全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

阙树福 编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

阙树福　编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学/阙树福编．—北京：中国农业出版社，
2006.8
全国高等农林院校“十一五”规划教材
ISBN 7-109-09818-4

Ⅰ．高…　Ⅱ．阙…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材
Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第093997号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路2号）
（邮政编码 100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑　朱　雷

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行
2006年8月第1版　　2006年8月北京第1次印刷

开本：820mm×1080mm　1/16　　印张：25
字数：600千字
定价：40.00元
（凡本版图书出现印刷、装订错误，请向出版社发行部调换）

内 容 提 要

全书共分七章，内容包括：函数、极限和连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分学，无穷级数。每章中包含若干节，每节均附有习题，每章末附有综合练习题。习题及综合练习题的计算题部分均给出答案，供读者参考。此外，本书还有两个附录：附录Ⅰ，基本初等函数的图形及性质，以表的形式列出；附录Ⅱ，积分表。以供读者查阅。

本书可作为高等院校农林、经济类或管理类专业高等数学课程的教材或教学参考用书。

前　言

高等数学作为高等院校各专业的一门基础课，其重要性不言而喻。各专业对高等数学的教学大纲规定有所不同，本书结合编者多年的数学教学实践经验，针对高等学校农林类、经济类、管理类专业的需要编写而成。对高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的阐述力求严谨简明、详略适当。

本书共七章，每节后附有习题。每章末附有综合题，供读者检查对本章知识的掌握情况。

本书按高等院校农林类、经济类、管理类专业对高等数学课程大纲的要求，基本内容均覆盖到，可作为高等院校农林类、经济类、管理类专业学生的教材，教师可根据不同专业特点进行适当取舍。

在编写过程中，与编者长期一起从事数学教学的陈同英教授、张朝阳、温永仙、姜永、陈绩馨副教授及李德新老师，提供了许多宝贵意见和建议，并给予无私的帮助，在此谨表诚挚的谢意。

由于编者水平有限，难免存在不足之处。敬请使用本书的教师和读者们不吝批评指正。

编　者

2006年夏

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一章　函数、极限和连续

函数是数学中最重要的概念之一，也是高等数学分析研究的主要对象. 极限是初等数学与高等数学的接壤部分，极限的概念是高等数学最基本的概念. 本章在介绍函数的基础上，学习极限的概念、连续函数的概念与性质等，为以后各章的学习奠定基础.

第一节　函　　数

一、函数的概念

在客观世界中，往往同时有几个变量共同变化着. 但这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互有联系，遵循一定的规律变化着. 例如，如图 1-1，在 O 处有一个质点，起始时刻是静止的，在重力的作用下开始下落，设经过时间 t 后它落到 P 点，下落的距离 $s=|OP|$，显然 s 由 t 唯一确定，且随 t 的变化而变化. 经过两个世纪左右的探索，伽利略先是猜想，后通过做小球在斜板上滚动的实验，确定了

$$s=ct^2.$$

其中，c 是一个常数，对在同一地点接近地球表面真空中下落的一切物体具有相同的值. 经过精确的实验，测得 $c=\frac{1}{2}g$，其中 $g\approx 9.81\ \mathrm{m/s^2}$，它表示重力作用下自由落体的加速度，所以

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

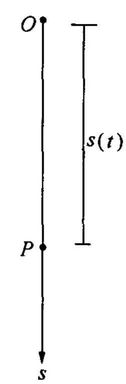

图 1-1

这里 $t\geqslant 0$，$s\geqslant 0$，s 与 t 之间的关系就是函数关系. 现在我们来给出函数的定义.

定义 1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),$$

数集 D 称为函数的定义域，x 称为自变量，y 称为因变量.

定义中的 f 反映自变量 x 与因变量 y 的对应法则，对应法则还可以用 F、g、φ、h 等记号表示，这时的函数就记为 $F(x)$、$g(x)$、$\varphi(x)$、$h(x)$ 等，有时为简化符号，也将 y 是 x 的函数记为 $y=y(x)$，等号左边的 y 是因变量，等号右边的 y 是对应法则.

对于自变量 x 在定义域内每取一个值，因变量 y 有且只有一个值与它对应，这类函数称为**单值函数**. 我们还会遇到另一种情况，即当自变量 x 在定义域内任取一个确定的值时，因变量 y 有多个值与它对应，这类函数称为**多值函数**.

