UMSS

大学数学科学丛书——21

泛函分析新讲

定光桂 著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书　21

泛函分析新讲

定光桂　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是具有鲜明特点的专著兼教材. 其创新之处是把赋范空间、赋准范空间和赋拟范空间结合起来深入讨论(特别是创造出了许多有趣的反例说明它们的差异点), 这样的做法不仅是理论上、并且也是实际问题的需要.

本书共有两部分. 第一部分的主要内容可以作为泛函分析的入门教材. 我们在前两章介绍和讨论了赋范、赋准范和赋拟范空间及其上的线性算子的基本概念, 第三章介绍和讨论了所谓“线性泛函的三大原理”, 即 Hahn-Banach 定理、开映像与闭图像定理以及共鸣定理(一致有界原理), 最后介绍了 Hilbert 空间的基本内容.

本书的第二部分以及第一部分全部(特别是一些*号部分和附录)则可作为高校的相关研究生教材. 在第二部分中, 除了介绍著名的可分空间(改范)等价于 $C[a, b]$以及严格凸空间外, 还介绍和讨论了(作为上述空间推广的)拓扑向量空间的基本而有用的一些概念和特性.

本书既可作为泛函分析(本科生和研究生)的教材, 也可作为需要此专门知识的读者的一本参考书. 本书含有较多的例、反例和注记, 并在每章后均附有习题(并在最后附有提示), 且在最后附有参考材料. 对于自学者以及启发和培养创造思维也是很有利的.

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析新讲/定光桂 著. —北京: 科学出版社, 2007
(大学数学科学丛书; 21)
ISBN 978-7-03-019534-0

I. 泛… II. 定… III. 泛函分析-研究生-教材 IV. O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007) 第 119026 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 张 琪
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 耕者工作室

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

双 青 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

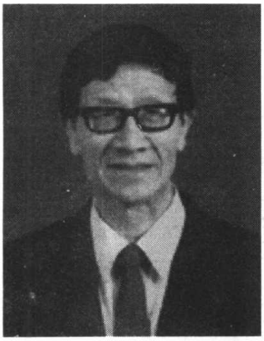
*

2007 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2007 年 8 月第一次印刷 印张: 24 1/2
印数: 1—3 000 字数: 462 000

定价: 58.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

作 者 简 介



定光桂，南开大学数学科学学院教授，博士生导师.

1959~1961 年，南开大学数学系学习，毕业后留校任教.

1979年9月~1981年11月，赴瑞典皇家科学院数学所(Mittag-Leffler研究所)进修，并破格获得 博士学位(导师为当时(届)国际数学会主席L.Carleson和著名的泛函分析专家P. Enflo)，成为新中国派往西方学者中第一个获数学博士的学者.

1981年任副教授，1986年晋升为正教授，1989年被国务院学位委授予博士生导师.

1991~1994年，赴美国Iowa大学任访问教授. (1987年7月~1988年12月，任南开大学教务长；1987年2月~1991年8月任南开大学数学系主任.)

作者曾多次获教学、科研奖. 1989年获首届国家级优秀教学成果奖，1991年获国家教委科技进步奖，1998年获天津市首届自然科学奖，2000年获天津市“九五”立功奖章，2001年获宝钢优秀教师奖，2002年作者所讲授的“泛函分析”获教育部创建名牌课优秀项目奖. 作者撰写的著作《巴拿赫空间引论》被(中国台湾)“九章数学基金会”在其《让数学名著永恒》项目中首选为重版书目，并于1997年和1999年由“科学出版社”再版. 自1987年以来一直承担国家自然科学基金及国家教委博士点基金项目，并担任项目负责人.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法, 数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在, 尽管数学的内涵已经大大拓展了, 人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比, 数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系, 但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括, 科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界, 数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点, 具有特殊的公共基础地位, 其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 作为一种先进的文化, 数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用, 而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育; 学习数学, 不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论, 更要着重领会数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段, 更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材, 教学参考书或课外读物的系列, 本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则, 力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助, 并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材, 相信并希望在各方面的支持及帮助下, 本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

序

定光桂教授的新著《泛函分析新讲》是一部有鲜明特色的泛函分析专著兼教材. 和传统的泛函分析著作以赋范空间为主线不同, 该书把赋范空间、赋准范空间和赋拟范空间结合起来进行深入的讨论, 特别是列举了许多反例说明它们之间的差异点, 这些结果中有许多是定光桂教授和他的学生们做出的. 正如作者在前言中所说, 以赋准 (拟) 范空间为切入点, 不仅仅是一种理论上的推广, 更是实际问题的需要. 众所周知, 在讨论常微分方程初值问题在无穷区间上整体解的存在性时, 要用到无穷区间上连续函数组成的空间, 这不是赋范空间, 而是赋准范空间 (如作者前言中通过可数个拟范数所定义的准范数), 当然更是拓扑线性空间. 这时, 要对对应的积分算子在此空间中应用 Tychonoff 不动点定理. 由于此空间中元素列的收敛相当于函数列在任何有限区间上的一致收敛, 故检验起积分算子的紧性来很容易, 所以使用起来十分方便.

