

W L M X L L J G C Y Y

紊流

模型理论 及工程应用

WENLIU MOXING LILUN
JI GONGCHENG YINGYONG

■ 魏文礼 戴会超 编著

陕西科学技术出版社

紊流模型理论及工程应用

魏文礼 戴会超 编著

陕西科学技术出版社

内 容 提 要

本书详细介绍了紊流模型的基本理论及其在工程实践中的应用。理论部分系统介绍了流体运动的基本概念、流体运动的基本方程、层流到紊流的过渡理论、紊流的统计理论、紊流模型理论、紊流高级数值模拟、紊流数值模拟关键性技术问题。应用部分重点介绍了采用紊流模型的基本理论求解水利工程中的典型实际问题,例如施工导截流、溢流坝面水流、船闸阀门段廊道水力学问题等。

本书内容由简到繁,深入浅出,强调物理概念分析,理论与实践紧密结合,可作为水利、水运、水电、环境工程等专业的研究生、本科生的教材和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

紊流模型理论及工程应用/魏文礼,戴会超编著.

—西安:陕西科学技术出版社,2006.1

ISBN 7-5369-4069-6

I. 紊... II. ①魏... ②戴... III. 紊流—水动力学

IV. TV131.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 003039 号

出 版 者 陕西科学技术出版社

西安北大街 131 号 邮编 710003

电话(029)87211894 传真(029)87218236

<http://www.snstp.com>

发 行 者 陕西科学技术出版社

电话(029)87212206 87260001

印 刷 西安理工大学印刷厂

规 格 787mm×1092mm 16 开本

印 张 9.5

字 数 240 千字

版 次 2006 年 1 月第 1 版

2006 年 1 月第 1 次印刷

定 价 28.00 元

版权所有 翻印必究

前 言

紊流是自然界中流体运动的一种普遍形式。研究自然规律和解决工程技术领域中的许多实际问题，都要应用紊流知识。因此，研究紊流基本机理及其工程应用问题具有非常重要的意义。本书既介绍紊流的基本理论，又介绍其工程应用，可作为水利、水运、水电、环境工程等专业的研究生、本科生的教材和工程技术人员参考书。

全书内容共分8章：第1章重点阐述与黏滞性密切相关的基本概念，比如变形率张量、应力张量和广义牛顿定律等，以便为后边章节的学习打下基础。第2章介绍流体运动的基本方程。首先介绍系统与控制体的概念，进而推导体积分的随体导数，在此基础上导出流体运动的基本方程，同时强调物理概念的分析。第3章介绍流体从层流到紊流的过渡理论。首先对紊流的特征进行概述，然后重点介绍层流的稳定性分析理论，最后叙述过渡状态的特性及影响过渡的因素。第4章介绍紊流统计理论。在介绍相关处理及能谱分析的基础上，导出紊流统计理论中的动力学方程，即卡门-豪沃思方程与能谱方程，并根据方程分析了能谱函数的性质，推出了几个推论。第5章介绍紊流模型理论。首先导出紊流平均运动的基本方程，然后讨论方程组的封闭问题，进而引入了各类紊流模型。根据预测能力的强弱和计算费用的高低，讨论各类紊流模型的优缺点和适用性。本章介绍的重点是 $k-\varepsilon$ 模型和应力-通量代数模型。第6章介绍了紊流中的高级数值模拟，即直接模拟和大涡模拟。第7章介绍紊流数值模拟中的关键性技术问题。第8章介绍紊流理论在水利工程中的几个典型的工程应用实例，旨在使读者能够将所学的理论付诸实践，提高解决实际问题的能力。