例如，$y=\arcsin x$ 是多值函数，而对于 $y=\arcsin x$ 规定 $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$时就变成了单值函数.

以后凡是没有特别说明时，函数都是指单值函数.

1. 值域

若自变量 x 取某一数值 x_0 时，函数 $y=f(x)$ 有确定的值与它相对应，则称函数在 x_0 有定义. 当 x 取数值 $x_0\in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的函数值，记为

$$f(x_0)、y\,|_{x=x_0} \text{ 或 } y=y_0.$$

当 x 取遍 D 的每一个数值时，对应的函数值的全体组成的数集

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$ 的值域.

2. 确定函数的要素

函数定义中涉及定义域 D、对应法则 f 和值域 W. 若定义域 D 和对应法则 f 确定了，则这个函数的值域 W 就确定了. 因此，定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素. 至于自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的. 当两个函数的定义域和对应法则相同时，这两个函数就是相同的，例如，$y=2x+1$ 与 $z=2t+1$ 是相同的函数；而 $f(x)=2\lg x$ 是定义在 $(0,\ +\infty)$ 上的函数关系，$g(x)=\lg x^2$ 是定义在 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ 上的函数关系，因此，$f(x)=2\lg x$ 与 $g(x)=\lg x^2$ 是定义域不同的两个不同的函数.

3. 函数定义域的确定

在实际问题中，函数的定义域就是使实际问题有意义的自变量的值的全体. 如前所述，设质点落地的时刻为 T，则 s 与 t 的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2.$$

它的定义域为 $[0,\ T]$.

在数学问题中，函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的值的全体. 例如，函数 $f(x)=\lg(1-x)$ 的定义域是 $D=(-\infty,\ 1)$. $f(x)=\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{x-1}+\ln(x+3)$ 的定义域是 $D=(-3,\ 1)\cup(1,\ 4]$.

4. 邻域

为了阐述函数的局部性态，还经常用到邻域的概念，它是由某点附近的所有的点组成的集合.

设 a 是任一实数，以点 a 为中心的任何一个开区间称为点 a 的一个邻域，记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数，则开区间 $(a-\delta,\ a+\delta)$ 是点 a 的一个邻域（图 1-2），称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\ \delta)$，点 a 称为这邻域的中心，δ 称为这邻域的半径，所以

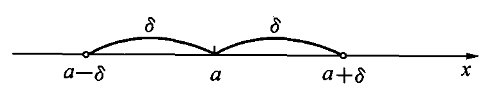

图 1-2

$$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x\mid |x-a|<\delta\}.$$

它表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的**去心 δ 邻域**，记为 $\hat{U}(a,\delta)$. 所以

$$\hat{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

这里 $0<|x-a|$ 就表示 $x\neq a$.

为了说明函数在点的一侧附近的情况，还要用到左、右邻域的概念.

开区间 $(a-\delta,\ a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，$(a,\ a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域，a 的任意一个左（右）δ 邻域简称为 a 的左（右）邻域.

5. 函数的表示法

表示函数的方法通常有三种：图像法、列表法、解析法. 用得较多的是解析法，除此以外，有时还直接用语句来反映一个函数. 用解析法表示函数，也是多种多样的，如分段表示法、参数表示法和方程表示法等等.

下面着重介绍一下分段函数，如：函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & 当\ x\geqslant 0,\\ -x, & 当\ x<0,\end{cases}$（图 1-3）称为绝对值函数. 表示当 x 取不同区间内的数值时，函数用不同的式子来表示. 当 $x=1>0$ 时，由 $f(x)=x$ 计算得到 $f(1)=1$；当 $x=-2<0$ 时，由 $f(x)=-x$ 计算得到 $f(-2)=2$.

像这样的一个函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数，通常称为分段函数.

