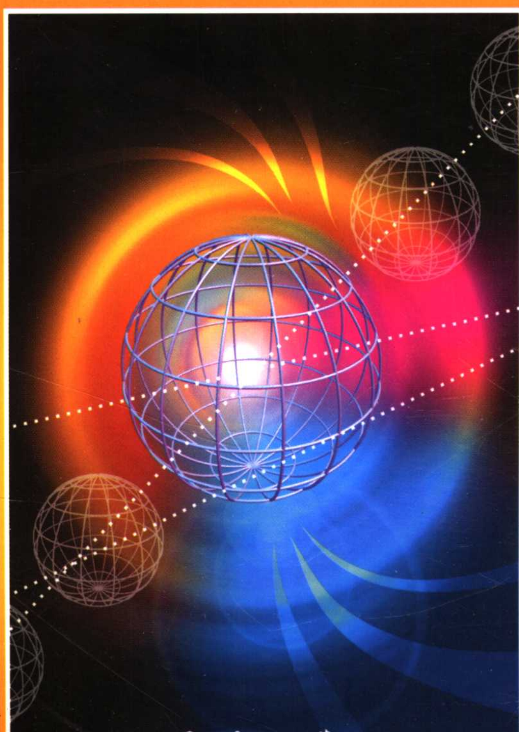
非线性动力学理论方法及应用

杨万利　王铁宁　编著



国防工業出版社
National Defense Industry Press

非线性动力学理论方法及应用

杨万利　王铁宁　编著

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书主要介绍非线性动力系统的基本理论与应用方法，包括解的存在惟一性、解对初值（或参数）的连续依赖性、动力系统平衡点的Liapunov稳定性、极限环、分支初步理论及非线性动力系统在军事技术研究中的简单应用。

本书可作为从事非线性动力系统理论及应用研究的本科生、研究生用的教材或参考书，也可供相关领域的科技工作者作为参考书。

图书在版编目（CIP）数据

非线性动力学理论方法及应用/杨万利，王铁宁编著.
北京：国防工业出版社，2007.2
ISBN 7-118-04681-7

Ⅰ.非... Ⅱ.①杨...②王... Ⅲ.非线性力学：动力学 Ⅳ.O322

中国版本图书馆CIP数据核字（2006）第086017号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044）
国防工业出版社印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 5¾ 字数 150 千字
2007年2月第1版第1次印刷 印数 1—3000 册 定价 20.00 元

国防书店：（010）68428422 发行邮购：（010）68414474
发行传真：（010）68411535 发行业务：（010）68472764

前　言

非线性动力系统理论在诸多科学技术研究中的重要作用已是勿庸置疑的了，其理论成果及思想方法也是日显丰富，要想在很短的时间内去了解非线性动力系统的理论已是几乎不可能的事情，尤其是分支理论、混沌与分形理论的日臻完善及其应用空间的广泛拓展，更为非线性动力系统的理论、方法及应用领域带来无限生机，同时也为全面了解并接受这个领域的思想方法带来困难。本书编写的初衷也正是基于尽可能地使读者在40学时至50学时的教学空间内对非线性动力系统的理论与方法有一个大致的了解和掌握，能使之在这一领域的理论研究与应用研究中具备一个相当的理论基础。

全书共分六章。第一章至第四章是非线性动力系统的基本理论，包括解的存在惟一性、解对初值（或参数）的连续依赖性、动力系统平衡点的 Liapunov 稳定性及极限环与分支初步理论，是进入非线性动力系统这一研究领域所必须具备的基础；第五章简单介绍离散动力系统与连续动力系统所产生的混沌现象；第六章重点介绍几个军事上用到的非线性动力系统模型。

本书只是非线性动力学理论、方法及应用研究的一个侧面，其全面的、较为系统的理论总结可参照书后所附的文献。本书编写过程中部分章节也是参照这些文献的主体思想及编写手法，在此也由衷地表示谢意。本书计算程序全部由夏晓东完成。

