21 世纪高等院校创新教材

高等数学及其应用

(上册)

胡端平　熊德之　主编

科学出版社
www.sciencep.com

·21世纪高等院校创新教材·

高等数学及其应用

（上 册）

胡端平　熊德之　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书参照教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会制定的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成，分上、下两册．上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何，各章均有相应的数学实验单元．附录附有二阶和三阶行列式简介、几种常用的曲线和曲面、积分表等内容．本书例题较多，便于自学；并吸收国内外同类教材的优点，以帮助学生提高数学素养，培养创新意识，掌握运用数学工具去分析和解决实际问题的能力．

本书是普通高等学校工科类各专业高等数学课程的教材，也可以作为相近学科或经济、管理类专业的本科教材，还可以作为教学参考用书．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其应用．上册/胡端平，熊德之主编．—北京：科学出版社，2007
（21世纪高等院校创新教材）
ISBN 978-7-03-018958-5

Ⅰ.高… Ⅱ.①胡…②熊… Ⅲ.高等数学－高等学校－教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第067190号

责任编辑：王雨舸／责任校对：董 丽
责任印制：高 嵘／封面设计：方葵 GONGZUOSHI

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年6月第 一 版 开本：B5（720×1000）
2007年6月第一次印刷 印张：23 1/2
印数：1—10 000 字数：464 000

定价：32.50元

前　言

高等数学作为理工类、经济管理类各学科的基础课程，它直接关系到学生能否顺利地、高质量地完成学业的问题．高等数学的教学水平是一个学校教学质量的重要标志，同时，具有数学素质是学生可持续发展的基础．在当代大学生的知识能力结构中，数学知识和能力是不可少的部分．因此，各高等学校无疑都将数学教育放在重要的位置上．

在高等教育成为大众化的条件下，高等数学的教与学愈来愈成为难点，如何突破难点成为广大教师和数学界所关注的问题．近几年来，高校之间就数学课程的教学研究和教学经验进行交流日益频繁，在教育部的关心下，2005 年建立了《大学数学课程报告论坛》，集数学界的专家学者和数学教育工作者之智慧，探讨新的教学理论和方法，旨在提高数学教学的质量．作为在教学一线的教师，努力解决出现的问题，创造新的方法是我们的责任．为此，我们编写了这套教材，希望尽微薄的贡献．

一套好的高等数学教材，除了它的科学性之外，它还应有深刻的思想内涵，有生动活泼的风格，反映新的理论与方法，具有可读性．在教材中，我们努力按照精品课程教材的要求，体现创新教学理念，以利于激发学生自主学习，以利于提高学生的综合素质和创新能力；我们试图在保证理论高度不降低的情况下，适当运用实例和图形，使教学难度降低；我们以单元的方式介绍数学实验，帮助学生直观地了解数学和数学的应用；我们适时介绍有关数学史料，以体现人文精神．总之，编者们将长期的教学实践经验渗透到教材中，以便达到便于施教授课，并尽量展现高等数学的应用魅力．

本教材分上、下两册，上册由胡端平、熊德之担任主编和制定编写大纲，并进行统稿．全书分为十二章，第一章、第十章由胡端平编写；第二章、第三章由柳翠华编写；第四章、第五章由熊德之编写；第六章、第十二章由刘华国编写；第七章、第十一章由孙霞林编写；第八章、第九章由王志宏编写；各章的数学实验由李小刚编写．