本书第1章至第7章由西安理工大学魏文礼教授、河海大学戴会超教授撰写，第8章由西安理工大学刘玉玲副教授编写；刘玉玲副教授还负责全书的绘图工作。

在编写过程中，作者引用了国内外许多同行专家的论文及著作内容，在此表示衷心的感谢！

书中如有不妥之处，敬请读者指正。

作 者

2006年1月于西安

目 录

第1章 流体运动的基本概念	(1)
1.1 变形率张量	(1)
1.2 应力张量	(5)
1.3 广义牛顿定律	(7)
1.4 流动分类	(10)
第2章 流体运动的基本方程	(13)
2.1 系统与控制体	(13)
2.2 体积分的随体导数	(14)
2.3 连续方程	(15)
2.4 动量方程	(17)
2.5 能量方程	(22)
2.6 状态方程	(25)
2.7 正交曲线坐标系中流体力学的基本方程	(26)
第3章 层流到紊流的过渡理论	(33)
3.1 紊流概述	(33)
3.2 层流的稳定性分析	(37)
3.3 层流向紊流的过渡及影响因素	(43)
第4章 紊流统计理论简介	(46)
4.1 引言	(46)
4.2 相关处理	(47)
4.3 紊动能谱	(52)
4.4 卡门-豪沃思方程与能谱方程	(56)
4.5 若干推论	(62)
4.6 小结	(64)
第5章 紊流模型理论	(66)
5.1 概述	(66)
5.2 紊流平均值、常用的时均运算关系式和紊流度	(67)

5.3	紊流平均运动的基本方程	(70)
5.4	雷诺应力方程	(75)
5.5	时均流方程的封闭问题	(76)
5.6	紊流模型的基本概念和分类	(77)
5.7	模拟的原则	(80)
5.8	零方程模型	(80)
5.9	一方程模型	(82)
5.10	二方程模型	(84)
5.11	应力-通量方程模型与应力-通量代数模型	(88)
5.12	边界条件	(92)
第 6 章	紊流高级数值模拟	(95)
6.1	引言	(95)
6.2	大涡模拟	(97)
6.3	直接模拟	(103)
6.4	小结	(108)
第 7 章	紊流数值模拟关键性技术问题	(109)
7.1	数值离散方法	(109)
7.2	自由表面的确定	(111)
7.3	复杂边界处理技术	(113)
7.4	适体坐标系的基本概念	(114)
7.5	生成网格的微分方程法	(117)
7.6	网格分布的控制	(119)
7.7	正交曲线网格的生成	(120)
7.8	控制方程的转化	(122)
7.9	边界条件的转换	(123)
第 8 章	应用实例	(126)
8.1	三峡水利工程截流龙口水力特性数值模拟	(126)
8.2	泄水建筑物曲面边壁三维定常紊流数值模拟	(129)
8.3	三峡永久船闸阀门段廊道水力特性数值模拟	(134)
8.4	线性波中二维射流与方柱绕流的大涡模拟	(140)
参考文献		(144)

第 1 章 流体运动的基本概念

在自然界中,真实的流体都具有黏滞性。对于所研究的具体水流问题来讲,如果黏滞力不起主导作用,利用非黏性流体力学理论便可以获得满意的结果;但当黏滞力起主导作用时,如再忽略黏滞性的存在,必将导致错误的结果。本书所讲的流体运动均指黏滞性不能忽略的流体的宏观运动。本章将重点阐述一些和黏滞性密切相关的基本概念,以便为今后章节的学习打下基础。至于研究流体运动的基本方法(如拉格朗日法、欧拉法)、流体力学中的基本概念(如流体的连续介质假定、流动性等)、流体的物理性质等,作者假设读者已具备这些基本的知识。

1.1 变形率张量

根据柯西-海姆霍茨定理可知,微团的运动可分解为三部分:平移、转动和变形(线变形与剪切变形)。

如图 1-1 所示,在流场中任取一流体微团,微团中的 M_0 点速度为 v_0 ,与其相邻点 M 的速度为 v_M ,相距的矢径为 δr 。

假定流场连续,且存在各阶偏导数,当 $\delta r \rightarrow 0$ 时, M 点的速度可通过泰勒级数展开,忽略二阶以上小量而得,并可分解为迁移速度和相对速度之和。相对速度取决于 M_0 点速度梯度张量,即

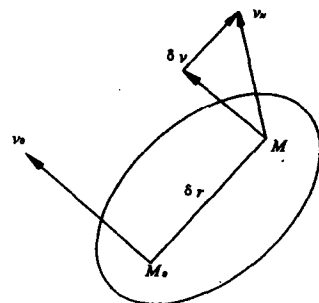


图 1-1 流体微团的运动分析

$$v_M = v_0 + \delta v = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)_{M_0} \cdot \delta r \quad (1-1)$$

$\downarrow$
迁移速度

$\downarrow$
相对速度

而

$$\frac{\partial v}{\partial r} \cdot \delta r = \frac{\partial v}{\partial x} \delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y + \frac{\partial v}{\partial z} \delta z$$

用矩阵和求和约定符号表示,则为

$$\frac{\partial v}{\partial r} \delta r = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] \delta x_j \quad (1-2)$$