由于作者水平有限，加之成书时间仓促，错误之处在所难免，恳请读者提出宝贵意见。

作者

2006年11月

目　　录

第一章　常微分方程基本定理

本章简要介绍有关常微分方程的一些基本定理，这是研究和分析非线性动力系统的特点与规律所必要的理论基础。

第一节　解的存在性与惟一性

考虑如下 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中，t 称为时间变量，并设 $t \in I$，I 是 R^1 上的开区间（有限的或无穷的）；$x \in D \subset R^n$，D 是 R^n 上的区域（有界的或无界的）。向量函数 $F(t,x)$ 在 $I \times D$ 上连续。

定义 1.1.1　设函数 $g(x)$ 定义在 R^n 的某区域 W 上，

(1) 称 $g(x)$ 在 W 上是局部 Lipschitz 连续的，若 $\forall x_0 \in W$，存在 x_0 的邻域 $W_0 \subset W$，及常数 $K(x_0)$，满足

$$|g(x) - g(y)| \leqslant K(x_0) \| x - y \|, \forall x, y \in W_0$$

(2) 称 $g(x)$ 在 W 上是一致 Lipschitz 连续的，若存在常数 K，满足

$$|g(x) - g(y)| \leqslant K \| x - y \|, \forall x, y \in W$$

其中，$\| \cdot \|$ 表示 R^n 中向量的范数，这里，$\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$，$\| x \|$ 表示：

$$\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

对于向量值函数,也有如下 Lipschitz 连续的定义。

定义 1.1.2 设向量值函数 $G(x) = (g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x))$定义于 $W \subset R^n$ 上,

(1) 称 $G(x)$在 W 上是局部 Lipschitz 连续的,若 $\forall j = 1,2,\cdots, m$,$g_j(x)$在 W 上是局部 Lipschitz 连续的;或说 $\forall x_0 \in W$ 存在 x_0 的邻域 $W_0 \subset W$ 及常数 $K(x_0)$,使得

$$\| G(x) - G(y) \| \leqslant K(x_0) \| x - y \|, \forall x, y \in W_0$$

(2) 称 $G(x)$在 W 上是一致 Lipschitz 连续的,若 $\forall j = 1,2,\cdots, m$,$g_j(x)$在 W 上是一致 Lipschitz 连续的;或说存在常数 K,使得

$$\| G(x) - G(y) \| \leqslant K \| x - y \|, \forall x, y \in W$$

也可将上述有关 Lipschitz 连续的定义推广到一般的赋范线性空间上。

定义 1.1.3 设$(X, \| \cdot \|_X)$与$(Y, \| \cdot \|_Y)$为赋范线性空间,$W \subset X$,$F(x)$为定义于区域 W 上,取值在 Y 中的映射。

(1) 称 $F(x)$在 W 上是局部 Lipschitz 连续的,若 $\forall x_0 \in W$,均存在 x_0 的邻域 $W_0 \subset W$ 及常数 $K(x_0)$,使得

$$\| F(x) - F(y) \|_Y \leqslant K(x_0) \| x - y \|_X, \forall x, y \in W_0$$

(2) 称 $F(x)$在 W 上是一致 Lipschitz 连续的,若存在常数 K,使得

$$\| F(x) - F(y) \|_Y \leqslant K \| x - y \|_X, \forall x, y \in W$$

上述常数 $K(x_0)$或 K 称为 Lipschitz 常数。

下面可以给出 Cauchy 问题(1.1.1)的解的存在惟一性定理。

定理 1.1.1 设向量值函数 $F(t, x)$满足

(1) 在 $I \times D$ 上连续。

(2) 关于 x 在 D 上局部 Lipschitz 连续，且对 $t \in I$ 有一致的 Lipschitz 常数，则 $\forall t_0 \in I, x_0 \in D$，存在常数 $a>0$，使得 Canchy 问题(1.1.1)在区间 $J_0=[t_0-a, t_0+a]$ 上有惟一解 $x=x(t)$。

证明：下面分几步予以证明

(1) 化为等价积分方程：将 Cauchy 问题(1.1.1)转化为如下积分方程

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x(\tau))\mathrm{d}\tau \tag{1.1.2}$$

