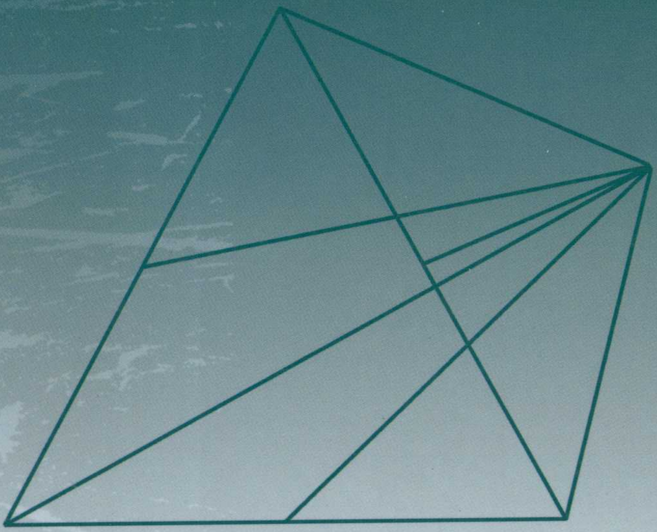
全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题

中国高等教育学会“十一五”教育科学研究规划课题

经济数学基础问题集解

南京财经大学应用数学系/编



东南大学出版社

全国高等教育科学“十五”规划重点研究课题(19138149)
中国高等教育学会“十一五”教育科学研究规划课题(06AIJ0090112)

经济数学基础问题集解

南京财经大学应用数学系 编

东 南 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础问题集解/南京财经大学应用数学系编. —南京：东南大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-5641-0921-9

Ⅰ.经… Ⅱ.南… Ⅲ.经济数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 132247 号

经济数学基础问题集解

出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江 汉
地　　址	南京市四牌楼 2 号(210096)
电　　话	025-83795801(发行科)/025-83362442(传真)
经　　销	江苏省新华书店
印　　刷	江苏扬中市印刷有限公司
开　　本	787mm×960mm　1/16
印　　张	31.5
字　　数	582.6 千字
版　　次	2007 年 9 月第 1 版　2007 年 9 月第 1 次印刷
印　　数	1—10 000 册
书　　号	ISBN　978-7-5641-0921-9/O·56
定　　价	45.00 元

*若有印装质量问题，请直接向读者服务部调换，电话：025-83792328。

本书编写人员

微 积 分 部 分： 姜凤华　孙　敏　苗继旺

线性代数部分： 金　辉　伍家凤　戴平波

概率统计部分： 赵中华　黄顺林　谭玉顺

主　　　　审： 张从军　王宏勇

前　　言

经济数学基础课程主要包括“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”.这些课程的内容为研究事物的发展变化提供了基本的数学工具和框架,在各种实际问题中有着广泛的应用.由于其内容丰富、思想深刻、应用广泛,它在许多学科领域特别是经管类学科中具有基础性的地位.

通过经济数学基础课程的学习,要使学生系统掌握这些基本的数学工具,培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力以及综合运用所学知识进行分析、解决实际问题特别是经济问题的能力,为进一步学习其他专业课程奠定基础.

为了加大训练力度,强化数学基础,突出经济应用,我系组织多年从事这些课程教学的一线教师编写了这本《经济数学基础问题集解》.本书主要包括以下内容:

1. 微积分习题解答、线性代数习题解答、概率统计习题解答.

这些习题解答分别与我系教师编写的经济数学基础教程《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这些教材配套.除了选择题、填空题外(选择题、填空题在原教材中已有参考答案),本书对原教材中的其他全部习题给出了详细解答,意在给这些课程的初学者和复习者提供一个随时的参考和自学的工具.

2. 经济应用问题补充.

本书补充的这些经济应用问题,旨在阐释一些常见经济问题的数学分析方法.对经济运行中的一些常见问题,运用微积分知识、线性代数知识、概率统计知识、微分方程知识给出分析与解答,提供最优化的解决方案.这些内容也是对学生的最基本的数学建模训练.

3. 微积分自测题及解答、线性代数自测题及解答、概率统计自测题及解答.

本书给出的这些自测题及解答，类似于这些课程期末考试的模拟题，借以帮助学生了解此类考试的题型和难度，作为复习和自测之用.

4. 附录部分是近四年报考研究生的试题及参考答案. 本书对经管类各专业同学报考研究生还具有复习迎考之功能.

本书第一篇由姜凤华、孙敏、苗继旺三位老师编写（第一章，姜凤华、苗继旺；第二章、第三章，孙敏；第四章、第六章，苗继旺；第五章、第七章，姜凤华）. 第二篇由金辉、伍家凤、戴平波三位老师编写（第一章、第三章，戴平波；第二章、第七章，伍家凤；第四章、第五章、第六章，金辉）. 第三篇由赵中华、黄顺林、谭玉顺三位老师编写（第一章、第二章，赵中华；第三章，黄顺林；第四章，黄顺林、谭玉顺；第五章、第六章，谭玉顺）. 本书第四篇及第五篇：第一章由姜凤华、孙敏、苗继旺三位老师编写；第二章由金辉、伍家凤、戴平波三位老师编写；第三章由赵中华、黄顺林、谭玉顺三位老师编写. 附录部分由王宏勇老师整理. 本书由张从军、王宏勇两位教授审阅.

本书在编写过程中参考了大量的相关教材和资料，选用了其中的有关内容和例题、习题，在此谨向有关编者、作者一并表示谢意. 编者还要感谢本书配套教材的我系各位作者，他们对本书的出版给予了积极的支持与帮助. 感谢东南大学出版社刘庆楚副编审，他从开始联系书稿到修改、校对，不辞劳苦，数次往返于东南大学出版社与南京财经大学之间.

