

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

阙树福 编

 中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学

阙树福 编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学/阙树福编. —北京: 中国农业出版社,
2006. 8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 7-109-09818-4

I. 高... II. 阙... III. 高等数学-高等学校-教材

IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2006) 第 093997 号

中国农业出版社出版

(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)

(邮政编码 100026)

出版人: 傅玉祥

责任编辑 朱 雷

北京通州皇家印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行

2006 年 8 月第 1 版 2006 年 8 月北京第 1 次印刷

开本: 820mm×1080mm 1/16 印张: 25

字数: 600 千字

定价: 40.00 元

(凡本版图书出现印刷、装订错误, 请向出版社发行部调换)

内 容 提 要

全书共分七章，内容包括：函数、极限和连续，一元函数微分学，一元函数积分学，微分方程，空间解析几何与向量代数，多元函数微积分学，无穷级数。每章中包含若干节，每节均附有习题，每章末附有综合练习题。习题及综合练习题的计算题部分均给出答案，供读者参考。此外，本书还有两个附录：附录 I，基本初等函数的图形及性质，以表的形式列出；附录 II，积分表。以供读者查阅。

本书可作为高等院校农林、经济类或管理类专业高等数学课程的教材或教学参考用书。

前 言

高等数学作为高等院校各专业的一门基础课，其重要性不言而喻。各专业对高等数学的教学大纲规定有所不同，本书结合编者多年的数学教学实践经验，针对高等学校农林类、经济类、管理类专业的需要编写而成。对高等数学的基本概念、基本理论和基本方法的阐述力求严谨简明、详略适当。

本书共七章，每节后附有习题。每章末附有综合题，供读者检查对本章知识的掌握情况。

本书按高等院校农林类、经济类、管理类专业对高等数学课程大纲的要求，基本内容均覆盖到，可作为高等院校农林类、经济类、管理类专业学生的教材，教师可根据不同专业特点进行适当取舍。

在编写过程中，与编者长期一起从事数学教学的陈同英教授、张朝阳、温永仙、姜永、陈绩馨副教授及李德新老师，提供了许多宝贵意见和建议，并给予无私的帮助，在此谨表诚挚的谢意。

由于编者水平有限，难免存在不足之处。敬请使用本书的教师和读者们不吝批评指正。

编 者

2006 年夏

目 录

前言

第一章 函数、极限和连续	1
第一节 函数	1
一、函数的概念	1
二、函数的性质	4
三、反函数	5
四、复合函数	7
五、基本初等函数和初等函数	7
六、模型举例	8
习题 1-1	9
第二节 数列的极限	10
一、问题的提出	10
二、数列的极限	11
习题 1-2	16
第三节 函数的极限	17
一、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限	17
二、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $y=f(x)$ 的极限	19
三、函数极限的性质	23
习题 1-3	25
第四节 无穷小量和无穷大量	26
一、无穷小量	26
二、无穷大量	28
习题 1-4	30
第五节 极限的运算法则 两个重要极限	31
一、极限的运算法则	31
二、两个重要极限	35
习题 1-5	40
第六节 无穷小量的比较	41
习题 1-6	43

第七节 函数的连续性	43
一、函数连续的概念	43
二、函数的间断点	46
习题 1-7	49
第八节 连续函数的运算	50
一、连续函数的四则运算	50
二、反函数的连续性	50
三、复合函数的连续性	51
四、初等函数的连续性	52
习题 1-8	53
第九节 闭区间上连续函数的性质	54
习题 1-9	56
综合练习题一	56
第二章 一元函数微分学	58
第一节 导数的概念	58
一、引例	58
二、导数的定义	59
三、用导数的定义求导数	61
四、导数的几何意义	63
五、函数的可导性与连续性之间的关系	63
习题 2-1	65
第二节 求导法则	66
一、函数和、差、积、商的求导法则	66
二、复合函数的求导法则	68
三、反函数的导数	70
四、高阶导数	74
五、隐函数的导数	77
六、由参数方程所确定的函数的导数	79
习题 2-2	81
第三节 函数的微分	84
一、微分的概念	84
二、微分的基本公式及运算法则	87
三、微分的应用	89
习题 2-3	92
第四节 中值定理	93
一、罗尔 (Rolle) 定理	93