例 1　函数 $f(x)=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & 当\ x>0\ 时\\ 0, & 当\ x=0\ 时\\ -1, & 当\ x<0\ 时\end{cases}$ 称为符号函数. 它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,\ 0,\ 1\}$，它的图形如图 1-4 所示. 对于任何实数 x，下列关系成立：

$$x=\operatorname{sgn} x\cdot|x|.$$

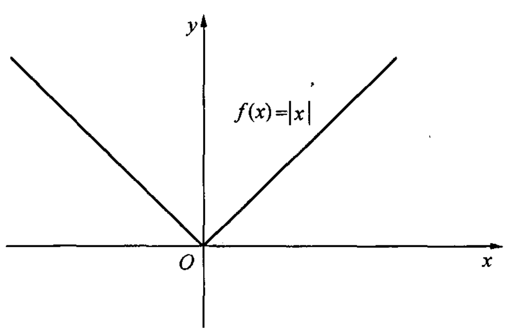

图 1-3

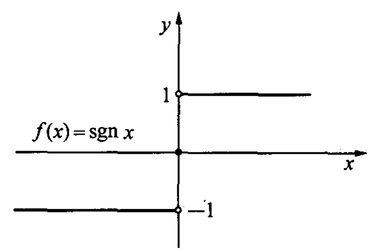

图 1-4

从图 1-3 和图 1-4 可看出，分段函数的图形是由若干段曲线组成的，各曲线可能相连接，也可能断开.

例 2　设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记为 $[x]$，如 $\left[\frac{1}{3}\right]=0$，$[\sqrt{3}]=1$，$[-\pi]=-4$，$[2]=2$. 若把 x 看成变量，则函数

$$f(x)=[x]$$

的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$. 值域 $W=\mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-5 所示，这个图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，这个函数也是分段函数，称为取整函数.

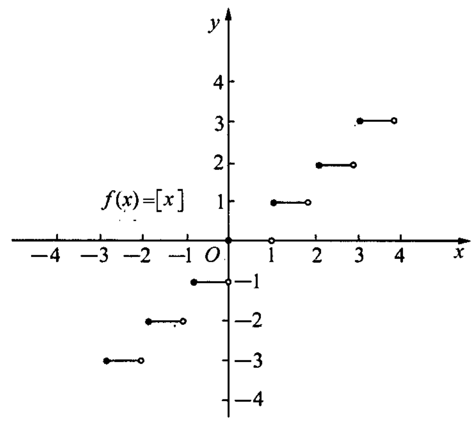

图 1-5

又如邮资的计费办法、个人所得税的收取办法等都是用分段函数表示.

注意：(1) 分段函数是用几个式子合在一起来表示一个函数，而不是表示几个函数；

(2) 它的定义域是各个表示式的定义域的并集；

(3) 求自变量为 x_0 的函数值时，先要看 x_0 属于哪个表示式的定义域，然后按这个表示式计算 x_0 所对应的函数值.

二、函数的性质

函数的性质主要包括：奇偶性、单调性、周期性和有界性. 这在初等数学中已讲过，以下着重阐述函数的有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $I\subset D$. 如果存在数 K_1，使得

$$f(x)\leqslant K_1$$

对任一 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界，而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界. 如果存在数 K_2，使得

$$f(x)\geqslant K_2$$

对任一 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界，而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界. 如果存在正数 M，使得

$$|f(x)|\leqslant M$$

对任一 $x\in I$ 都成立，则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

显然，$f(x)$ 在 I 上有界，使上述不等式成立的常数 M 不是唯一的，如 $M+2$，$3M$ 等等都是可以的. 有界性体现在常数 M 的存在性. 如果这样的 M 不存在，也就是说无论 M 取得多么大，总存在某一个 $x\in I$ 使得 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界，那么它的图形是介于两条平行线 $y=M_1$，$y=M_2$ 之间，如图 1-6 所示.

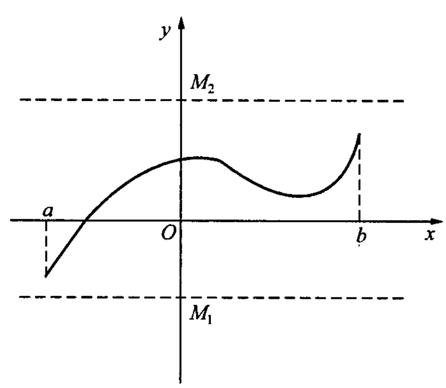

图 1-6

例 3 函数 $f(x)=\sin x$，对于任意 $x\in(-\infty, +\infty)$，有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以它是有界函数.

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com