定光桂教授是我国泛函分析方面一位资深的学者, 科研成果卓著. 早年他在共鸣定理及其应用方面做出了出色的工作. 近年来, 他对等距 (拟等距、渐近等距) 映射进行了系统而深入的研究, 获得了许多深刻的结果, 这方面处于国际领先水平. 近十几年来, 我经常邀请他主持我的博士生的论文答辩, 他也经常邀请我主持他的博士生的论文答辩, 所以, 我对他和他的学生们的工作比较熟悉. 在我们的交往中, 我深感他学风严谨, 一丝不苟、踏踏实实做学问. 同时, 他为人直率、真诚, 深得学生们的尊敬.

该书可作为大学高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 该书内容十分丰富, 论述详细, 特别是书中有大量的例子, 这可加深读者对概念的理解和对定理意义的认识. 书中每一章后附有习题, 书末还有习题提示, 这些都能帮助读者掌握该书的内容. 除大学生和研究生外, 该书对从事泛函分析方向和微分方程方向研究的学者, 也是很有益处的.

郭大钧

2005 年 10 月 10 日于山东大学南院

前　言

1986年在陈省身先生的努力下，南开大学数学系开设了“试点班”(现称(理科)“基地班”)的招生，每年从全国高中奥林匹克数学竞赛的优胜者中挑选30名左右学生免试入校学习. 从那时至今(除三年在美任教外)，十几年来，我一直担任该班的“泛函分析”的教学. 由于该班学生数学素质好，每届均有不少十分优秀的学生，因此我们能够超越原来的教学大纲，大胆地引进和介绍一些技巧性高的和崭新的教学内容. 这样一年又一年地改进、充实、创新，最终形成了今天的这本书.

这是一本新的泛函分析的书. 说它“新”，是因为它完全不同于现今国内外的“泛函分析”专著和教材. 在本书中，我们的切入点不是从赋范空间来讨论问题，而是从赋准(拟)范空间来开始我们的讲述. 我们之所以这样来讲述，并不仅仅是一种理论上的推广，更是实际问题的需要. 例如，在各种微(积)分方程中，人们常常需要在整个实(复)数域上连续的函数中去求解，但对于这样的函数所组成的空间，(从拓扑向量空间理论可知)其是不能组成赋范空间的. 然而，其却可以构成一个赋准范空间. 即，我们可以先定义可列个拟范数如下:

$$\|x\|_n = \max_{|x|\leqslant n} |x(t)| \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

再令准范数为

$$\|x\|^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|x\|_n}{1+\|x\|_n}.$$

可以证明: 对于在数域 $\mathbb{K}$ 上连续的函数列 $\{x_n, x_0\}$ 而言，$\|x_k - x_0\|^* \to 0$ 等价于: 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，均有 $\|x_k - x_0\|_n \to 0 \quad (k \to \infty)$. 也即: 在任何闭球 $B_n \triangleq \{t : |t| \leqslant n\}$ 上 $x_n(t)$ 均是一致收敛于 $x_0(t)$ 的. 而这样的定义正是求解方程的人所期望的性质.

然而，当讲述是从赋准范空间出发时，许多问题就出现了. 例如，与赋范空间完全不同的是，在赋准范空间中，非空的球面 $S_\delta \triangleq \{x : \|x\|^* = \delta\}$ 可以有“洞”(甚至对于二维的赋准范空间，其某个非空球面可以有无穷个“洞”); 又如，当赋准范空间单位球面是紧集时，其仍可能是无穷维的. 特别出人意料的是: 在一个完备的赋准范空间中，可以有一列闭球套 $\{B_n\}, B_1 \supset B_2 \supset \cdots$，当球的半径 $r_n \nrightarrow 0$ 时，可以出现 $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$(空集) 的情形，赋准范空间中的单位开球的闭包并非必为其单位闭球，以及赋准范空间的单位球面可含有内点，并且也可以由两个凸集组成等. 就是由于与赋范空间的这些差异性，使得我们的新的讲述出现了许多困难，但它也正是机遇——提供了我和基地班学生讨论和研究的课题. 因此，在本书中，一些有关赋准范空

间特性的新内容是 1995 年以后一些基地班学生的研究成果 (它们有的分散于一些论文中). 这里特别值得提出的是, 现在美国加州大学伯克利分校做博士后工作的詹大鹏博士和我的博士生张伦及刘锐同志的一些工作 (此外, 在本书的各章中, 也有一些我们的工作, 特别是在共鸣定理部分, 许多都是我们甚至是近几年论文的结果).