书中打“*”号的部分可视学生的能力及专业要求由教师决定是否讲授．大部分章节配有的习题分为 A，B 两组，难度递增．

由于水平有限，书中有不尽人意和缺憾的地方，希望得到广大专家、同行和读者的批评指正．

编　者

2007 年 2 月

目　录

第一章　函数与极限……………………………………………………… 1
1.1　映射与函数 ……………………………………………………… 1
1.2　函数的运算 ……………………………………………………… 9
1.3　数列的极限……………………………………………………… 20
1.4　函数的极限……………………………………………………… 27
1.5　无穷小量·极限运算法则……………………………………… 34
1.6　夹逼定理·函数极限的性质…………………………………… 41
1.7　无穷小量的比较………………………………………………… 49
1.8　连续与间断……………………………………………………… 52
1.9　闭区间上连续函数的性质……………………………………… 61
复习题一 ……………………………………………………………… 64
实验一　一元函数的绘图与极限的计算 …………………………… 67
第二章　导数与微分 ………………………………………………… 75
2.1　导数的概念……………………………………………………… 75
2.2　导数公式与求导法则…………………………………………… 83
2.3　隐函数及参数方程所确定的函数的导数……………………… 91
2.4　高阶导数………………………………………………………… 97
2.5　微分及其应用 ………………………………………………… 101
复习题二……………………………………………………………… 108
实验二　导数与微分 ………………………………………………… 110
第三章　微分中值定理与导数的应用……………………………… 115
3.1　微分中值定理 ………………………………………………… 115
3.2　泰勒公式 ……………………………………………………… 123
3.3　洛必达法则 …………………………………………………… 128
3.4　函数的单调性 ………………………………………………… 134
3.5　函数的极值 …………………………………………………… 138
3.6　函数的最值及其应用 ………………………………………… 142
3.7　曲线的凹凸性及拐点 ………………………………………… 147
3.8　函数图形的描绘 ……………………………………………… 151
3.9　曲率 …………………………………………………………… 156
复习题三……………………………………………………………… 161

实验三　导数的应用…………………………………………………… 163
第四章　不定积分…………………………………………………………… 166
4.1　不定积分的概念与性质 ………………………………………… 166
4.2　换元积分法 ……………………………………………………… 173
4.3　分部积分法 ……………………………………………………… 184
4.4　有理函数和可化为有理函数的积分 ………………………… 189
复习题四………………………………………………………………… 197
实验四　不定积分………………………………………………………… 198
第五章　定积分及其应用………………………………………………… 201
5.1　定积分的概念与性质 …………………………………………… 201
5.2　微积分基本公式 ………………………………………………… 210
5.3　定积分的换元法与分部积分法 ……………………………… 219
5.4　反常积分 ………………………………………………………… 227
5.5　平面图形的面积 ………………………………………………… 233
5.6　立体的体积 ……………………………………………………… 240
5.7　平面曲线的弧长与旋转曲面的面积 ………………………… 246
5.8　定积分在物理学上的应用 ……………………………………… 252
*5.9　数值积分 ………………………………………………………… 257
复习题五………………………………………………………………… 263
实验五　定积分及其应用……………………………………………… 266
第六章　空间解析几何…………………………………………………… 271
6.1　空间直角坐标系 ………………………………………………… 271
6.2　向量及其线性运算 ……………………………………………… 274
6.3　数量积与向量积 ………………………………………………… 282
6.4　曲面方程 ………………………………………………………… 291
6.5　平面方程 ………………………………………………………… 298
6.6　曲线方程 ………………………………………………………… 304
6.7　直线方程 ………………………………………………………… 310
复习题六………………………………………………………………… 318
实验六　三维图形的绘制……………………………………………… 319
习题答案与提示…………………………………………………………… 323
附录Ⅰ　二阶和三阶行列式简介………………………………………… 351
附录Ⅱ　常用的曲线和曲面……………………………………………… 354
附录Ⅲ　积分表…………………………………………………………… 360

第一章 函数与极限

在历史上，人们一是要研究物体（如行星）的运动规律，二是要解决曲线切线的求法和曲线所围成的平面图形的面积的计算，在笛卡儿（法国人，Rene Descartes，1596 ～ 1650）创造了解析几何后，给解决上述问题提供了可能的条件. 结果在 17 世纪下半叶和 18 世纪初由英国人牛顿（Isaac Newton，1642 ～ 1727）和德国人莱布尼茨（Gotlfried Wilhelm Leibniz，1646 ～ 1716）成功地创立了微积分. 微积分成为解决上述问题的有力工具.

与许多科学技术和新理论一样，微积分在初创阶段，缺乏严格的理论基础和体系. 因此，牛顿、莱布尼茨所创造的理论与方法在其后近百年中一直受到恶意的攻击和善意的批评. 直到 100 多年后，年轻的法国数学家柯西（Augustin Louis Cauchy，1789 ～ 1857）和德国数学家魏尔斯特拉斯（Karl Weierstrass，1815 ～ 1897）建立了严格的微积分的理论基础，其理论基础就是极限论.

1.1 映射与函数

大千世界，纷纷扰扰，各种现象之间存在错综复杂的关系. 在哲学层面上，各自然现象、各社会现象之间是有机地互相关联的，我们的目的是从量上描述这种关联.