则问题(1.1.1)的解 $x(t)$ 满足方程(1.1.2)，反之，方程(1.1.2)的解 $x(t)$ 亦满足问题(1.1.1)。

(2) 构造向量函数列：$\forall x_0 \in D$，由于 D 为区域，即为开集，且 $F(t,x)$ 在 D 上是局部 Lipschitz 连续的，则 $\exists b>0$，及闭球 $D_0 = \{x \mid x \in R^n, \| x-x_0 \| \leqslant b\} \subset D$，使得

$$\| F(t,x) - F(t,y) \| \leqslant K(x_0) \| x-y \|, \forall x,y \in D_0, t \in I$$

注意到 $F(t,x)$ 对于 $t \in I$ 有一致的 Lipschitz 正常数，故 $K(x_0)$ 与 t 无关。取闭区间 $I_0 \subset I$，由 $F(t,x)$ 在 $I_0 \times D_0$ 上的连续性可知，存在常数 $M_0>0$，使得

$$\| F(t,x) \| \leqslant M_0, (t,x) \in I_0 \times D_0$$

取常数 a 满足

$$\begin{cases} 0 < a < \min\left\{\dfrac{b}{M_0}, \dfrac{1}{K(x_0)}\right\} \\ J_0 = [t_0 - a, t_0 + a] \subset I_0 \end{cases} \tag{1.1.3}$$

在 J_0 上构造向量函数序列如下

$$x_0(t) = x_0$$

$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x_0(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$x_2(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x_1(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

$$\vdots \tag{1.1.4}$$

$$x_{k+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x_k(\tau))\,\mathrm{d}\tau$$

注意到：$x_0 \in W_0$ 可知 $\| x_1(t) - x_0 \| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(\tau, x_0(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant M_0 | t - t_0 | < b$，且若 $x_k(t) \in W_0$，则 $\| F(\tau, x_k(\tau)) \| \leqslant M_0$，及

$$\| x_{k+1}(t) - x_0 \| = \left\| \int_{t_0}^{t} F(\tau, x_k(\tau))\,\mathrm{d}\tau \right\| \leqslant M_0 | t - t_0 | < b$$

即方程(1.1.4)所构造的向量函数序列$\{x_k(t)\}$是存在的，且满足

$$x_k(t_0) = x_0, k = 1, 2, \cdots \tag{1.1.5}$$

(3) 证明向量函数序列$\{x_k(t)\}$在 J_0 上的一致收敛性：

令 $$K_0 = \max_{t \in J_0} \| x_1(t) - x_0(t) \|$$

则对于 $t \in J_0$ 时，有

$$\begin{aligned} \| x_{k+1}(t) - x_k(t) \| &= \left\| \int_{t_0}^{t} [F(\tau, x_k(\tau)) - F(\tau, x_{k-1}(\tau))]\,\mathrm{d}\tau \right\| \\ &\leqslant \int_{t_0}^{t} \| F(\tau, x_k(\tau)) - F(\tau, x_{k-1}(\tau)) \|\,\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant K(x_0) \int_{t_0}^{t} \| x_k(\tau) - x_{k-1}(\tau) \|\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

令 $k = 0, 1, 2, \cdots$，便由方程(1.1.6)可推得

$$\| x_2(t) - x_1(t) \| \leqslant a K_0 K(x_0)$$

$$\| x_3(t) - x_2(t) \| \leqslant K_0 (a K(x_0))^2$$

$$\vdots$$

$$\| x_{k+1}(t) - x_k(t) \| \leqslant K_0(aK(x_0))^k \tag{1.1.7}$$

$$\vdots$$

则 $\forall m,p>0$,有

$$\begin{aligned}\| x_{m+p}(t) - x_m(t) \| &\leqslant \sum_{i=1}^{p} \| x_{m+i}(t) - x_{m+i-1}(t) \| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{p} K_0(aK(x_0))^{m+i-1} \\ &= (aK(x_0))^m K_0 \cdot \sum_{i=0}^{p-1} (aK(x_0))^i \\ &\leqslant \frac{K_0}{1-aK(x_0)}(aK(x_0))^m \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

由于 $aK(x_0)=\alpha<1$,故 $\{x_k(t)\}$ 为 R^n 上一致 Cauchy 列,即存在 J_0 上连续函数 $x(t)$,使得

$$\lim_{k\to\infty} x_k(t) = x(t) \tag{1.1.9}$$

(4) Cauchy 问题(1.1.1)解的存在惟一性:由 $x_k(t)$ 所满足的方程(1.1.4)及 $F(t,x)$ 的连续性,便知 $x(t)$ 满足积分方程(1.1.4),从而 Cauchy 问题(1.1.1)的解是存在的。

