UMSS

大学数学科学丛书 —20

特殊矩阵分析及应用

黄廷祝 杨传胜 编著

科学出版社
www.sciencep.com

大学数学科学丛书 20

特殊矩阵分析及应用

黄廷祝　杨传胜　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书专门研究具有广泛应用背景的非负矩阵、M矩阵、H矩阵等特殊矩阵类及其应用. 全书共分七章，详细阐述了几类特殊矩阵的性质和判定方法，内容包括非负矩阵的 Perron-Frobenius 理论和逆特征值问题、M矩阵和H矩阵的结构、性质和判定方法、逆M矩阵的组合性质、随机矩阵和稳定矩阵的基本性质，以及特殊矩阵类的非线性推广和若干应用.

本书可作为高等院校基础数学、计算数学和应用数学专业高年级本科生和研究生的教学用书，也可作为相关专业教学、科研和技术人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

特殊矩阵分析及应用/黄廷祝，杨传胜编著. —北京：科学出版社，2007
(大学数学科学丛书；20)
ISBN 978-7-03-019025-3

Ⅰ.特… Ⅱ.①黄…②杨… Ⅲ.矩阵分析 Ⅳ.O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 076166 号

责任编辑：赵彦超 吕 虹/责任校对：郑金红
责任印制：赵德静/封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007年6月第 一 版 开本：B5（720 × 1000）
2007年6月第一次印刷 印张：12
印数：1—3 000 字数：219 000

定价：29.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈明辉〉）

作者简介

黄廷祝，电子科技大学应用数学学院教授、博士生导师. 在西安交通大学获学士、硕士和博士学位.

主要从事大型线性方程组求解与预条件技术、矩阵分析与计算、线性互补问题和数值代数在图像分析中的应用等领域的研究，并发表系列研究论文. 曾获省部级科技进步奖四项（三项为主持）. 2004 年，主讲的“线性代数与空间解析几何”被评为国家精品课程，编写的该课程教材被评为国家“十五”和“十一五”规划教材. 曾获四川省教学成果一等奖两项、三等奖一项. 主持全国教改项目三项.

曾获第二届国家级教学名师奖. 现为享受国务院颁发政府特殊津贴专家、四川省学术和技术带头人、四川省有突出贡献的优秀专家，入选教育部“新世纪优秀人才支持计划”. 现任教育部数学基础课程教学指导分委员会委员、中国计算数学学会理事和青年工作委员会成员、全国高教研究会数学学科委员会成员、四川省计算数学学会副理事长.

杨传胜，博士，2003 年毕业于西安交通大学理学院，现为电子科技大学教师. 长期从事矩阵计算与矩阵分析的教学和科研工作，研究涉及特殊矩阵、矩阵计算与数值优化、预处理技术、大规模特殊矩阵的分析与计算等领域. 在国内外著名学术刊物发表学术论文 10 余篇. 参与编写国家精品课程《线性代数与空间解析几何》的资源库建设.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学. 从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵. 正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同.

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的. 作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱. 数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视. 数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会到数学的精神实质和思想方法. 在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点.

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好.

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前言

从 20 世纪初至今，非负矩阵、M 矩阵、H 矩阵及与之密切相关的其他特殊矩阵的应用日益广泛. 对这些特殊矩阵的研究也日益受到人们的重视，有关的研究论文达数百篇之多，是基础数学、计算数学和应用数学中较为活跃的研究领域之一. 作者将该领域中有关结果的基本思想和主要方法进行分类、归纳和整理，汇集成书，书中也包括了作者近几年来在该领域的部分研究成果. 国际上许多著名数学家从事这个领域的研究，并且取得了许多重要的成果. 我国的数学工作者起步较晚，自 20 世纪 80 年代以来，有一批数学工作者和从事应用科学研究的专家开展了这个领域的科研和教学工作，并已取得许多研究成果.

第一章介绍非负矩阵的谱性质. 我们利用 Collatz-Wielandt 函数得到著名的 Perron-Frobenius 定理，并且介绍非负矩阵与有向图的关系、非负矩阵的谱估计和非负矩阵的逆特征值问题.