可见,任意点的速度的导数是由9个分量组成的二阶张量。

另外,任意速度分量的微商可以分解为一个对称和一个反对称分量之和。即

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1-3)$$

这样,速度的导数张量在直角坐标系中可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}}_{\text{对称张量}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}}_{\text{反对称张量}} \\ &= [\varepsilon_{ij}] + [\zeta_{ij}] \end{aligned} \quad (1-4)$$

式中,对称张量 ε_{ij} 的各分量分别为

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \varepsilon_{yz} &= \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-5)$$

与反对称张量 ζ_{ij} 对应,矢量 ω 的各分量分别为

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

为了说明上述各量的物理意义,某瞬时在 xOy 平面上任取一微元体 $ABDC$,如图 1-2 所示, A 点的速度分量为 u 和 v 。由于速度分布连续且存在各阶偏导数,其相邻点的速度可用泰勒级数展开获得。忽略高阶小量后,相邻点的速度分量如下:

点 号	x 方向流速分量	y 方向流速分量
B 点	$u_B = u + \frac{\partial u}{\partial x} \delta x$	$v_B = v + \frac{\partial v}{\partial x} \delta x$
C 点	$u_C = u + \frac{\partial u}{\partial y} \delta y$	$v_C = v + \frac{\partial v}{\partial y} \delta y$

经 δt 时间后,微团移到了新的位置,并发生变形和转动。

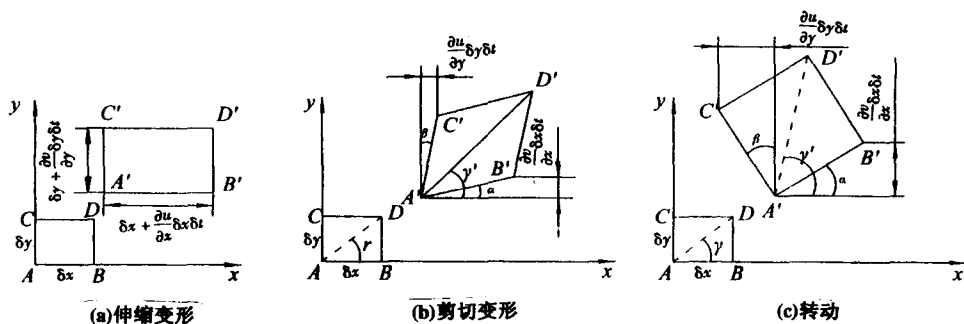


图 1-2 运动流体微团的变形和转动

x 方向和 y 方向的伸缩率分别为

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x} \delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \delta t = \varepsilon_{xx} \delta t \quad \text{和} \quad \frac{\frac{\partial v}{\partial y} \delta y \delta t}{\delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} \delta t = \varepsilon_{yy} \delta t$$

同理, z 方向为

$$\frac{\frac{\partial w}{\partial z} \delta z \delta t}{\delta z} = \frac{\partial w}{\partial z} \delta t = \varepsilon_{zz} \delta t$$

若定义单位时间、单位长度的线变化量为线变形率, 则微团在三个坐标方向的线变形率为

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (1-7)$$

三者之和

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \text{div } \mathbf{v} \quad (1-8)$$

代表单位体积流体的体积变化率。

此外, B 点的 y 向分速度与 A 点的不同, 从而使 AB 线绕 A 点转动, 经 δt 时间的转动角度为

$$\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \delta x \delta t}{\delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} \delta t$$

AC 线绕 A 点的转动角度为

$$\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \delta y \delta t}{\delta y} = \frac{\partial u}{\partial y} \delta t$$

因此, 原来各边互相垂直的微团在流动过程中发生角度变化。单位时间的角度变化为

$$\frac{\alpha + \beta}{\delta t} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

若定义单位时间微团角度变化量之半为剪切变形率,则 xOy 平面上的剪切变形率为

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \varepsilon_{yx} \quad (1-9)$$

同理, yOz 平面上的剪切变形率为

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \varepsilon_{zy} \quad (1-10)$$

xOz 平面上的剪切变形率为

$$\varepsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \varepsilon_{xz} \quad (1-11)$$

上述分析表明,速度导数张量中的对称张量是变形率张量,各分量代表流体微团的变形率分量,可写成

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

变形率张量是二阶对称张量,主对角线上的分量代表线变形率,其余代表剪切变形率。

按张量分析,二阶对称张量具有三个与坐标轴选取无关的张量不变量。变形率张量的三个不变量分别为

$$I_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} \quad (1-13)$$

$$I_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2 \quad (1-14)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (1-15)$$