下证(1.1.1)的解的惟一性,用反证法,设问题(1.1.1)在 $J_0\times D_0$ 上还有另一解 $y(t)$。则 $x(t)$ 与 $y(t)$ 均满足积分方程(1.1.2),即

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau,x(\tau))\mathrm{d}\tau$$

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau,y(\tau))\mathrm{d}\tau$$

则

$$x(t) - y(t) = \int_{t_0}^{t} [F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, y(\tau))] \mathrm{d}\tau$$

设 $A = \max_{t \in J_0} \| x(t) - y(t) \|$，则由 $x(t)$、$y(t)$ 的连续性知，存在 $t_1 \in J_0$，使得

$$\| x(t_1) - y(t_1) \| = A > 0,$$

$$A = \| x(t_1) - y(t_1) \| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} [F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, y(\tau))] \mathrm{d}\tau \right\|$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t_1} \| F(\tau, x(\tau)) - F(\tau, y(\tau)) \| \mathrm{d}\tau$$

$$\leqslant K(x_0) a \cdot A < A$$

矛盾。

定理 1.1.1 的证明是构造性的，序列 $\{x_k(t)\}$ 常被称为 Cauchy 问题(1.1.1)的 Picard 近似解序列。定理 1.1.1 还可用压缩映像定理予以证明。为此，首先引进压缩映像定理（其证明可在标准的泛函分析教材中找到）。

压缩映像定理：若 D 为 Banach 空间 X 的一个非空闭子集，T 为 D 到自身的压缩映像，即存在常数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$，使得

$$\| T(x_1) - T(x_2) \| \leqslant \alpha \| x_1 - x_2 \|, \forall x_1, x_2 \in D,$$

则 T 在 D 上存在惟一的不动点 x^*，即存在惟一的点 $x^* \in D$，满足 $T(x^*) = x^*$。

现在，便可以用压缩映像定理给出定理 1.1.1 的另一证明。

采用以上记号，做线性空间

$$B = \{ f(t) \mid f(t) \text{ 定义在 } J_0 \text{ 上，取值于 } R^n \text{ 中，且连续.} \}$$

若 $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t))$，取

$$\| f \| = \left[\sum_{k=1}^{n} \left(\max_{t \in J_0} | f_k(t) | \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

则 B 为 Banach 空间，令

$$D_1 = \{f(t) \mid f \in B, \text{且 } \forall t \in J_0, f(t) \in D_0\}$$

则 D_1 为 B 的非空闭子集。作映射

$$T: x(t) \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\tau, x(\tau))\,\mathrm{d}\tau, \ \forall x \in D_1$$

则易证 T 为 D_1 到自身的压缩映射。

注：上述定理中，$F(t,x)$ 关于变量 x 的 Lipschitz 连续性是必要条件，如果去掉 Lipschitz 连续性的假设，我们只可得到解的存在性，便是如下定理（证明从略）。

定理 1.1.2（Cauchy – Peano） 若 $F(t,x)$ 在 $I \times D$ 上连续，则对任一 $(t_0, x_0) \in I \times D$，存在 $a > 0$，Cauchy 问题（1.1.1）在区间 $J_0 = [t_0 - a, t_0 + a]$ 上有解。

对于定理 1.1.1 中的常数 a，我们还有一个粗略的估计。便是如下结论（证明从略）。

定理 1.1.3 设向量值函数 $F(t,x)$ 满足

(1) 在 $G_0 = \{(t,x) \mid |t - t_0| \leqslant h, \|x - x_0\| \leqslant b\}$ 上连续，且 $M_0 = \max\limits_{G_0} \|F(t,x)\|$

(2) 对 x 是 Lipschitz 连续的

$$\|F(t,x) - F(t,y)\| \leqslant K_0 \|x - y\|, (t,x), (t,y) \in G_0$$

则 Cauchy 问题（1.1.1）在区间 $|t - t_0| \leqslant a$ 上有惟一解，且 $a \geqslant \min\left(h, \dfrac{b}{M_0}\right)$。