第二章介绍非奇异 M 矩阵和一般 M 矩阵的性质. 包括 M 矩阵的分解、M 矩阵的判别法、M 矩阵的不等式等，并证明了 M 矩阵的若干重要的等价命题.

第三章研究 H 矩阵的性质和相关算法. 主要介绍 H 矩阵的简捷判别法、块对角占优矩阵和等对角优势矩阵的性质以及 H 矩阵的迭代法.

第四章研究逆 M 矩阵的组合性质，即利用图论的相关知识研究逆 M 矩阵的组合结构、逆 M 矩阵在 Hadamard 积下的封闭性和不可约逆 M 矩阵的广义 Perron 补的相关性质，并完全刻画了三对角逆 M 矩阵的组合性质.

第五章研究两类其他特殊矩阵：稳定矩阵和随机矩阵. 本章给出了这两类矩阵的基本性质和应用.

第六章介绍非负矩阵理论及其相关矩阵类在四个主要方面的应用. 我们选择方程组求解的迭代法、投入产出分析、齐次 Markov 链和线性互补问题四个方面的问题进行介绍.

第七章介绍几类特殊矩阵的非线性推广. 在给出一些定义和基本性质的基础上，主要介绍了严格对角占优映射和广义对角占优映射的基本性质.

本书由黄廷祝、杨传胜主编. 各章编写者分别为：杨传胜（第一章和第四章）、王转德（第二章和第六章第 1～3 节）、高中喜（第三章）、干泰彬（第五章第 2 节和第七章）、刘福体（第五章第 1 节和第六章第 4 节）.

本书的出版得到了电子科技大学研究生院学科建设经费的资助，也得到了电

子科技大学应用数学学院的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢.

由于作者水平有限，错误在所难免，敬请同行和广大读者不吝批评指正.

作 者

2006 年 10 月于成都

目　　录

第一章　非负矩阵

§1.1　引　　言

1907 年，Perron[1]首先发现，任何一个 n 阶正矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$ 是矩阵 A 的特征值. Frobenius[2~4]在 1908～1912 年间把 Perron 的结论推广到非负矩阵，特别是不可约非负矩阵的情形，从而使非负矩阵理论得到迅速发展，然后，通过著名的矩阵论专家 Braue A，Johnson C R，Varga R S，Ostrowski A 等卓有建树的工作，现在已逐步形成比较完美的理论体系. 非负矩阵理论一直是线性代数中最活跃的研究领域之一，并且在数学和自然科学的许多其他分支以及社会科学中有着广泛应用. 例如，在各类矩阵的谱分析，尤其是对于 Markov 链理论、方程组的求解、偏微分方程(组)数值解的一般理论的应用，一直是科学家十分关心的热门话题.

首先介绍有关定义和符号. 设 $\mathbf{R}^n$ 表示实数域 $\mathbf{R}$ 上所有 n 元数组 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 集合构成的 n 维向量空间. $\mathbf{R}^n$ 中元素 x 称为 n 维向量. 实数 x_i 称为 n 维向量 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的第 i 个坐标. $\mathbf{R}_+^n$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中坐标非负的 n 维向量的集合. $\mathbf{R}_+^n$ 中的向量 x 称为 n 维非负向量，记为 $x\geqslant 0$. 如果非负向量 x 的坐标都大于零，则称 x 为正向量，记为 $x>0$. 设 $\mathbf{R}^{m\times n}$($\mathbf{C}^{m\times n}$)表示实数域 $\mathbf{R}$(复数域 $\mathbf{C}$)上所有 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的集合. 如果矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的所有元素 $a_{ij}\geqslant 0$，则称矩阵 A 为非负矩阵，记为 $A\geqslant 0$. 非负矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 中的所有元素 $a_{ij}>0$，则称矩阵 A 为正矩阵，记为 $A>0$. 矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 组成的集合称为 A 的谱，记为 $\sigma(A)$，即 $\sigma(A)=\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$. 矩阵 A 的 n 个特征值的模的最大值称为 A 的谱半径，记为 $\rho(A)$，即 $\rho(A)=\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\}$. 记 $\mathbf{N}=\{1, 2, \cdots, n\}$.