根据对称张量的性质,还存在一个使非主对角线上各分量为零的坐标系,此坐标系的轴称为二阶张量的主轴。在主轴坐标系中,变形率张量只有主对角线上的三个分量,即

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

ε_1 、 ε_2 和 ε_3 称为流体直线变形率的主值。

主轴坐标系中变形率张量的三个不变量为

$$I_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (1-17)$$

$$I_2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 \quad (1-18)$$

$$I_3 = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \quad (1-19)$$

根据图 1-2(a) 的分析, 式 (1-4) 速度导数张量的反对称部分的分量 ω_z 表示流体微团在 xOy 平面上绕 z 轴的转动角速度, 即

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

同理

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

角速度与旋度之间的关系为

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \quad (1-20)$$

流体的转动角速度是旋度的一半, 称 $\boldsymbol{\Omega}$ 为涡量。

综上所述, 流体的任意点对邻近点的相对运动速度是由变形和旋转产生的, 可写为

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \delta \mathbf{r} \quad (1-21)$$

1.2 应力张量

理想流体中任意界面上的应力只有法向应力, 而且应力大小与所取界面的方向无关。黏性流体中任意界面上某点的应力可分解为法向应力和切向应力, 应力的大小和方向与所取界面的方位有关。流场中任意一点都有无穷个方向不同的界面, 也就有无穷个应力状态。为了描述黏性流场的应力状态, 必须借助于流体微团所受外力的平衡关系来建立应力关系, 并得出应力张量的概念。

流场内任取一微元四面体 $OABC$, 如图 1-3 所示, 其顶点 O 为坐标原点, AOB 、 BOC 和 AOC 三个面的法线分别与相应的坐标轴平行, 任意表面 ABC 的外法线的三个方向余弦为 n_1 、 n_2 和 n_3 。各表面上所受的应力可分解为沿三个坐标轴的分量, 其中 AOB 、 BOC 和 AOC 的三个应力分量就是该表面的法向应力和两个切向应力分量。为了建立任意表面 ABC 上的应力与其他三个表面应力之间的关系, 并以此代表流场任意点的应力状态, 需做下列假定:

1) 微元四面体的各边长是趋于零的微量, 故四面体的质量力与表面力相比是高阶小量, 可忽略。

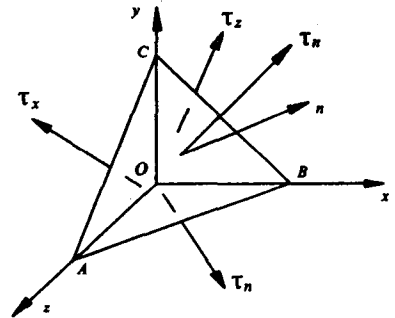


图 1-3 作用于微元体上的表面力

2)各表面上的应力分布均匀。规定应力的第一个下标表示应力作用面的外法线方向,第二个下标表示应力在这个方向上的投影。作用在各表面上的应力可用分量表示为

$$AOC \text{ 面: } \tau_{xx} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz}$$

$$AOB \text{ 面: } \tau_{yy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{yx}$$

$$BOC \text{ 面: } \tau_{zz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{zy}$$

根据作用于微元体所有外力的平衡条件,ABC 面上应力的三个分量应是

$$\tau_{nx} = \tau_{xx}n_1 + \tau_{yx}n_2 + \tau_{zx}n_3$$

$$\tau_{ny} = \tau_{xy}n_1 + \tau_{yy}n_2 + \tau_{zy}n_3$$

$$\tau_{nz} = \tau_{xz}n_1 + \tau_{yz}n_2 + \tau_{zz}n_3$$

上式表示法线为 $\mathbf{n}$ 面元上的应力,可由过该点作用在三个垂直于坐标轴表面上的九个应力分量完全确定。这九个分量组成二阶张量,称为应力张量。因为已假定微元体无限小,故此应力张量表示流场任意点的应力状态,即