衷心感谢郭大钧教授在百忙之中抽出时间认真地阅读本书, 并且为本书作序. 本书稿是由我的学生陈东阳博士、侯志彬博士和博士生李磊录入, 并由侯志彬和李磊仔细校对而成, 此中侯志彬和李磊同志均做了大量创造性的工作, 特此对他们表示衷心的感谢.

此书可作为大学本科生和研究生的教材及参考书. 作为本科生只要学习本书的第一部分并且略去 * 号部分就可以了; 作为研究生, 则全读本书为好.

定光桂

2006 年 8 月于南开园

目 录

注：在书中，* 表示可选择或较难的内容.

第二部分

第一部分

第一章　赋范空间、赋准范空间和赋拟范空间

§1.1　赋 (准、拟) 范线性空间的定义以及基本特性

在线性代数及微分方程的学习中, 我们熟知, 如果把线性齐次代数方程组的解, 线性齐次微分方程的解等视为一个元素的话, 那么它们的集合和欧氏空间中的某些集合 (例如比较直观的二维和三维矢量空间所成的集合) 具有某种共同的性质, 而不考虑这些具体问题本身特点时, 我们便得出了抽象的线性空间的概念.

然而, 要对从实践和理论中抽象出来的数学的线性问题做深入的探讨, 仅有线性空间的概念还显得不够. 例如, 为了扩大收敛性的概念, 在理论上和方法上进一步研究线性问题, 都得对线性空间中的元素按一定的规则赋予相应的数值, 即向量的长度, 例如对每个 Lebesgue 可积函数赋予一个数值, 即函数的积分等, 这样便导出了抽象的赋范 (准范、拟范) 线性空间的概念.

定义 1　设 E 为线性空间, 如果在 E 上定义了一个 (非负) 函数, 记为 $||x||$, 其满足

(i) $||x|| \geqslant 0$ 且有 $||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = \theta$(零元);

(ii) $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ (三角不等式)(次加性);

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$ (绝对齐次性)　$\forall x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}$,

这时我们称 $||x||$ 为元 x 的**范数**, 而定义了范数的空间称为**赋范线性空间**.

定义 2　如果上面的 $||x||$ 满足 (i) 和 (ii) 及

(iii)′ (a) $||-x|| = ||x||$,

(b) $||\alpha_n x|| \to 0$ (如 $\alpha_n \to 0$),

(c) $||\alpha x_n|| \to 0$ (如 $||x_n|| \to 0$),

$\forall x, x_n \in E$; $\alpha, \alpha_n \in \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$ (这里, $\mathbb{K}$ 为数域, 其可为实数域 $\mathbb{R}$, 也可为复数域 $\mathbb{C}$), 则称 $||x||$ 为**准范数**. 而 $(E, ||x||)$ 称为**赋准范空间**.

定义 2′　如果上面的 $||x||$ 满足 (i) 和 (ii) 及

(iii)* 存在数$\beta > 0$, 使得 $||\alpha x|| = |\alpha|^{\beta}||x||$, $\forall x \in E, \alpha \in \mathbb{K}$,

则称 $||x||$ 为β **范数**, 而空间 $(E, ||x||)$ 称为**赋 β 范空间**.

定义 3　如果上面的 $||x||$ 满足 (ii) 和 (iii) 及

(i)′ $||x|| \geqslant 0$(即去掉条件 $||x|| = 0 \Rightarrow x = \theta$),

则称 $||x||$ 为**拟范数**, 而 $(E, ||x||)$ 称为**赋拟范空间**.

定义 4　如果上面的 $||x||$ 满足 (i)$'$ 和 (iii)$'$ 及 (ii), 则 $||x||$ 称为**拟准范数**, 而 $(E, ||x||)$ 称为**赋拟准范空间**.

注　显然范数必为准范数和拟范数, 准范数和拟范数必为拟准范数. 反之均未必成立. 准范数和拟范数无必然联系.

注意　在泛函分析中, 我们均不讨论使所有元的 (准、拟) 范数恒为 0 的空间.

回忆一下, 满足下面三条公理的空间 (E, d) 称为**距离空间**:

(i) $d(x,y) \geqslant 0,\ d(x,.y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$;

(iii) $d(x,y) = d(y,x);\quad \forall x,y,z \in E$

(这三条公理与下面两条公理:

(i) $d(x,y) \geqslant 0;\ d(x,.y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(ii)* $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(y,z)$

是等价的). 这时 d 称为**距离**.