一、映射

映射是两事物或多事物之间的一种关系. 例如，到电影院看电影，观众为一个集合 A，电影院的座位为另一个集合 B，对 A 中的每个观众，B 中有唯一的一个座位与之对应；又如矩形的面积由其长和宽决定. 总结这些现象或事物之间的联系，我们有

定义 1.1.1 设 A,B 为两非空集合，A,B 之间存在一个对应关系 f，称 f 为 A 到 B 的一个**映射**，如果对 A 中每一个元素 a，通过 f，B 中存在唯一的元素 b 与之对应，称 b 为 a 的**像**，a 为 b 的**原像**. 我们记为

$$f:A\to B,\quad a\mapsto b \quad 或 \quad b=f(a).$$

称 A 为 f 的**定义域**，记为 $D(f)$；A 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的**值域**，记为 $R(f)$. 如图 1-1 所示.

注 两非空集合 A,B 之间的关系 f 是映射必须满足以下三个条件：

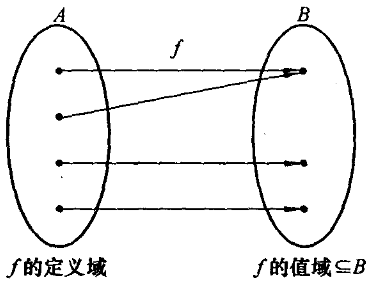


图 1-1

(1) A 中所有元素都有像；

(2) A 中所有元素的像都在 B 中(B 中每个元素不必为 A 中元素的像)；

(3) A 中每个元素的像是唯一的.

例 1.1.1 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$，$B=\{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5\}$ 为两个集合. 判断下面的关系是否为 A 到 B 的映射：

$f_1: a_1\mapsto b_1,\ a_2\mapsto b_1,\ a_3\mapsto b_1,\ a_4\mapsto b_2$；

$f_2: a_1\mapsto b_1,\ a_2\mapsto b_2,\ a_3\mapsto b_3,\ a_4\mapsto b_5$；

$f_3: a_1\mapsto b_1,\ a_2\mapsto b_2,\ a_3\mapsto b_3$；

$f_4: a_1\mapsto b_1,\ a_2\mapsto b_2,\ a_3\mapsto b_3,\ a_4\mapsto b_4,\ a_1\mapsto b_5$；

$f_5: a_1\mapsto b_1,\ a_2\mapsto b_2,\ a_3\mapsto b_3,\ a_4\mapsto c_4$.

解 f_1，f_2 均为 A 到 B 的映射，而 f_3，f_4，f_5 则不是 A 到 B 的映射. 这是由于在 f_3 下，a_4 没有像，在 f_4 下 a_1 有两个不同的像 b_1 和 b_5，在 f_5 下 a_4 的像不在 B 中.

例 1.1.2 我们观看一个地图，$A=\{$东，南，西，北$\}$ 为 4 个方向的集合，而 $B=\{$上，下，左，右$\}$ 是相对于看地图的 4 个方位，则

$$f: 东\mapsto 右,\ 南\mapsto 下,\ 西\mapsto 左,\ 北\mapsto 上$$

为 A 到 B 的一个映射.

现在我们来考察 f_1，f_2 和 f 不同之处(共性均为映射)，如图 1-2 所示.

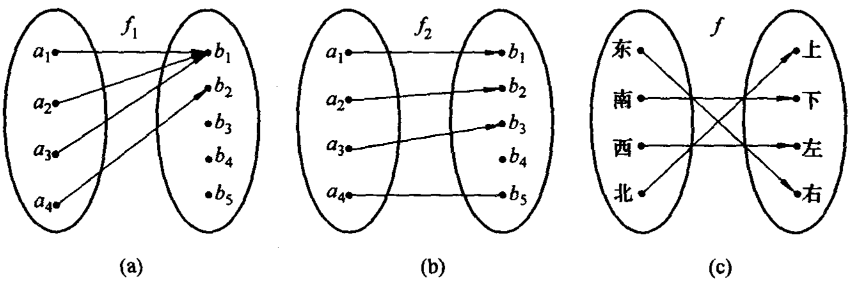


图 1-2

关于 f_1，a_1, a_2, a_3 有相同的像 b_1（可以多对一）；关于 f_2，a_1, a_2, a_3, a_4 的像均不相同，但 A 中没有元素与 b_4 对应；关于 f，A 中不同的元素像也不同，并且 B 中每个元素，A 中有元素与之对应. 我们将以上的映射进行分类：

定义 1.1.2　设 f 为集合 A 到集合 B 的映射，如果 A 中任意两个不同的元素 $(a_1 \neq a_2)$，它们的像也不同 $(f(a_1) \neq f(a_2))$，称 f 为单射；如果对于 B 中的任意一个元素 b，A 中有元素（可能不止一个）a 与之对应，即 $f(a) = b$，称 f 为满射；如果 f 既是单射又是满射，称 f 为双射或 1-1 对应（映射）.