§1.2　不可约非负矩阵

设矩阵 A 是 n 阶方阵，如果存在一个置换矩阵 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使得 $B=PAP^{\mathrm{T}}$，则称矩阵 A 同步于 B.

定义 1.2.1　设 n 阶方阵 $A\geqslant 0$，如果存在一个置换矩阵 $P\in\mathbf{R}^{n\times n}$，使得

$$PAP^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

其中 B 和 D 分别是 k,l 阶方阵，$k\geqslant1$ 和 $l\geqslant1$，则称 A 是可约矩阵；否则称 A 是不可约矩阵.

由定义知，每个一阶矩阵都是不可约矩阵. 以后如没有特别说明，我们所说的不可约矩阵都是非零矩阵.

例 1.2.1 设非负矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是不可约矩阵，向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\geqslant0$，$Ax=0$，则 $x=0$.

证 假设 $x_k>0$，根据题意，则

$$0=(Ax)_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant a_{ik}x_k.$$

因此对任意的下标 $i\in\mathbf{N}$，有 $a_{ik}=0$，即矩阵 A 的第 k 列是零列，于是 A 是可约矩阵，与题设矛盾，所以 $x=0$.

下面给出不可约非负矩阵的几个基本性质.

定理 1.2.1 设 $n(n\geqslant2)$ 阶非负矩阵 A 是不可约矩阵，非负向量 x 恰好有 k 个正坐标，$1\leqslant k\leqslant n-1$，则向量 $y=(I+A)x$ 有多于 k 个正坐标.

证 根据题意，x 恰好有 k 个正坐标，其他坐标为零，则存在 n 阶置换矩阵 P，使得 $Px=\begin{bmatrix}x^{(1)}\\0\end{bmatrix}$，其中 $x^{(1)}\in\mathbf{R}^k$ 为正向量. 由于矩阵 $A\geqslant0$，在向量 $y=(I+A)x=x+Ax$ 中，零坐标的个数不大于 $n-k$，假设为 $n-k$，这表示当 $x_i=0$ 时有 $(Ax)_i=0$，即 $Py=\begin{pmatrix}y^{(1)}\\0\end{pmatrix}$，其中 $y^{(1)}\in\mathbf{R}^k$ 为正向量. 同时，由于 $Py=Px+PAP^{\mathrm{T}}Px$，因此

$$\begin{pmatrix}y^{(1)}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(1)}\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x^{(1)}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^{(1)}\\0\end{pmatrix}+\begin{bmatrix}A_{11}x^{(1)}\\A_{21}x^{(1)}\end{bmatrix},$$

其中 $PAP^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}$，由此可知 $A_{21}x^{(1)}=0$，且 $x^{(1)}>0$，所以有 $A_{21}=0$，这与矩阵 A 是不可约矩阵矛盾，所以向量 $y=(I+A)x$ 有多于 k 个正坐标.

推论 1.2.1 设 n 阶非负矩阵 A 是不可约的，非负向量 $x\neq0$，则 $(I+A)^{n-1}x>0$.

推论 1.2.2 设 n 阶矩阵 $A\geqslant0$，则 A 是不可约矩阵的充要条件是 $(I+A)^{n-1}>0$.

证 如果 A 是不可约矩阵，根据推论 1.2.1，则

$$(I+A)^{n-1}e_i>0,\quad i\in\mathbf{N},$$

其中向量 e_i 是第 i 个分量为 1，其他分量为 0 的向量. 换言之，矩阵 $(I+A)^{n-1}$ 所有列为正向量，即 $(I+A)^{n-1}>0$.