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (1-22)$$

于是,外法线为 $\mathbf{n}$ 面元上的应力可写为

$$\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1-23)$$

应力张量中,主对角线上的分量为法向应力,其余为切向应力。三个法向应力的平均值称为平均压力,表示为

$$p_m = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}) \quad (1-24)$$

通过对微元体建立力矩的平衡关系,可证明应力张量具有对称性,即

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (1-25)$$

故应力张量是二阶对称张量,只有六个独立分量。

根据二阶对称张量分析,应力张量有一主轴坐标系,在主轴坐标系中,应力张量只存在主对角线上的分量,称为主应力,写为

$$\boldsymbol{\tau}' = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix} \quad (1-26)$$

应力张量在一般坐标中的三个不变量分别为

$$I_1 = \tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz} \quad (1-27)$$

$$I_2 = \tau_{xx}\tau_{yy} + \tau_{yy}\tau_{zz} + \tau_{zz}\tau_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad (1-28)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{vmatrix} \quad (1-29)$$

在主轴坐标系中的三个不变量分别为

$$I_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3 \quad (1-30)$$

$$I_2 = \tau_1\tau_2 + \tau_2\tau_3 + \tau_3\tau_1 \quad (1-31)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{vmatrix} \quad (1-32)$$

1.3 广义牛顿定律

如图 1-4 所示,牛顿提出了关于黏性流体做直线层状运动时,两流体层间的切应力的假设。认为切应力与层间速度成正比,即

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} \quad (1-33)$$

μ 为动力黏性系数,其值取决于流体的物理性质。通常称式(1-33)为牛顿内摩擦定律。

根据前两节所述的变形率张量和应力张量,式(1-33)左边对应于平面直线运动特殊情况下的应力张量的一个切向分量,右边的导数项对应于变形率张量的一个分量。因此,可以理解为 τ_{yx} 与 ε_{yx} 成正比例

$$\tau_{yx} = 2\mu\varepsilon_{yx} \quad (1-34)$$

Stokes 将广义牛顿内摩擦定律推广到黏性流体的任意流动情形中去,假设:

- 1) 流体是连续的,它的应力张量是变形率张量的线性函数。
- 2) 流体是各向同性的,也就是说它的性质与方向无关。因此,无论坐标系如何选取,它的应力与变形率的关系是相同的。
- 3) 当流体静止,即变形率为零时,流体中的应力就是流体静压力。

$$\tau_{ij} = -p_0\delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1-35a)$$

或

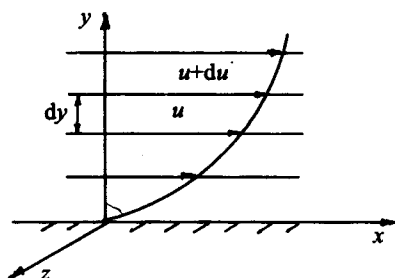


图 1-4 流体做直线层状运动时壁面附近速度分布

$$[\tau] = -p_0[I] \quad (1-35b)$$

$[I]$ 为单位张量。

$$[I] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1-36)$$

实验证明,对大多数常见的液体和气体,上述假设是正确的。

根据应力张量与变形率张量是线性关系以及流体是各向同性的假设,可以将应力张量 $[\tau]$ 与变形率张量 $[\dot{\epsilon}]$ 的线性关系式写成

$$[\tau] = a[\dot{\epsilon}] + b[I] \quad (1-37)$$

式中的系数 a 和 b 应该是标量。

为便于推导,先选取应力张量和变形率张量的主轴坐标系。流体各向同性的假定必然使应力张量和变形率张量的主轴坐标系重合。在主轴坐标系中,应力张量和变形率张量只有主对角线上的三个分量。

$$\dot{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tau_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_3 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

故应力分量与变形率分量之间的关系可写成

$$\tau_1 = a\epsilon_1 + b\epsilon_2 + c\epsilon_3 + d \quad (1-38)$$

$$\tau_2 = a\epsilon_2 + b\epsilon_3 + c\epsilon_1 + d \quad (1-39)$$

$$\tau_3 = a\epsilon_3 + b\epsilon_1 + c\epsilon_2 + d \quad (1-40)$$

式中: a 、 b 、和 c 是待定标量系数,与运动特性无关,仅与流体物理特性有关。根据假设3),系数 d 应是流体静压,即 $d = p$ 。

根据流体各向同性的假定,如果与应力分量垂直的两个坐标方向对换,上述关系还应成立,则必须有 $b = c$ 。于是,在主轴坐标系中,牛顿流体的应力与变形率之间的关系式可写为

$$\tau_i = -p + (a - b)\epsilon_i + b(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1-41)$$