显然例 1.1.1 和例 1.1.2 中，f_2 为单射不是满射，而 f 既是单射也是满射，从而 f 为双射.

二、函数

1. 定义与例

我们考虑特殊的映射 —— 函数.

定义 1.1.3　设 f 为集合 A 到 B 的映射，如果 B 为数集，则称 f 为**函数**. 当 B 为实数集时，称 f 为**实值函数**；当 B 为复数集时，称 f 为**复值函数**.

当 $x \in A$，称 $f(x)$ 为 x 的函数值. 这里函数的定义域 A 可以为数集，也可以不是数集. 当 A 为实数集时，f 称为实变量函数；当 A 为复数集时，f 称为复变量函数（图 1-3）. 在本书中，我们只讨论 A，B 均为实数集合或其子集的函数. 将定义域 A 置于坐标系横轴，值域 B 置于纵轴，当然定义域可以为横轴，值域也可以为纵轴. 称平面点集

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

为 f 的图像. 一般 f 的图像为平面曲线，如图 1-4 所示.

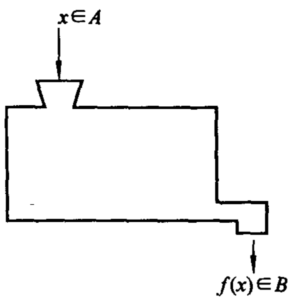


图 1-3

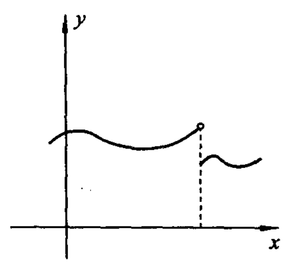


图 1-4

注　若曲线 l 为函数 f 的图像，则垂直于 x 轴的任意一条直线与 l 至多只有一个交点. 如图 1-5 中的曲线为函数的图像；而图 1-6 中的曲线不是函数的图像，这是由于 x_0 的像有 y_1, y_2, y_3，不唯一.

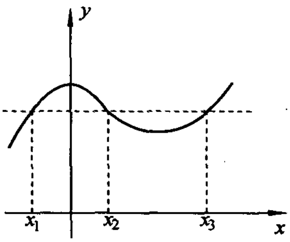


图 1-5

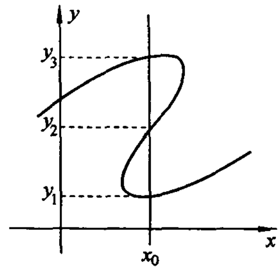


图 1-6

例 1.1.3(取整函数)　$\forall x \in \mathbf{R}$($\mathbf{R}$ 为实数集合,$\forall x$ 意为对于任意取定的 x),定义

$$f(x) = [x] = n \quad (n \leqslant x < n+1, n \text{ 为整数}),$$

即$[x]$为不大于 x 的最大整数.如$[-1.3]=-2$,$[0.5]=0$,$[3.9]=3$,$[5]=5$.称$[x]$为取整函数,如图 1-7 所示.

显然有

$$[x] \leqslant x < [x]+1. \tag{1.1.1}$$

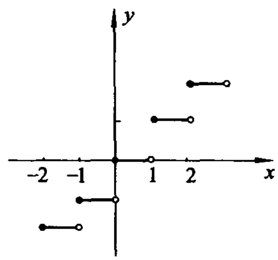


图 1-7

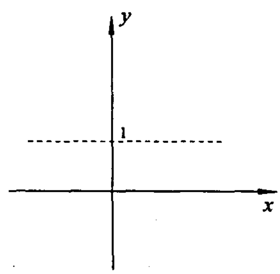


图 1-8

例 1.1.4　Dirichlet① 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数}, \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

如图 1-8 所示.这个函数有很多"奇怪"的性质(以后会涉及),以前见到的函数总可以通过一个解析式表达,这个函数的出现意味着数学从研究"算"到研究"概念、性质、结构"的转变.