二、拉格朗日 (Lagrange) 中值定理	94
三、柯西 (Cauchy) 中值定理	96
习题 2-4	98
第五节 罗必塔法则	98
一、 $\frac{0}{0}$ 和 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的极限	98
二、其他类型未定式的极限	100
习题 2-5	102
第六节 函数的单调性与极值	103
一、函数的单调性及其判别法	103
二、函数的极值	105
三、最大值与最小值	108
习题 2-6	110
第七节 曲线的凹凸性及函数图形的描绘	111
一、曲线的凹凸性与拐点	112
二、曲线的渐近线	114
三、函数图形的描绘	115
习题 2-7	117
第八节 微分学应用实例	117
一、边际分析	117
二、弹性分析	119
三、成本与利润的最佳化	121
习题 2-8	122
综合练习题二	122
第三章 一元函数积分学	126
第一节 不定积分的概念及其性质	126
一、原函数和不定积分的概念	126
二、不定积分的基本性质	128
三、基本积分公式	128
习题 3-1	130
第二节 定积分的概念和性质	131
一、两个引例	131
二、定积分的定义	133
三、定积分的几何意义	134
四、定积分的性质	135
习题 3-2	138

第三节 微积分基本公式	138
一、积分上限的函数及其导数	139
二、牛顿—莱布尼兹公式	140
习题 3-3	144
第四节 换元积分法	145
一、第一类换元法	145
二、第二类换元法	151
三、定积分的换元法	157
习题 3-4	160
第五节 分部积分法	163
一、不定积分的分部积分法	163
二、定积分的分部积分法	167
习题 3-5	169
第六节 广义积分	170
一、无限区间上的广义积分	170
二、有无穷间断点的广义积分	173
习题 3-6	175
第七节 定积分的应用	175
一、定积分的元素法	176
二、定积分在几何上的应用	177
三、定积分在物理和经济上的应用	181
习题 3-7	186
综合练习题三	188
第四章 微分方程	192
第一节 微分方程的基本概念	192
习题 4-1	194
第二节 一阶微分方程	194
一、可分离变量的一阶微分方程	195
二、一阶齐次微分方程	203
习题 4-2	204
第三节 一阶线性微分方程	205
习题 4-3	211
第四节 几种可降阶的二阶微分方程	212
一、 $y^{(n)}=f(x)$ 型的微分方程	212
二、 $y''=f(x, y')$ 型的微分方程	212
三、 $y''=f(y, y')$ 型的微分方程	213

习题 4-4	216
第五节 二阶常系数线性微分方程	216
一、二阶常系数齐次线性微分方程	216
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	220
习题 4-5	225
第六节 差分方程	226
一、差分与差分方程的基本概念	226
二、一阶常系数线性差分方程	228
三、二阶常系数线性差分方程	229
四、差分方程在经济中的应用	232
习题 4-6	233
综合练习题四	234
第五章 空间解析几何与向量代数	236
第一节 空间直角坐标系	236
一、空间点的直角坐标	236
二、点的坐标	236
三、空间两点间的距离	237
习题 5-1	238
第二节 曲面及其方程	238
一、曲面方程的概念	238
二、空间中的平面及其方程	239
三、球面	240
四、柱面	240
五、旋转曲面	241
六、二次曲面	242
习题 5-2	244
第三节 空间曲线及其方程	245
一、空间曲线的一般方程	245
二、空间曲线的参数方程	246
三、空间曲线在坐标面上的投影	246
习题 5-3	248
第四节 向量及其线性运算	248
一、向量的概念	248
二、向量的加减法	249
三、向量与数的乘法	250
习题 5-4	251

第五节 向量的坐标	251
一、向量的分解与向量的坐标	251
二、向量线性运算的坐标表示法	252
三、向量的模与方向余弦的坐标表示式	253
四、向量在坐标轴上的投影与向量的坐标	254
习题 5-5	255
第六节 向量的数量积 向量积	255
一、两向量的数量积	256
二、两向量的向量积	257
习题 5-6	259
第七节 平面及其方程	260
一、平面的点法式方程	260
二、平面的一般式方程	261
三、两平面的夹角	262
四、点到平面的距离	263
习题 5-7	264
第八节 空间直线及其方程	264
一、空间直线的点向式方程与参数式方程	264
二、空间直线的一般式方程	265
三、两直线的夹角	266
四、直线与平面的夹角	267
五、直线与平面的交点	267
六、点在直线或平面上的投影	268
习题 5-8	268
综合练习题五	269
第六章 多元函数微积分学	271
第一节 多元函数	271
一、区域	271
二、多元函数的概念	273
三、多元函数的极限	275
四、多元函数的连续性	276
习题 6-1	277
第二节 偏导数与全微分	278
一、偏导数	278
二、高阶偏导数	281
三、全微分	282