第二节　解对初值（或参数）的连续依赖性

在理论和应用上需要考虑较（1.1.1）更一般的如下带参数的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t, x, \mu) \\ x(t_0, \mu) = x_0 \end{cases} \tag{1.2.1}$$

本节讨论初值 x_0 及参数值 μ 变化时，Cauchy 问题(1.2.1)的解的变化情况。为此，先引进一个重要引理。

引理 1.2.1(Gronwall)　设 $g(t)$ 与 $\varphi(t)$ 是区间 $[t_0,t_1]$ 上的连续非负、实值函数；常数 $\lambda \geqslant 0, r \geqslant 0$，且 $g(t)$、$\varphi(t)$ 满足如下不等式

$$\varphi(t) \leqslant \lambda + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\varphi(\tau) + r]\,\mathrm{d}\tau, t \in [t_0, t_1] \quad (1.2.2)$$

则 $t \in [t_0, t_1]$ 时，

$$\varphi(t) \leqslant (\lambda + rT)\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau} \quad (1.2.3)$$

其中 $T = t_1 - t_0$。

证明：分两种情形予以考虑

(1) $\lambda > 0$ 时；

由条件知，$\forall t \in [t_0, t_1]$，

$$\lambda + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\varphi(\tau) + r]\,\mathrm{d}\tau > 0$$

从而可得如下不等式(由不等式(1.2.2))

$$\frac{g(t)\varphi(t) + r}{\lambda + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\varphi(\tau) + r]\,\mathrm{d}\tau}$$

$$\leqslant g(t) + \frac{r}{\lambda + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\varphi(\tau) + r]\,\mathrm{d}\tau} \leqslant g(t) + \frac{r}{\lambda + r(t - t_0)} \quad (1.2.4)$$

再令 $u(t) = \lambda + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\varphi(\tau) + r]\,\mathrm{d}\tau$，则(1.2.4) 成为

$$\frac{1}{u(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}(u(t))}{\mathrm{d}t} \leqslant g(t) + \frac{r}{\lambda + r(t - t_0)} \quad (1.2.5)$$

在 $[t_0, t]$ 上积分(1.2.5)式，可得

$$\ln[u(t)] - \ln\lambda \leqslant \int_{t_0}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau + \ln[\lambda + r(t - t_0)] - \ln\lambda$$

即

$$\ln[u(t)] \leqslant \int_{t_0}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau + \ln[\lambda + r(t - t_0)]$$

整理得

$$\varphi(t) \leqslant u(t) \leqslant [\lambda + rT]\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{1.2.6}$$

(2) $\lambda = 0$ 时;此时 $\forall \lambda_n > 0$,有

$$\varphi(t) \leqslant \lambda_n + \int_{t_0}^{t} [g(\tau)\varphi(\tau) + r]\mathrm{d}\tau \tag{1.2.7}$$

依上段(1)的证明,可得不等式

$$\varphi(t) \leqslant [\lambda_n + rT]\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} g(\tau)\mathrm{d}\tau} \tag{1.2.8}$$

令 $\lambda_n \to 0$,便得引理成立。

有了以上准备,我们便可给出 Cauchy 问题(1.2.1)的解关于初值的连续依赖性结论。

定理 1.2.2 假设向量值函数 $F(t,x)$ 满足:

(1) 在 $I \times D$ 上连续;

(2) 关于 x 在 D 上局部 Lipschitz 连续,且对 $t \in I$ 有一致的 Lipschitz 常数;

(3) $x(t,y_0)$ 与 $x(t,z_0)$ 分别为 Cauchy 问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t,x) \\ x(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

与

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(t,x) \\ x(t_0) = z_0 \end{cases} \tag{1.2.10}$$