例 1.1.5　符号函数

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

① 狄利克雷(P G L Dirichlet,1805～1859),德国数学家.22 岁任布雷斯劳大学讲师,24 岁任柏林大学讲师,34 岁晋升为教授.他对数学的贡献涉及各方面,其中在数论、分析、位势论尤为突出.

如图 1-9 所示. 符号函数可以简化某些函数的表达式,如 $|x| = x\operatorname{sgn}x$.

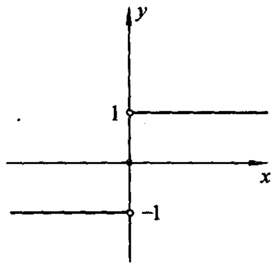


图 1-9

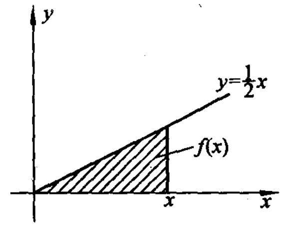


图 1-10

例 1.1.6 设直线 $l: y = \dfrac{1}{2}x$,则由 x 轴、l 和过 x 点且垂直于 x 轴的直线 $(x \geqslant 0)$ 所围成的面积是 x 的函数:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \quad (x \geqslant 0).$$

如图 1-10 所示,$f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

我们将上例推广:

例 1.1.7 设 x 轴上方有一曲线 l,由 l、x 轴、过 x 轴两点 a, x $(x > a)$ 垂直于 x 轴的直线围成的图形称为曲边梯形(图 1-11),则曲边梯形的面积为 x 的函数 $S(x)$. 也就是说,任给 $x \geqslant a$,则曲边梯形存在唯一面积 $S(x)$ 与之对应. $S(x)$ 的定义域为 $x \geqslant a$.

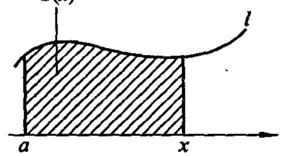


图 1-11

例 1.1.8(所得税函数) 我国个人所得税以个人按月收入超过起征点 a 元分 9 级征收. 税率表如表 1-1 所示(表中的区间不含左端点,但含右端点).

表 1-1

月收入 $> a$	0 ~ 500	500 ~ 2000	2000 ~ 5000	5000 ~ 20000	20000 ~ 40000	40000 ~ 60000	60000 ~ 80000	80000 ~ 10 万	10 万以上
税率 %	5	10	15	20	25	30	35	40	45
速算扣除数	0	25	125	375	1375	3375	6375	10375	15375

$$\text{个人所得税} = \text{应纳税额} \times \text{适用税率} - \text{速算扣除数}$$

某单位职工月收入不超过 5000 元,所在地区所得税起征点 $a = 1600$ 元,则该单位职工每月交纳个人所得税金是月收入的函数

$$f(x) = \begin{cases} 0.05(x-1600), & 1600 < x \leqslant 2100, \\ 0.1(x-1600) - 25, & 2100 < x \leqslant 3600, \\ 0.15(x-1600) - 125, & 3600 < x \leqslant 6600. \end{cases}$$

从例 1.1.5 和例 1.1.8 看到,有的函数的解析式的表达不单一,在定义域内不同的区间内有不同的表达式,人们俗称为分段函数,其实分段函数没有严格的定

义. 同时我们还指出，对于同一个函数，其解析式表达是不唯一的. 例如

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

也可表示为 $|x| = \sqrt{x^2}$.

2. 数列

记 $\mathbf{N}^+ = \{1,2,\cdots\}$，即 $\mathbf{N}^+$ 为正整数集合，称 $\mathbf{N}^+$ 上的函数

$$f: \mathbf{N}^+ \to \mathbf{R}, \quad a_n = f(n)$$

为数列，f 在 n 的函数值 $a_n = f(n)$ 为数列的通项，一般记成数列 $\{a_n\}$（加定语"数列"，是防止与集合 $\{a_n\}$ 相混淆）.

对数列 $\{a_n\}$ 的几何表示一般有两种：一是将点列 $(n, f(n))$ $(n = 1,2,\cdots)$ 作在平面上成为平面点图，如图 1-12 所示；二是将 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 依次在实数轴上以点的方式给出，如图 1-13 所示.