当上面 (i) 中去掉 $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ 时, 则 d 称为**拟距离**. 而相应的空间 (E, d) 就称为**拟距离空间**.

性质 1　如果 E 为 "准范" 空间, 令

$$d(x,y) = ||x - y||,\quad \forall\, x, y \in E,$$

则 d 为一个距离. 如果 E 为 "拟准范" 空间, 则 d 为一拟距离.

而且此距离具有 "平移不变性", 即

$$d(x,y) = d(x+z, y+z),\quad \forall x, y, z \in E.$$

此外, 当 E 为 "(拟) β 范空间" 时, 此 (拟) 距离空间对 θ 点具有 β 绝对齐性, 即

$$d(\alpha\, x, \theta) = |\alpha|^\beta d(x, \theta);\quad \forall\, x, y, z \in E, \alpha \in \mathbb{K}.$$

E 作为距离空间, 便可以由其距离定义极限. 设 E 是赋范线性空间, $\{x_n, x_0\} \subset E$. 我们称元列 $\{x_n\}$ **收敛** 于 x_0 是指

$$\lim_{n\to\infty} ||x_n - x_0|| = 0,$$

即

$$x_n \to x_0 \Longleftrightarrow d(x_n, x_0) \to 0\ (\Longleftrightarrow ||x_n - x_0|| \to 0).$$

这种收敛称**按范数收敛**.

注意到从 "拟准" 范数的三角不等式 (ii) 必可导出

$$\big|\, ||x|| - ||x_0||\, \big| \leqslant ||x - x_0||,\quad \forall\, x, x_0 \in E.$$

因而得到下面的结果：

性质 2 “拟准”范数 $||x||$ 必为 x 的连续函数.

为了说明赋范线性空间的另一基本特征，我们先给出下面关于抽象空间中“线段”与“凸集”的定义. 设 E 为线性空间，x 和 y 是 E 中的任意两个元，则集合 $\{\lambda x+(1-\lambda)y\colon\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ 就称为由 x 和 y 所组成的**线段**，记为 $[x,y]$. 类似的，当以上线段中不含有 x 或不含有 y 时，或同时不含有 x 和 y 时，则分别称其为**半开半闭线段**或**开线段**，记为 $(x,y]$, $[x,y)$ 和 (x,y). 线性空间 E 中的集 V 称为**凸集**是指对任意的 $x,y\in V$ 均有 $[x,y]\in V$.

性质 3 在“拟范”空间 E 中，任意“球”

$$B(x_0,r)\triangleq\{x\in E\colon\ ||x-x_0||\leqslant r\}$$

必为凸集.

其实，对任意的 $x,y\in B(x_0,r)$，由于 $||x-x_0||\leqslant r, ||y-x_0||\leqslant r$，根据拟范数的性质立即推得：当 $0\leqslant\lambda\leqslant 1,\lambda\in\mathbb{R}$ 时，有

$$\begin{aligned}||\lambda x+(1-\lambda)y-x_0||&\leqslant||\lambda(x-x_0)+(1-\lambda)(y-x_0)||\\&\leqslant\lambda||x-x_0||+(1-\lambda)||y-x_0||\\&\leqslant\lambda r+(1-\lambda)r=r,\end{aligned}$$

即 $\lambda x+(1-\lambda)y\in B(x_0,r)$.

性质 4 设 $p(x)$ 为线性空间 E 上的“次加”泛函，则

(a) 当 $p(x)$ 为“对称”泛函时 (即 $p(-x)=p(x),\quad\forall x\in E$)，必有 $p(x)\geqslant 0$;

(b) 若 $p(x)$ 不恒为 0，则当存在 $\beta>0$，使得

$$p\left(\frac{1}{2}x\right)\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{\beta}p(x),\quad\forall x\in E\tag{1.1.1}$$

时，必有 $\beta\leqslant 1$. 特别地，由此可知，当 $||x||$ 具有上面范 (ii) 和范 (iii) 性质时，其必为拟范；而当其为 β 范时，必有 $\beta\leqslant 1$.

事实上，当 $p(x)$ 为次加泛函时，我们有

$$p(\theta)=p(\theta+\theta)\leqslant p(\theta)+p(\theta)=2p(\theta).$$

由此得出 $p(\theta)\geqslant 0$，从而

$$0\leqslant p(\theta)=p(x+(-x))\leqslant p(x)+p(-x).\tag{1.1.2}$$

故由 $p(x)$ 的对称性知 (a) 是成立的.