习题 6-2	285
第三节 多元复合函数与隐函数的求导法	286
一、多元复合函数的求导法	286
二、隐函数的求导法	291
习题 6-3	294
第四节 多元函数的极值	295
一、多元函数的极值概念及求法	296
二、多元函数的最大值与最小值的应用	297
三、条件极值·拉格朗日乘数法	298
习题 6-4	301
第五节 二重积分的概念和性质	301
一、二重积分的概念	301
二、二重积分的性质	303
习题 6-5	304
第六节 二重积分的计算	305
一、利用直角坐标计算二重积分	305
习题 6-6 (1)	312
二、利用极坐标计算二重积分	313
三、二重积分的一般变量替换	316
习题 6-6 (2)	318
综合练习题六	320
第七章 无穷级数	322
第一节 常数项级数的概念与性质	322
一、常数项级数的概念	322
二、级数收敛的必要条件	324
三、收敛级数的基本性质	324
习题 7-1	326
第二节 数项级数的审敛法	326
一、正项级数及其审敛法	326
习题 7-2 (1)	331
二、交错级数及其审敛法	332
三、绝对收敛与条件收敛	334
习题 7-2 (2)	336
第三节 幂级数	336
一、函数项级数的概念	336
二、幂级数及其收敛性	337

三、幂级数的运算及其性质	340
习题 7-3	342
第四节 函数展开成幂级数	343
一、泰勒级数	343
二、函数展开成幂级数的条件	344
三、初等函数间接展开成幂级数	346
四、欧拉公式	349
习题 7-4	350
综合练习题七	351
习题与综合练习题参考答案	353
附录 I 基本初等函数的图形及性质	375
附录 II 积分表	378
参考书目	386

第一章 函数、极限和连续

函数是数学中最重要的概念之一，也是高等数学分析研究的主要对象。极限是初等数学与高等数学的接壤部分，极限的概念是高等数学最基本的概念。本章在介绍函数的基础上，学习极限的概念、连续函数的概念与性质等，为以后各章的学习奠定基础。

第一节 函 数

一、函数的概念

在客观世界中，往往同时有几个变量共同变化着。但这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互有联系，遵循一定的规律变化着。例如，如图 1-1，在 O 处有一个质点，起始时刻是静止的，在重力的作用下开始下落，设经过时间 t 后它落到 P 点，下落的距离 $s = |OP|$ ，显然 s 由 t 唯一确定，且随 t 的变化而变化。经过两个世纪左右的探索，伽利略先是猜想，后通过做小球在斜板上滚动的实验，确定了

$$s = ct^2.$$

其中， c 是一个常数，对在同一地点接近地球表面真空中下落的一切物体具有相同的值。经过精确的实验，测得 $c = \frac{1}{2}g$ ，其中 $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ ，它表示重力作用下自由落体的加速度，所以

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

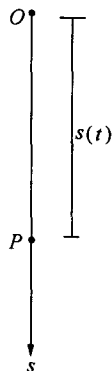


图 1-1

这里 $t \geq 0$ ， $s \geq 0$ ， s 与 t 之间的关系就是函数关系。现在我们来给出函数的定义。

定义 1 设有两个变量 x 和 y ， D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x \in D$ ，变量 y 按照一定法则总有一个确定的数值和它对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y = f(x),$$

数集 D 称为函数的定义域， x 称为自变量， y 称为因变量。

定义中的 f 反映自变量 x 与因变量 y 的对应法则，对应法则还可以用 F 、 g 、 φ 、 h 等记号表示，这时的函数就记为 $F(x)$ 、 $g(x)$ 、 $\varphi(x)$ 、 $h(x)$ 等，有时为简化符号，也将 y 是 x 的函数记为 $y = y(x)$ ，等号左边的 y 是因变量，等号右边的 y 是对应法则。

对于自变量 x 在定义域内每取一个值，因变量 y 有且只有一个值与它对应，这类函数称为单值函数。我们还会遇到另一种情况，即当自变量 x 在定义域内任取一个确定的值时，因变量 y 有多个值与它对应，这类函数称为多值函数。

例如, $y = \arcsin x$ 是多值函数, 而对于 $y = \arcsin x$ 规定 $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时就变成了单值函数.

