}, p, \{q\}\}$. 必须指出:$q \in \{q\}$,但 $q \notin S$,同理,$1 \notin S$. 又如:设 A 是小于 3 的自然数集合,即 $A = \{1,2,3\}$;又设代数方程 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 的所有根组成的集合为 B,则 B 正好也是$\{1,2,3\}$,因此这两个集合是相等的.

定义 1-2 设 A,B 是任意两个集合,假如 A 的每一个元素是 B 的成员,则称 A 为 B 的子集,或 A 包含在 B 内,或 B 包含 A. 记为 $A \subseteq B$. 或 $B \supseteq A$.

例如

$$A = \{1,2,3\}, \quad B = \{1,2\}, \quad C = \{1,3\}, \quad D = \{3\},$$

则 $B \subseteq A$,$C \subseteq A$,$D \subseteq A$,$D \subseteq C$.

根据子集的定义,显然有 $A \subseteq A$,称集合包含关系的自反性;$A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$,则有 $A \subseteq C$,称集合包含关系的传递性.

定理 1-1 集体 A 和集合 B 相等的充分必要条件是这两个集合互为子集.

证 设两集合 A,B 相等,则根据定义,它们有相同的元素. 故任取 $x \in A$,有 $x \in B$,即 $A \subseteq B$,同样也有 $B \subseteq A$.

反之,若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$,假设 $A \neq B$,则 A 与 B 的元素不完全相同. 设有某一元素 $x \in A$ 但 $x \notin B$,这与 $A \subseteq B$ 条件矛盾;或设某一元素 $x \in B$,但 $x \notin A$,这

就与 $B \subseteq A$ 条件矛盾. 故 A,B 的元素必须相同,即 $A = B$.

这个定理在证明两个集合相等时经常使用.

定义 1-3　如果集合 A 的每一个元素都属于 B,但集合 B 中至少有一个元素不属于 A,则称 A 为 B 的真子集,记为 $A \subset B$.

例如,整数集是有理数集的真子集,即 $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$.

因为空集是任何集合的子集,所以有以下的定理:

定理 1-2　空集是唯一的.

证　假设 $\varnothing_1, \varnothing_2$ 都是空集;则有 $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$,且 $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$,故 $\varnothing_1 = \varnothing_2$.

定义 1-4　给定集合 A,由集合 A 的所有子集为元素组成的集合,称为集合 A 的幂集,记为 2^A. 即 $2^A = \{S \mid S \subseteq A\}$.

例如,设 $A = \{a,b,c\}$,则

$$2^A = \{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}.$$

定理 1-3　如果有限集合 A 有 n 个元素,则其幂集 2^A 有 2^n 个元素.

证　A 的所有由 k 个元素组成的子集的个数为从 n 个元素中取 k 个的组合数,其个数为

$$\mathrm{C}_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad (k = 1,2,\cdots,n).$$

另外,因 $\varnothing \subseteq A$,故 2^A 的元素的总数 N 可表示为

$$N = 1 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots \mathrm{C}_n^k + \cdots \mathrm{C}_n^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k,$$

由二项式定理可知

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k y^{n-k}.$$

令 $x = y = 1$,就有 $2^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k$. 故 2^A 的元素个数是 2^n.

我们引进一种编码,用来表示有限集幂集的元素,现先以上面 $A = \{a,b,c\}$ 这个集合为例进行说明,它的幂集可以表示为

$$2^A = \{S_i \mid i \in B\}, \quad 其中\ B = \{i \mid i\ 是二进制数且\ 000 \leqslant i \leqslant 111\}.$$

即 $2^A = \{S_{000}, S_{010}, \cdots, S_{111}\}$.

而 $S_{011} = \{b,c\}, S_{111} = \{a,b,c\}$ 等,也可用 $0 \sim 7$ 的十进制数作为集下标,只将相应二进制数转化十进制数即可,如 $S_{011} = S_3, S_{111} = S_7$.