写成张量形式为

$$\dot{\tau} = (a - b)\dot{\epsilon} + (-p + b \operatorname{div} v)[I] \quad (1-42)$$

上式是在主轴坐标系中导出的应力与变形率之间的关系式。根据流体各向同性的假定,可以证明上式也适用于任意出现剪切应力的坐标系。

对照式(1-34)和式(1-37),便得出上式的两个系数为

$$a - b = A = 2\mu \quad (1-43)$$

$$-p + b \operatorname{div} \mathbf{v} = B \quad (1-44)$$

适用于任意坐标系的应力与变形率之间的关系式为

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + (-p + b \operatorname{div} \mathbf{v})[\mathbf{I}]$$

或

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})[\mathbf{I}] \quad (1-45)$$

上式称为广义牛顿应力定律。

在利用主轴坐标系的推导中只出现法向应力,转换到任意坐标系上,便出现法向和切向应力。习惯上把动力黏性系数称为第一黏性系数。系数 b 或 λ 称为第二黏性系数,因为它只在流体体积发生变化时才显示,故称为体膨胀黏性系数。Stokes 假定第二黏性系数为

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

于是

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \left(-p - \frac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathbf{v}\right)[\mathbf{I}]$$

上式也可以写成

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \delta_{ij}\lambda \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1-46)$$

式中 δ_{ij} 称为 Kroneker 符号,定义为

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (1-47)$$

式(1-46)也可写成

$$\tau_{ij} = \begin{cases} -p + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} & (i = j) \\ \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) & (i \neq j) \end{cases} \quad (1-48)$$

用于不可压缩流体,则上式写成

$$\tau_{ij} = \begin{cases} -p + 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} & (i = j) \\ \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) & (i \neq j) \end{cases} \quad (1-49)$$

按照黏性流体的平均压力定义

$$p_m = -\frac{1}{3}(\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz})$$

由式(1-46)确定平均压力与静压之间的关系为

$$p_m = p - \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)\operatorname{div} \mathbf{v} \quad (1-50)$$

上式表明可压缩流体的平均压力不等于热力学压力,只有静止流体或不可压缩流体的平均压力等于静压。但采用 Stokes 对第二黏性系数的假定后,平均压力都等于热力学压力。

广义牛顿应力关系式是黏性流体力学的理论基础之一。虽在推导过程中采用了一些难以用实验验证的假定,但根据这一关系式所得的黏性流体力学基本方程在解决实际问题中得到证实,间接地证明了这些假定的正确性。广义牛顿应力关系式适用于牛顿流体;对于非牛顿流体,不能应用广义牛顿应力关系式。

第一黏性系数 μ 和第二黏性系数 λ 是流体两个彼此独立的物理量。 μ 容易通过实验测定,也有理论计算公式; λ 很难测定,没有一致公认的理论公式和数据,而且对 λ 本身还有一些争议,在不可压缩流体中第二黏性系数不出现。在可压缩流中,因为 $\text{div} \mathbf{v}$ 通常不大,故 $\lambda \text{div} \mathbf{v}$ 与方程中其他项相比是个小量,可忽略不计,但在冲激波中不能忽略。Stokes 假定在 $\lambda = -2\mu/3$ 时,对单原子气体和温度不太高的双原子气体相当准确。通过对大多数液体的测量,发现 λ 为正值,而且比 μ 还大,但人们对实验还有争论。Stokes 假设可从分子运动论中得到解释。

推导广义牛顿应力关系式中所用假定的主要出发点是:流体变形率小;忽略变形率的高次项;流体处于热力学平衡状态,这相当于低速流动。但对结构简单的空气和其他流体,除强激波外,这个关系式也适用于超音速流动,甚至高超音速流动。目前,理论上还不能划定它适用的具体范围。

1.4 流动分类

不同的流动有其各自不同的特点,按照一定的标准将流体运动进行分类研究,有助于掌握流体运动的规律。将流体运动按欧拉描述(场的描述)来进行分类,有恒定与非恒定,均匀与非均匀,有旋与无旋,一维、二维与三维流动之说;将流体运动按流体的内部结构分类,有层流与紊流之说。下列分别予以介绍。