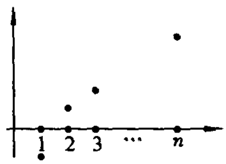


图 1-12

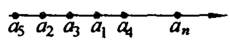


图 1-13

例 1.1.9 写出以下数列的通项并判断它们的变化趋势：

(1) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots$;

(2) $1, -1, 1, -1, \cdots$;

(3) $1, 2, 3, \cdots$;

(4) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \cdots$.

解 (1) $a_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ $(n = 1,2,\cdots)$ 随着 n 的增加接近于零.

(2) $a_n = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1, & n \text{ 为奇数}, \\ -1, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$ 点列 a_n $(n \geqslant 1)$ 在 1 与 -1 两点交错跳跃.

(3) $a_n = n$，随着 n 的增加而变大.

(4) 我们观察奇数项的数列为 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$，从而

$$a_{2n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

再看偶数项的数列为 $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \cdots$，从而

$$a_{2n} = \frac{1}{2n+1} \quad (n = 1,2,\cdots).$$

即有

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k-1}}, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{2k+1}, & n = 2k, \end{cases}$$

并随着 n 的增加而趋近于零. 如图 1-14 所示.

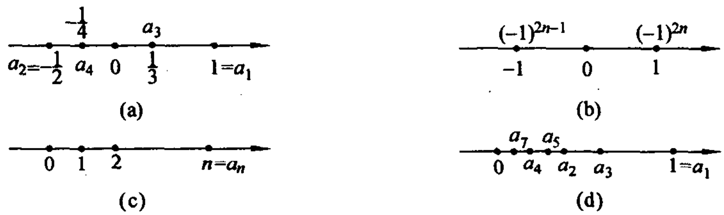


图 1-14

例 1.1.10 在数值计算中,常用一种迭代法,即给定 a_0 称为初始值,有一个已知的算式:

$$a_n = f(a_{n-1}), \quad a_0 = a, \quad n \geqslant 1. \tag{1.1.2}$$

式(1.1.2)称为一阶递归方程. 若将 a_0 代入式中便可算出 $a_1 = f(a_0)$,将 a_1 代入式中算出 $a_2 = f(a_1)$,$\cdots$ 如此下去,便可算出 a_n,这种算法称为迭代法. 如取 $a_0 = 2$, $a_n = a_{n-1}^2$,则

$$a_1 = a_0^2 = 4,\ a_2 = a_1^2 = 16,\ a_3 = a_2^2 = 16^2 = 256,\ \cdots.$$

3. 基本初等函数

我们将在高中所学的几种函数提炼出来,称下列函数为基本初等函数:常数 C;幂函数 x^a;指数函数 a^x $(a > 0, a \neq 1)$;三角函数 $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$;对数函数 $\log_a x$;反三角函数 $\arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x$.

基本初等函数可以构造一些较复杂函数,在微分和积分运算中大量是关于由基本初等函数构造出来的函数.

习 题 1.1

1. 设 A 为一年中的 365 天,下列关系是否为映射?若是映射,试求出值域.

(1) $\forall x \in A$,x 对应降水量;

(2) $\forall x \in A$,x 对应所属月份;

(3) $\forall x \in A$,x 对应出生的婴儿数;

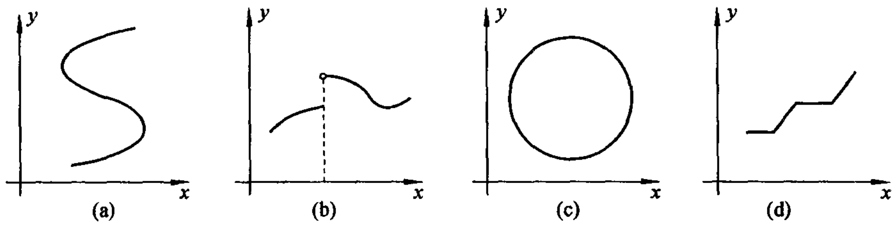
(4) $\forall x \in A$,x 对应单日或双日.

2. 设 A = 人类,下列关系是否为映射?

(1) $\forall x \in A$，x 对应子女；

(2) $\forall x \in A$，x 对应母亲.