一般地,对有 n 个元素的集合 A,有 $2^A = \{S_0, S_1, \cdots, S_{2^n-1}\}$,即

$$2^A = \{S_i \mid i \in B\},$$

其中

$$B = \{i\ 是二进制数且\ \overbrace{00\cdots0}^{n} \leqslant i \leqslant \overbrace{11\cdots1}^{n}\}.$$

1.2 集合的运算

集合的运算，就是以给定集合对象，按确定的规则得到另外一些与给定集合有关的集合. 集合的运算有交、并、补、差等，下面我们依次介绍，并研究这些运算的性质.

讨论集合的运算之前，我们先引进一个特殊的集合，它包含我们讨论中的每个集合.

如果一个集合包含了某个问题中所讨论的一切集合均为某一集合，则称该集合该问题的全集，记为 E.

全集 E 并不是唯一的，我们一般取一个较方便的集合为全集. 例如，若我们在实数范围内讨论问题，可取实数集 R 作为全集 E.

1.2.1 集合的交

定义 1-5 设任意两个集合 A 和 B，既在集合 A 中又在集合 B 的元素组成的集合，称为 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\ 且\ x\in B\}.$$

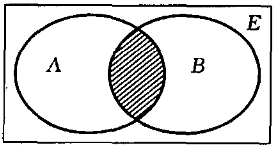

图 1-1

交集可以用图 1-1 阴影部分表示.

例 1.1 $A=\{2,4,6,8,10\}$, $B=\{1,2,3,4,5,6\}$，则

$$A\cap B=\{2,4,6\}.$$

例 1.2 设 A 是所有被 k 除尽的整数的集合，B 是所有被 l 除尽的整数集合，则 $A\cap B$ 是被 k 与 l 最小公倍数除尽的整数的集合.

集合的交运算有下列性质：

(1) $A\cap A=A$;

(2) $A\cap\varnothing=\varnothing$;

(3) $A\cap E=A$;

(4) $A\cap B=B\cap A$;

(5) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

性质(1) ～ (4) 证明很容易，请读者自己完成，现证明性质(5)：

证 因为

$$\begin{aligned}(A\cap B)\cap C&=\{x\mid x\in A\cap B\ 且\ x\in C\}\\&=\{x\mid x\in A\ 且\ x\in B\ 且\ \in B\}.\end{aligned}$$

又

$$A \cap (B \cap C) = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \cap C\}$$
$$= \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \text{ 且 } \in B\}.$$

因此，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$. 此式称为集合交的结合律.

此外，从交的定义还可以得到 $A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$.

若集合 A，B 没有共同的元素，则可写为 $A \cap B = \varnothing$，此时亦称 A 与 B 不相交.

性质(5) 说明集合交的运算满足结合律，故有限个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交可记为

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

1.2.2　集合的并

定义 1-6　设任意两个集合 A 和 B，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为 A 和 B 的并集，记为 $A \cup B$. 即

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

并集可用图 1-2 阴影部分表示.

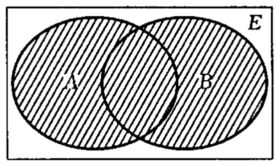

图 1-2

例如，设 $A = \{1,2,4\}$，$B = \{2,4,5,6\}$，则

$$A \cup B = \{1,2,4,5,6\}.$$

集合并的运算具有以下性质：

(1) $A \cup A = A$;

(2) $A \cup E = E$;

(3) $A \cup \varnothing = A$;

(4) $A \cup B = B \cup A$;

(5) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

性质(1) ~ (5) 证明请读者自己完成.

此外，从集合并的定义还可以得到

$$A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B.$$

性质(5) 说明集合的并运算也满足结合律，故对于有限个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并可记为

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i.$$

定理 1-4　设 A，B，C 为 3 个集合，则下列分配律成立：

(1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

(2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

证　(1) 若 $x \in A \cap (B \cup C)$，则 $x \in A$ 且 $x \in B \cup C$. 即 $x \in A$ 且 $x \in B$，或 $x \in A$ 且 $x \in C$；也即 $x \in A \cap B$ 或 $x \in A \cap C$；亦即 $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C)$，所以