以后凡是没有特别说明时, 函数都是指单值函数.

1. 值域

若自变量 x 取某一数值 x_0 时, 函数 $y = f(x)$ 有确定的值与它相对应, 则称函数在 x_0 有定义. 当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时, 与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的函数值, 记为

$$f(x_0), y|_{x=x_0} \text{ 或 } y = y_0.$$

当 x 取遍 D 的每一个数值时, 对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

2. 确定函数的要素

函数定义中涉及定义域 D 、对应法则 f 和值域 W . 若定义域 D 和对应法则 f 确定了, 则这个函数的值域 W 就确定了. 因此, 定义域 D 和对应法则 f 是确定函数的两个要素. 至于自变量和因变量用什么字母表示是无关紧要的. 当两个函数的定义域和对应法则相同时, 这两个函数就是相同的, 例如, $y = 2x + 1$ 与 $z = 2t + 1$ 是相同的函数; 而 $f(x) = 2\lg x$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数关系, $g(x) = \lg x^2$ 是定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数关系, 因此, $f(x) = 2\lg x$ 与 $g(x) = \lg x^2$ 是定义域不同的两个不同的函数.

3. 函数定义域的确定

在实际问题中, 函数的定义域就是使实际问题有意义的自变量的值的全体. 如前所述, 设质点落地的时刻为 T , 则 s 与 t 的函数关系是

$$s = \frac{1}{2}gt^2.$$

它的定义域为 $[0, T]$.

在数学问题中, 函数的定义域就是使函数表达式有意义的自变量的值的全体. 例如, 函数

$f(x) = \lg(1-x)$ 的定义域是 $D = (-\infty, 1)$. $f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-1} + \ln(x+3)$ 的定义域是 $D = (-3, 1) \cup (1, 4]$.

4. 邻域

为了阐述函数的局部性态, 还经常用到邻域的概念, 它是由某点附近的所有的点组成的集合.

设 a 是任一实数, 以点 a 为中心的任何一个开区间称为点 a 的一个邻域, 记作 $U(a)$.

设 δ 是任一正数, 则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 是点 a 的一个邻域 (图 1-2), 称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 点 a 称为这邻域的中心, δ 称为这邻域的半径, 所以

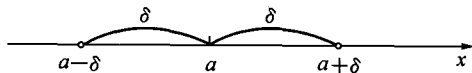


图 1-2

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\} = \{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

它表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉.

点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后, 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记为 $\hat{U}(a, \delta)$. 所以

$$\hat{U}(a, \delta) = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) = \{x | 0 < |x - a| < \delta\}.$$

这里 $0 < |x - a|$ 就表示 $x \neq a$.

为了说明函数在点的一侧附近的情况, 还要用到左、右邻域的概念.

开区间 $(a - \delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, $(a, a + \delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域, a 的任意一个左(右) δ 邻域简称为 a 的左(右)邻域.

5. 函数的表示法

表示函数的方法通常有三种: 图像法、列表法、解析法. 用得较多的是解析法, 除此以外, 有时还直接用语句来反映一个函数. 用解析法表示函数, 也是多种多样的, 如分段表示法、参数表示法和方程表示法等等.

下面着重介绍一下分段函数, 如: 函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0, \\ -x, & \text{当 } x < 0, \end{cases}$ (图 1-3) 称为绝对值

函数. 表示当 x 取不同区间内的数值时, 函数用不同的式子来表示. 当 $x = 1 > 0$ 时, 由 $f(x) = x$ 计算得到 $f(1) = 1$; 当 $x = -2 < 0$ 时, 由 $f(x) = -x$ 计算得到 $f(-2) = 2$.

像这样的函数要用几个式子表示. 这种在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 通常称为分段函数.