3. 习题图 1.1.1 中哪些是 x 的函数？哪些不是？



习题图 1.1.1

4. 下列各题中的映射是否相同？为什么？

(1) 令 $A=$ 多边形集合，$\mathbf{N}$ 为自然数之集，$f: A \to \mathbf{N}$，$x \mapsto x$ 的边数，$g: A \to \mathbf{N}$，$x \mapsto x$ 的角的个数；

(2) $f(x)=\ln x^2$，$g(x)=2\ln x$；

(3) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

5. 下列映射中哪些是单射？哪些是满射？哪些是双射？为什么？

(1) $f_1: N \to N$，$f_1(x)=x+1$；

(2) $f_2: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$，$f_2(x)=x+1$，$\mathbf{Z}$ 为整数集；

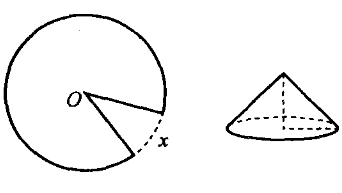
(3) $A=\{$小学生$\}$，$B=\{$小学$\}$，$\forall x \in A$，将 x 对应到他所在的学校；

(4) $f_3: R \to R$，$f_3(x)=x^2$.

6. 作函数 $f(x)=x-[x]$ 的图像，并求 $f(n)$ $(n \in \mathbf{N})$ 和 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases} 3\sin^2 x+1, & x \geqslant 0, \\ e^x, & x<0. \end{cases}$ 求 $f(0)$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

8. 将等边三角形的面积和周长表示为边长 x 的函数.



习题图 1.1.2

9. 将半径为 R 的圆片切掉弧长为 x 的扇形，将剩下部分的两条边相拼成为一个圆锥，如习题图 1.1.2 所示.

(1) 将圆锥底周长用 x 表示；

(2) 将圆锥底半径用 x 表示；

(3) 将圆锥容积用 x 表示.

10. 写出下列数列的通项，并指出其发展趋势：

(1) $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \cdots$；

(2) $0.9, 0.99, 0.999, \cdots$；

(3) $0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \cdots$；

(4) $-1, 2, -3, 4, -5, 6, \cdots$.

1.2 函数的运算

对于常数 a 和 b，有加、减、乘、除四则运算，那么对于两个函数 f 和 g 能否有这样的运算呢？事实上，对于给定的 x，$f(x)$ 和 $g(x)$ 均为数值，它们的四则运算就是常数的四则运算. 例如，$f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$（以数 e 为底的对数），当取 $x>0$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 均有意义，即 $f(x)$，$g(x)$ 共同的定义域为 $(0,+\infty)$. 对于给定的 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)$，$g(x)$ 的四则运算是确定的，因此，我们可以用逐点的方式定义函数 f，g 的四则运算. 记

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+\ln x,\quad x\in(0,+\infty);$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2-\ln x,\quad x\in(0,+\infty);$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x)=x^2\ln x,\quad x\in(0,+\infty);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{\ln x},\quad x\in(0,1)\cup(1,+\infty).$$

并分别称它们为 f，g 的加、减、乘、除运算.

另外，我们认为 $\sin 2x$ 是将 $u=2x$ 代入 $\sin u$ 而得到的函数，称之为由 $\sin u$ 和 $u=2x$ 复合而成的函数. 本节介绍函数的两种运算 —— 四则运算和复合运算.

一、函数的四则运算

定义 1.2.1 设函数 f，g 的定义域分别为 $D(f)$ 和 $D(g)$，若 $D(f)\cap D(g)\neq\varnothing$，$\forall x\in D(f)\cap D(g)$，如图 1-15 所示，定义 f，g 的四则运算：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x),$$

$$(fg)(x)=f(x)g(x),$$

$$(af)(x)=af(x)\quad(a\text{ 为常数}),$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\quad(g(x)\neq 0).$$

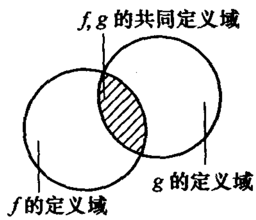


图 1-15

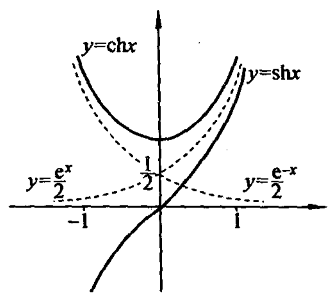


图 1-16

在工程技术中，我们常碰到一类所谓双曲函数，它们是由指数函数 e^x 和 e^{-x} 通过四则运算生成的. 定义如下：

双曲正弦 $\quad \mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad x \in \mathbf{R};$