反之，假设 A 是可约矩阵，根据定义 1.2.1，存在一个置换矩阵 P，使得

$$PAP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

易知

$$P(I+A)^{n-1}P^{\mathrm{T}} = (I+PAP^{\mathrm{T}})^{n-1} = \begin{pmatrix} I+B & C \\ 0 & I+D \end{pmatrix}^{n-1}$$

有零元素，即$(I+A)^{n-1}$有零元素，这与假设矛盾，故 A 是不可约矩阵.

定理 1.2.2　不可约非负矩阵的非负特征向量必是正向量.

证　假设 $Ax=\lambda x$，其中 $A\geqslant 0$ 是不可约的，非零特征向量 $x\geqslant 0$，显然 λ 是矩阵 A 的非负特征值. 由于

$$(I+A)x = (1+\lambda)x.$$

如果向量 x 有 k 个正坐标，$1\leqslant k<n$，则$(1+\lambda)x$ 同样有 k 个正坐标，但由定理 1.2.1 知，$(I+A)x$ 有多于 k 个正坐标，假设错误，因此，向量 $x>0$.

记 n 阶非负矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$的 k 次幂 A^k 的(i,j)位置上的元素为 $a_{ij}^{(k)}$.

定理 1.2.3　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}\geqslant 0$，则 A 是不可约矩阵的充分必要条件是对每个 $i,j\in\mathbf{N}$，都存在正整数 k，使得 $a_{ij}^{(k)}>0$.

证　假设矩阵 A 是不可约矩阵，根据推论 1.2.2 知

$$(I+A)^{n-1} > 0.$$

设 $B=(b_{ij})=(I+A)^{n-1}A$，显然 $B>0$，把 $B=(I+A)^{n-1}A$ 展开得

$$B = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_2A^2 + c_1A,$$

则

$$b_{ij} = a_{ij}^{(n)} + c_{n-1}a_{ij}^{(n-1)} + \cdots + c_2a_{ij}^{(2)} + c_1a_{ij} > 0, \quad \forall i,j\in\mathbf{N}.$$

由此可得，对每个 $i,j\in\mathbf{N}$，都存在正整数 k，使得 $a_{ij}^{(k)}>0$.

反之，假设矩阵 A 是可约矩阵，根据定义，存在置换矩阵 P，使得

$$PAP^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

其中矩阵 B 是 $l\times l$ 矩阵. 有

$$(PAP^{\mathrm{T}})^k = PA^kP^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} B^k & F \\ 0 & D^k \end{bmatrix},$$

即满足 $l+1\leqslant i\leqslant n$ 和 $1\leqslant j\leqslant l$ 的 i,j，PA^kP^{T}的(i,j)位置的元素对任意的正整数 k 都是零，所以矩阵 A 是不可约矩阵.

设矩阵 A 是不可约非负矩阵，下面利用矩阵 A 构造一个函数来研究不可约非负矩阵的结构性质和谱性质.

定义 1.2.2　设 A 是 n 阶不可约非负矩阵，任意向量 $x\geqslant 0$，且 $x\neq 0$，函数

$$r_A(x) = \min_{x_i>0}\frac{(Ax)_i}{x_i}$$

称为关于矩阵 A 的 Collatz-Wielandt 函数，简称为 A 的 C-W 函数.

例 1.2.2　设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$是 n 阶不可约非负矩阵，$e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$，则

$$r_A(e)=\min\left\{\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\right\}=r,$$

这里 r 是矩阵 A 的最小行和.

定理 1.2.4　设 A 是 n 阶不可约非负矩阵，$r_A(x)$是伴随于矩阵 A 的 C-W 函数，则

(1) 函数 $r_A(x)$是零次齐次和有界函数；

(2) 如果非负向量 $x\neq 0$，数 ρ 满足 $Ax\geqslant \rho x$，则 $r_A(x)\geqslant\rho$；

(3) 如果非负向量 $x\neq 0$，$y=(I+A)^{n-1}x$，则 $r_A(y)\geqslant r_A(x)$.