在区间$[t_0,t_1]\subset I$上的解，

则$t\in[t_0,t_1]$时，

$$\|x(t,y_0)-x(t,z_0)\| \leqslant \|y_0-z_0\| e^{L(t-t_0)} \quad (1.2.11)$$

其中L为Lipschitz常数。

证明：如图1－2－1。设B为(t,x)平面上由解曲线$x(t,y_0)$及$x(t,z_0)$上"纵坐标"所组成的点的集合，即

$$B=\{x\mid x=x(t,y_0)\ 或\ x=x(t,z_0),其中\ t\in[t_0,t_1]\}$$

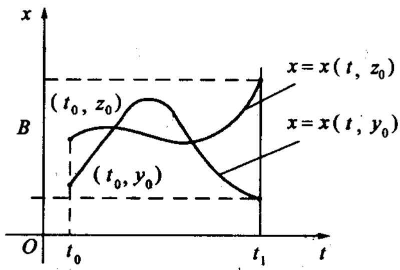


图1－2－1

由$x(t,y_0)$及$x(t,z_0)$的连续性可知：B为有界闭集，且$B\subset D$，再由$F(t,x)$关于x在D上的局部Lipschitz连续性及有限覆盖定理可知，存在常数L，使得$\forall t\in[t_0,t_1]$，一致地有

$$\|F(t,x)-F(t,y)\| \leqslant L\|x-y\|,\ x、y\in B \quad (1.2.12)$$

从而$t\in[t_0,t_1]$时

$$\begin{aligned}\|x(t,y_0)-x(t,z_0)\| &\leqslant \|y_0-z_0\| \\ &+\left\|\int_{t_0}^{t}[F(\tau,x(\tau,y_0))-F(\tau,x(\tau,z_0))]\mathrm{d}\tau\right\| \\ &\leqslant \|y_0-z_0\|+\int_{t_0}^{t}L\|x(\tau,y_0)-x(\tau,z_0)\|\mathrm{d}\tau \quad (1.2.13)\end{aligned}$$

应用 Gronwall 引理 1.2.1，便得

$$\| x(t,y_0) - x(t,z_0) \| \leqslant \| y_0 - z_0 \| e^{L(t-t_0)} \quad (1.2.14)$$

结合解的存在惟一性定理 1.1.1，还可得到如下结论。

定理 1.2.3 假设向量值函数 $F(t,x)$ 满足

(1) 在 $I \times D$ 上连续。

(2) 关于 x 在 D 上局部 Lipschitz 连续，且对 $t \in I$ 有一致的 Lipschitz 常数。

(3) 在区间 $[t_0,t_1]$ 上有解 $x(t,y_0)$，且 $[t_0,t_1] \subset I$，$y_0 \in D$；则存在 y_0 的邻域 E，$E \subset D$，使得 $z_0 \in E$ 时，Cauchy 问题(1.1.1)便在 $[t_0,t_1]$ 上有惟一解 $x(t,z_0)$，且满足

$$\| x(t,y_0) - x(t,z_0) \| \leqslant \| y_0 - z_0 \| e^{L(t-t_0)}, t \in [t_0,t_1]$$

下面考虑解对参数的连续依赖性。类似于定理 1.1.1 的证明，我们可得如下关于 Cauchy 问题 1.2.1 的存在惟一性结论。

定理 1.2.4 假设向量值函数 $F(t,x,\mu)$ 满足：

(1) 在 $I \times D \times I_1$ 上连续，其中 I、I_1 为 R^1 内的开区间，D 为 R^n 上的区域。

(2) 关于 x 在 D 上是局部 Lipschitz 连续的，且对 $t \in I$，$\mu \in I_1$ 有一致的 Lipschitz 常数。

则 $\forall t_0 \in I$，$x_0 \in D$，$\mu_0 \in I_1$，存在常数 $a > 0$，$\rho > 0$，使得当 $|\mu - \mu_0| \leqslant \rho$ 时，Cauchy 问题(1.2.1)在区间 $I_0 = [t_0 - a, t_0 + a]$ 上存在关于 t 和 μ 连续的惟一解 $x(t,\mu)$。

进一步，若 $f(t,x,\mu)$ 对一切变量解析，则上述解 $x(t,\mu)$ 是 μ 的解析函数。

关于 Cauchy 问题(1.2.1)对于参数 μ 的连续可微性，我们有下面结论。

定理 1.2.5 在定理 1.2.4 的假设(1)(2)之下，若 $F(t,x,\mu)$ 对变量 x 及 μ 有连续偏微商，则 Cauchy 问题(1.2.1)的解 $x = x(t,\mu)$ 对 μ 连续可微。