1.4.1 按欧拉描述分类

(1) 恒定流与非恒定流

在任意选定空间点处,各物理量均不随时间而变的流动,称为恒定流或定常流。若物理量随时间而变,则为非恒定流或非定常流。恒定流场中,各物理量(速度、压强、密度)都不是时间 t 的函数,至于是否为空间点坐标的函数,则并未限定。将流体运动划分为恒定与非恒定的概念,仅适用于欧拉法,即仅适用于选定空间点观察其变化的方法。是否是恒定流,还可因所选坐标系不同而有不同的结论。例如,船在静水中等速行驶,引起水绕船流动,坐标系刚连于船上,所观察到的是恒定流动。而在岸上观察,所得到的则是非恒定流动。

(2) 均匀流与非均匀流

为了适用,也为了与水力学保持一致,采用如下的定义:在任意选定的瞬时,观察流动变化情况,流速的大小和方向沿流线不变的流动,称为均匀流。均匀流中各过流断面的流速分布图也是相同的。反之,流速的大小和方向(或二者之一)沿流线变化的流动,则为非均匀流。即

即使是均匀流,在垂直于流动方向的过流断面上也容许流速发生变化。如此定义的均匀流与一般流体力学教材中所定义的均匀场有所不同。所谓均匀场是指在任意选定瞬时,场量均不随空间点位置的变化而变化,亦即场量不是空间点坐标的函数。

恒定流可以是均匀的,也可以是非均匀的。一般来说,非恒定流只可能是非均匀流。但是在少数特殊情况下,也允许非恒定的均匀流发生。例如接有一段直径不变的细直出水管的水箱,当只有出水没有进水时,箱中水位缓慢下降,则此出水管中所发生的就是非恒定均匀流。

用欧拉变数表示的质点加速度可以分解为当地加速度与迁移加速度。显然,恒定流中所有当地加速度为零;均匀流中,所有迁移加速度为零。换言之,当地加速度是因流动的非恒定性所引起的,而迁移加速度则是由流动的不均匀性产生的。有的教本(如J. W 戴来等著的《流体力学》)直接以当地加速度为零与迁移加速度为零来分别定义恒定流与均匀流,这在实质上与本书提法一致。

(3) 有旋流动与无旋流动

由前节可知,一般情况下,流体微团的转动角速度 $\omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ 。令 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$,称为速度旋量或涡量,记作 $\text{rot } \mathbf{v}$ 。流场中某点处的速度旋量 $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$,就表明位于该点处的流体微团会绕着通过该点的瞬时轴做旋转运动,且转动角速度为 $\frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}$ 。反之,若某点处 $\boldsymbol{\Omega} = 0$,则位于该点处的流体微团就不会旋转,而只做平移运动与变形运动。这样就可以用旋量 $\boldsymbol{\Omega}$ 是否等于零作为划分流动的新标准。若流场中各处 $\nabla \times \mathbf{v} = 0$,则为无旋流动,否则为有旋流动。涡量是流体力学的重要概念,将流动划分为无旋与有旋两大类有重大意义。

对于初学者,通过直觉来区分有旋运动与无旋运动往往是困难的。最可靠的办法还是计算出 $\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$,视其是否为零,来作出判断。千万不可凭直觉将有旋运动错误地等同于圆周运动,将无旋运动错误地等同于直线运动。例如,采用平面极坐标表示的两种速度场分别为 $u_\theta = r\omega, u_r = 0$ 及 $u_\theta = \frac{k}{r}, u_r = 0$,它们的质点均做圆周运动。但通过计算确知,前者为有旋运动,后者则为无旋运动。又如,讨论流体黏滞性时所引用过的二维剪切流动,其速度场可表示为 $u_x = u_x(y), u_y = 0$,质点做平行直线运动。通过计算,其转动角速度 $\omega \neq 0$,确认为有旋流动。

(4) 一维流动、二维流动与三维流动

必须用三个空间坐标来描述的流动,叫做三维流动或三元流动。实际流动一般来说都是三维的,因为流场中一点处的速度和其他物理量,取决于为确定该点位置所必需的三个坐标(直角坐标或曲线坐标)。有些流动可以简化为仅用两个坐标描述的二维流动(或二元流动)。直角坐标系中的二维流动又叫平面流动。平面流动中所有质点分别在彼此平行的平面中流动,并且各流动平面的流动图案彼此相同。也就是说,沿着这些平行平面的垂直方向,不仅没有流动,而且也不发生物理量的变化。如果流动仅与一个坐标有关,则为一维流动或一元流动。水力学中常常忽略过水断面上的流速分布,引进断面平均流速,并研讨其沿流变化情况,这就是按一维流动处理。