证　(1) 对任意实数 $t>0$ 和非负向量 $x\neq 0$，因为

$$r_A(tx)=\min_{tx_i>0}\frac{(Atx)_i}{(tx)_i}=\min_{tx_i>0}\frac{t(Ax)_i}{t(x)_i}=\min_{x_i>0}\frac{(Ax)_i}{x_i}=r_A(x),$$

即 $r_A(x)$是零次齐次函数. 下面证明 $r_A(x)$是有界函数. 显然 $r_A(x)\geqslant 0$. 设数 c 表示矩阵 A 的最大列和，即 $c=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}$. 根据 $r_A(x)$的定义，对于所有的下标 $j\in \mathbf{N}$，$r_A(x)x_j\leqslant(Ax)_j$，所以有

$$\begin{aligned}r_A(x)\sum_{j=1}^{n}x_j&=\sum_{j=1}^{n}r_A(x)x_j\leqslant\sum_{j=1}^{n}(Ax)_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{jk}x_k\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{jk}\right)x_k\leqslant c\sum_{k=1}^{n}x_k,\end{aligned}$$

故 $r_A(x)\leqslant c$.

(2) 根据函数 $r_A(x)$的定义，有 $Ax-r_A(x)x\geqslant 0$，且向量 x 有下标 k，使得 $(Ax)_k=r_A(x)x_k$. 假设 $r_A(x)<\rho$，则$(Ax)_k-\rho x_k<(Ax)_k-r_A(x)x_k=0$. 因此 $(Ax-\rho x)_k<0$，即 $Ax-\rho x$ 的第 k 个坐标是负的，这与题设矛盾，所以 $r_A(x)\geqslant\rho$.

(3) 因为 $Ax-r_A(x)x\geqslant 0$，所以$(I+A)^{n-1}Ax-(I+A)^{n-1}r_A(x)x=A(I+A)^{n-1}x-r_A(x)(I+A)^{n-1}x\geqslant 0$，即 $Ay-r_A(x)y\geqslant 0$. 根据命题(2)，有 $r_A(y)\geqslant r_A(x)$. 这就完成了本定理的证明.

设 E^n 是由

$$E^n=\left\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}_+^n\;\middle|\;\sum_{i=1}^{n}x_i=1\right\}$$

所定义的 $\mathbf{R}^n$ 的子集.

根据定理 1.2.4 命题(1)，我们只需要在 E^n 中讨论 $r_A(x)$即可. 注意到 E^n 是有界的闭集合. 如果函数 $r_A(x)$在集合 E^n 上连续，则 $r_A(x)$在 E^n 上可以取得最大

值. 可惜 $r_A(x)$在 E^n 的边界上不一定连续. 例如, 如果 $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\0&2&1\end{pmatrix}$, 对于任意 $\varepsilon>0$, 取 $x(\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon}\begin{pmatrix}1\\0\\\varepsilon\end{pmatrix}$, 则 $Ax(\varepsilon)=\frac{1}{1+\varepsilon}\begin{pmatrix}2+\varepsilon\\2+\varepsilon\\\varepsilon\end{pmatrix}$, 且 $r_A(x)=\min\left\{2+\varepsilon,\frac{\varepsilon}{\varepsilon}\right\}=1$. 可是 $r_A(x(0))=2\neq 1=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}r_A(x(\varepsilon))$.

定理 1.2.5 设 A 是 n 阶不可约非负矩阵, 则存在正向量 $x^{(0)}\in E^n$, 使得 $r_A(x^{(0)})=\max\limits_{x\in E^n}\{r_A(x)\}$.