例 1 函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时} \end{cases}$ 称为符号函数. 它的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 它的图形如图 1-4 所示. 对于任何实数 x , 下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

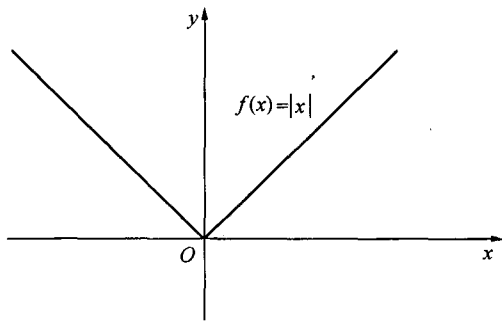


图 1-3

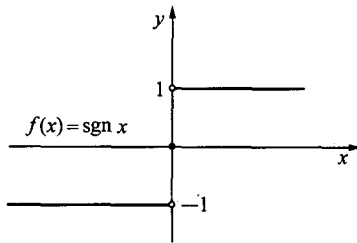


图 1-4

从图 1-3 和图 1-4 可看出, 分段函数的图形是由若干段曲线组成的, 各曲线可能相连接, 也可能断开.

例 2 设 x 为任一实数, 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记为 $[x]$, 如 $[\frac{1}{3}] = 0$, $[\sqrt{3}] = 1$, $[-\pi] = -4$, $[2] = 2$. 若把 x 看成变量, 则函数

$$f(x) = [x]$$

的定义域 $D = (-\infty, +\infty)$. 值域 $W = \mathbf{Z}$. 它的图形如图 1-5 所示, 这个图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数处, 图形发生跳跃, 跃度为 1, 这个函数也是分段函数, 称为取整函数.

又如邮资的计费办法、个人所得税的收取办法等都是用分段函数表示.

注意: (1) 分段函数是用几个式子合在一起来表示一个函数, 而不是表示几个函数;

(2) 它的定义域是各个表示式的定义域的并集;

(3) 求自变量为 x_0 的函数值时, 先要看 x_0 属于哪个表示式的定义域, 然后按这个表示式计算 x_0 所对应的函数值.

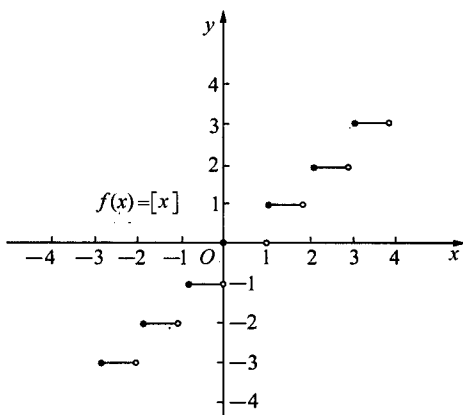


图 1-5

二、函数的性质

函数的性质主要包括: 奇偶性、单调性、周期性和有界性. 这在初等数学中已讲过, 以下着重阐述函数的有界性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $I \subset D$. 如果存在数 K_1 , 使得

$$f(x) \leq K_1$$

对任一 $x \in I$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上有上界, 而 K_1 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个上界. 如果存在数 K_2 , 使得

$$f(x) \geq K_2$$

对任一 $x \in I$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上有下界, 而 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 I 上的一个下界. 如果存在正数 M , 使得

$$|f(x)| \leq M$$

对任一 $x \in I$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 I 上有界.

显然, $f(x)$ 在 I 上有界, 使上述不等式成立的常数 M 不是唯一的, 如 $M+2$, $3M$ 等等都是可以的. 有界性体现在常数 M 的存在性. 如果这样的 M 不存在, 也就是说无论 M 取得多么大, 总存在某一个 $x \in I$ 使得 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 那么它的图形是介于两条平行线 $y = M_1$, $y = M_2$ 之间, 如图 1-6 所示.

例 3 函数 $f(x) = \sin x$, 对于任意 $x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $|\sin x| \leq 1$, 所以它是有界函数.

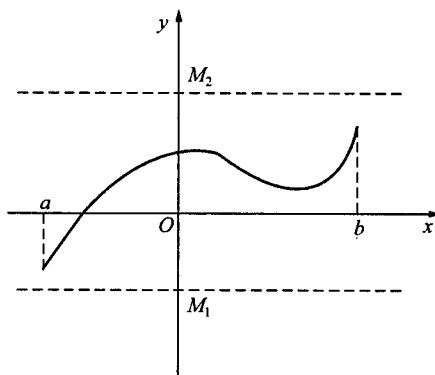


图 1-6