双曲余弦 $\quad \mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \quad x \in \mathbf{R};$

双曲正切 $\quad \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R};$

双曲余切 $\quad \mathrm{coth}x = \frac{\mathrm{ch}x}{\mathrm{sh}x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\}.$

$y = \mathrm{sh}x$ 和 $y = \mathrm{ch}x$ 的图像如图 1-16 所示.

双曲函数有以下性质：

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1, \tag{1.2.1}$$

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y, \tag{1.2.2}$$

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y, \tag{1.2.3}$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}x \pm \mathrm{th}y}{1 \pm \mathrm{th}x\mathrm{th}y}, \tag{1.2.4}$$

$$\mathrm{coth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \mathrm{coth}x\mathrm{coth}y}{\mathrm{coth}x \pm \mathrm{coth}y}. \tag{1.2.5}$$

在此我们只证明式(1.2.1) 和式(1.2.2)，其余留给读者自行证明.

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}[(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)] = 1.\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{sh}(x + y) = \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)})$，而

$$\begin{aligned}\mathrm{sh}x\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y &= \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})(e^y + e^{-y}) + \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})(e^y - e^{-y}) \\ &= \frac{1}{4}(e^{x+y} + e^{x-y} - e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &\quad + \frac{1}{4}(e^{x+y} - e^{x-y} + e^{-x+y} - e^{-x-y}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{x+y} - e^{-(x+y)}).\end{aligned}$$

故

$$\mathrm{sh}(x + y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y + \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y.$$

同理可验证：$\mathrm{sh}(x - y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y - \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$.

例 1.2.1 设 $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}, & x > 0, \end{cases}$ $g(x) = \sqrt{x + 9}$. 求 $f \pm g, fg, \frac{f}{g}$.

解 先求出 f, g 的共同定义域. 因 $D(f) = R, D(g) = [-9, +\infty)$，故

$$D(f) \cap D(g) = [-9, +\infty)$$

于是有

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x) = \begin{cases} e^x \pm \sqrt{x+9}, & -9 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x} \pm \sqrt{x+9}, & x > 0; \end{cases}$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) = \begin{cases} e^x \sqrt{x+9}, & -9 \leqslant x \leqslant 0, \\ \sqrt{x}\sqrt{x+9}, & x > 0; \end{cases}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{e^x}{\sqrt{x+9}}, & -9 < x \leqslant 0, \\ \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+9}}, & x > 0. \end{cases}$$

二、复合运算

我们知道，一个复杂的事物是由诸简单事物构成的，自然科学工作者就是要揭示这种构成规律，将一个复杂的数学问题进行分解是数学思想方法的重要体现. 例如，$y = \ln(\sin x)$ 可以分解为 $y = \ln u, u = \sin x$，显然，后两个函数是基本初等函数. 而所谓复合运算与上面的分解恰好相反，即由一些较简单的函数采取“代人”的方法产生一个较为复杂的函数.

由于 $\ln u$ 的定义域为 $u > 0$，故仅当 $u = \sin x$ 的值域在 $(0, +\infty)$ 内时，将 $u = \sin x$ 代人 $y = \ln u$ 才能产生一个较复杂的函数 $\ln(\sin x)$.

1. 定义

定义 1.2.2 设 φ 为集合 $D(\neq \varnothing)$ 上的函数，函数 f 的定义域为 $D(f)$，$\forall x \in D$，有 $u = \varphi(x) \in D(f)$，则定义由

$$(f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) \quad (x \in D) \tag{1.2.6}$$

确定的函数为 f 与 φ 的**复合函数**（图 1-17），并称 $u = \varphi(x)$ 为**中间变量**.

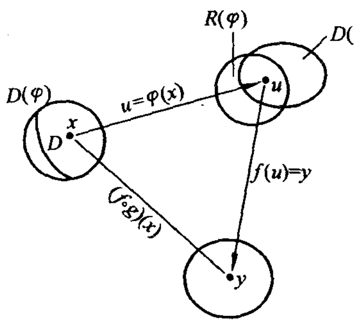


图 1-17