证 构造一个集合, 设

$$G=(I+A)^{n-1}E^n=\{y\,|\,y=(I+A)^{n-1}x,x\in E^n\},$$

则集合 G 是有界闭集. 由于矩阵 A 是不可约非负矩阵, 由推论 1.2.1 知, G 中所有向量 $y>0$. 由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}r_A(x+\Delta x)=r_A(x)$, 所以 $r_A(x)$在 G 上连续. 连续函数 $r_A(x)$ 在 G 中某点 $y^{(0)}=(y_1^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})^{\mathrm T}$ 取得最大值. 设 $x^{(0)}=(y_1^{(0)},y_2^{(0)},\cdots,y_n^{(0)})^{\mathrm T}\Big/\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{(0)}\in E^n$, 设 $\forall\, x\in E^n$. 令 $y=(I+A)^{n-1}x$, 根据定理 1.2.4(3), 有 $r_A(x)\leqslant r_A(y)\leqslant r_A(y^{(0)})$. 同时有 $y^{(0)}=(\sum\limits_{i=1}^{n}y_i^{(0)})x^{(0)}$, 由定理 1.2.4(1), $r_A(x^{(0)})=r_A(y^{(0)})$, 即存在向量 $x^{(0)}\in E^n$, 使得 $r_A(x^{(0)})=\max\limits_{x\in E^n}\{r_A(x)\}$.

上面我们已经讨论了不可约非负矩阵的 C-W 函数, 下面我们利用 C-W 函数的性质来证明著名的 Perron-Frobenius 定理的第一部分.

定理 1.2.6 设 A 是 n 阶不可约非负矩阵, 则

(1) 矩阵 A 的谱半径 $\rho(A)$是 A 的特征值;

(2) A 有一个对应于 $\rho(A)$的正特征向量.

证 矩阵 A 是不可约非负矩阵, 根据定理 1.2.5, 存在正向量 $x^{(0)}\in E^n$, 使得对于任意非负向量 $x\in E^n$, 都有 $r_A(x^{(0)})\geqslant r_A(x)$. 设 $r=r_A(x^{(0)})$, 即 $r=\max\{r_A(x)\,|\,x\in E^n\}$.

首先, 证明 $r>0$. 取 $e=\frac{1}{n}(1,1,\cdots,1)^{\mathrm T}$, 则

$$r\geqslant r_A(e)=\min_i\frac{(Ae)_i}{e_i}=\min_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}>0,$$

由于矩阵 A 不能够有零行, 所以 $r>0$.

其次, 证明 r 是 A 的一个特征值. 我们有

$$Ax^{(0)}-rx^{(0)}\geqslant 0.$$

假设 $y=Ax^{(0)}-rx^{(0)}\neq 0$,根据推论 1.2.1,有

$$(I+A)^{n-1}(Ax^{(0)}-rx^{(0)})>0,$$

即

$$Ay^{(0)}-ry^{(0)}>0,$$

其中 $y^{(0)}=(I+A)^{n-1}x^{(0)}$. 由于 $Ay^{(0)}-ry^{(0)}>0$ 是严格不等式,必存在一个正数 ε,使得

$$Ay^{(0)}-(r+\varepsilon)y^{(0)}\geqslant 0.$$

从而由定理 1.2.4 得

$$(r+\varepsilon)\leqslant r_A(y^{(0)}),$$

即

$$r<r_A(y^{(0)}),$$

这与 r 的最大性矛盾,所以 $Ax^{(0)}-rx^{(0)}=0$,即 r 是矩阵 A 的一个特征值,且 $x^{(0)}$ 是对应于 r 的一个正的特征向量.

最后我们证明 $r=\rho(A)$. 设矩阵 A 的任意一个特征值为 λ,其对应的特征向量为 $x\neq 0$,即 $Ax=\lambda x$,按第 i 行展开得

$$\lambda x_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i\in\mathbf{N}.$$

因此有

$$|\lambda x_i|=\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|\leqslant\sum_{j=1}^{n}a_{ij}|x_j|,\quad i\in\mathbf{N},$$

即

$$A|x|\geqslant|\lambda|\,|x|.$$

再根据定理 1.2.4 得

$$|\lambda|\leqslant r_A(x)\leqslant r,$$

即 $r=\rho(A)$.

定理 1.2.6 实际上证明了:如果非负向量 $x\neq 0$ 且满足 $Ax\geqslant rx$,则 x 是对应于 r 的特征向量,且为正向量.

例 1.2.3 设不可约非负矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\2&1&3\end{pmatrix},$$

令 $x=(0,1,1)^{\mathrm{T}}$,$y=(I+A)^2x$,$z=(I+A)^4x$,计算 $r_A(x)$,$r_A(y)$,$r_A(z)$,比较这些数值与 A 的最大特征值 $\rho(A)$. 计算得到

$$r_A(x)=\min\{2,4\}=2;$$

$$y=(I+A)^2x=(31,11,33)^{\mathrm{T}};$$

$$r_A(y)=\min\left\{\frac{152}{31},\frac{44}{11},\frac{172}{33}\right\}=4;$$

$$z=(I+A)^4x=(1091,315,1241)^{\mathrm{T}};$$

$$r_A(z)=\min\left\{\frac{5444}{1091},\frac{1556}{315},\frac{6220}{1241}\right\}=\frac{1556}{315}\approx 4.93968.$$

直接计算求得 $r=5$，它在 E^n 对应的特征向量为 $x^{(0)}\approx(0.4117,0.1176,0.4705)^{\mathrm{T}}$.

设非负矩阵 A 是不可约矩阵时，下面讨论矩阵 A 的谱半径的性质.

定理 1.2.7 设矩阵 A 是 n 阶不可约非负矩阵，则 A 的谱半径 $\rho=\rho(A)$ 是 A 的特征方程的单根.

证 根据定理 1.2.6，ρ 是 A 的一个正特征值，其对应于一个正特征向量 x，即 $Ax=\rho x$.

首先证明 A 的对应于 ρ 的特征子空间 $V_\rho=\{x\mid Ax=\rho x,x\in\mathbf{C}^n\}$ 是一维的. 假设

$$Ay=\rho y,\quad y\neq 0,$$

则由三角不等式得

$$A|y|\geqslant\rho|y|,$$

其中 $|y|$ 是非负非零向量.

与定理 1.2.6 证明一样，可以证明 $A|y|=\rho|y|$ 且 $|y|>0$. 我们其实证明了对应于 ρ 的特征向量不会有零元素. 假设任意非零向量 $y,z\in V_\rho$，则 $|y|>0$，$|z|>0$. 可以得出 $A(z_1y-y_1z)=\rho(z_1y-y_1z)$，即向量 $(z_1y-y_1z)\in V_\rho$，但由于向量 z_1y-y_1z 的第一个坐标为零，所以它不是特征向量. 因此

$$z_1y-y_1z=0,$$

即 y 和 z 是线性相关的，证得特征子空间 V_ρ 是一维的.

现在可以证明 ρ 是 A 的特征方程的单根. 设矩阵 A 的特征多项式为 $\Delta(\lambda)=\det(\lambda I-A)$，只需证明 $\Delta'(\rho)\neq 0$. 利用公式

$$\frac{d}{d\lambda}(\det X)=\sum_{i,j=1}^{n}(-1)^{i+j}\det X(i|j)\frac{d}{d\lambda}x_{ij},$$

其中 $X=(x_{ij})_{n\times n}$ 的每个元素 x_{ij} 是 λ 的可微函数，$\det X(i|j)$ 表示把矩阵 X 的第 i 行和第 j 列去掉后的行列式. 利用上面公式可得

$$\Delta'(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}(\det(\lambda I-A))=\sum_{i=1}^{n}\det(\lambda I-A)(i|i)=\mathrm{tr}[\mathrm{adj}(\lambda I-A)],$$

其中 $\mathrm{adj}(\lambda I-A)$ 是矩阵 $\lambda I-A$ 的伴随矩阵，$\mathrm{tr}(A)$ 表示矩阵 A 的迹.

设 $B(\rho)=\mathrm{adj}(\rho I-A)$，则 $\Delta'(\rho)=\mathrm{tr}[B(\rho)]$. 因为数 ρ 是 $\Delta(\lambda)=0$ 的根，所以

$$(\rho I-A)B(\rho)=\det(\rho I-A)I=0.$$

因为关于 ρ 的特征子空间 V_ρ 的维数是 1，所以 $\mathrm{rank}(\rho I-A)=n-1$，由此 $B(\rho)\neq 0$.