本书编写时间较为仓促，疏漏错误在所难免，诚恳期望有关专家、学者不吝赐教，诚恳期望使用本书的教师和同学们提出并反馈宝贵意见.

电子邮箱：yysxx@njue. edu. cn.

编者于南京财经大学应用数学系

2007. 7. 16

目　　录

第一篇　微积分习题解答

第一章　经济函数

三、解答题

1. 判断下列各对函数是否相同,并说明理由.

(1) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$.

解　相同. $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=|x|$ 的定义域、值域相同,且 $\sqrt{x^2}=|x|$.

(2) $y=\lg x$ 与 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$.

解　不同. $y=\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,而 $y=\frac{1}{2}\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(3) $y=\frac{(x-1)^2}{x-1}$ 与 $y=x-1$.

解　不同. $y=\frac{(x-1)^2}{x-1}$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq1\}$,而 $y=x-1$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

(4) $y=\tan^2x-\sec^2x$ 与 $y=-1$.

解　不同. $y=\tan^2x-\sec^2x$ 的定义域为 $\left\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\ 为整数\right\}$,而 $y=-1$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

(5) $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 与 $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

解　不同. $y=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq0\}$,值域为 $\{y\mid y>1\}$,而 $y=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$ 的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq0\}$,值域为 $\{y\mid y>1\ 或\ y<-1\}$.

(6) $y=\lg\frac{1+2^{-x}}{1-2^{-x}}$ 与 $y=-\lg\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

解 相同. $y=\lg\frac{1+2^{-x}}{1-2^{-x}}$ 与 $y=-\lg\frac{2^x-1}{2^x+1}$ 的定义域、值域均相同,且对应法则 $\lg\frac{1+2^{-x}}{1-2^{-x}}=-\lg\frac{2^x-1}{2^x+1}$.

2. 讨论下列函数的单调性.

(1) $f(x)=2^x+x-5$.

解 $f(x)=2^x+x-5$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$. 设任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,则 $f(x_2)-f(x_1)=(2^{x_2}+x_2-5)-(2^{x_1}+x_1-5)=(2^{x_2}-2^{x_1})+(x_2-x_1)>0$.

故 $f(x)=2^x+x-5$ 在定义域内单调增加.

(2) $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$.

解 $f(x)=\mathrm{e}^{|x|}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

当 $x\in[0,+\infty)$ 时,$f(x)=\mathrm{e}^{|x|}=\mathrm{e}^x$ 单调增加;当 $x\in(-\infty,0)$ 时,$f(x)=\mathrm{e}^{|x|}=\mathrm{e}^{-x}$ 单调减少.

(3) $f(x)=-2x^2+4x+3$.

解 $f(x)=-2x^2+4x+3$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,且 $f(x)=-2x^2+4x+3=-2(x-1)^2+5$. 故在$(-\infty,1)$ 上,$f(x)=-2x^2+4x+3$ 单调增加;而在$(1,+\infty)$ 上,$f(x)=-2x^2+4x+3$ 单调减少.

(4) $f(x)=\lg\frac{2^x+1}{2^x-1}$.

解 $f(x)=\lg\frac{2^x+1}{2^x-1}$ 的定义域为$(0,+\infty)$. 设任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)=\lg\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_1}-1}=\lg\left(1+\frac{2}{2^{x_1}-1}\right)$,$f(x_2)=\lg\frac{2^{x_2}+1}{2^{x_2}-1}=\lg\left(1+\frac{2}{2^{x_2}-1}\right)$.

因为 $x_1<x_2$,则 $1+\frac{2}{2^{x_1}-1}>1+\frac{2}{2^{x_2}-1}$,所以 $\lg\left(1+\frac{2}{2^{x_1}-1}\right)>\lg\left(1+\frac{2}{2^{x_2}-1}\right)$,即 $f(x_1)>f(x_2)$.

故 $f(x)=\lg\frac{2^x+1}{2^x-1}$ 在定义域内单调减少.

3. 讨论下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=\sin x-x\cos x$.

解　函数 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

因为

$$f(-x)=\sin(-x)-(-x)\cos(-x)=-\sin x+x\cos x$$
$$=-(\sin x-x\cos x)=-f(x)$$

所以 $f(x)=\sin x-x\cos x$ 为奇函数.

(2) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$.

解　函数 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

因为

$$f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{-(-x)}}{\sqrt{1+(-x)^2}}=\frac{e^{-x}-e^x}{\sqrt{1+x^2}}=-\frac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}=-f(x)$$

所以 $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sqrt{1+x^2}}$ 为奇函数.

(3) $f(x)=x^3-x+1$.

解　函数 $f(x)=x^3-x+1$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

因为

$$f(-x)=(-x)^3-(-x)+1=-x^3+x+1$$

则 $f(-x)\neq-f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$,所以 $f(x)$ 为非奇非偶函数.

(4) $f(x)=\sin|x|+|\tan x|$.

解　函数 $f(x)=\sin|x|+|\tan x|$ 的定义域为$\left\{x\mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\ 为整数\right\}$.

因为

$$f(-x)=\sin|-x|+|\tan(-x)|=\sin|x|+|\tan x|=f(x)$$

所以 $f(x)=\sin|x|+|\tan x|$ 为偶函数.

4. 讨论下列函数在所给的区间上是否有界.

(1) $f(x)=e^{-x^2}$,$(-\infty,+\infty)$.

解　因为当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时,$-x^2\in(-\infty,0]$,则 $0<f(x)=e^{-x^2}\leqslant 1$. 所以,在$(-\infty,+\infty)$ 上 $f(x)=e^{-x^2}$ 有界.

(2) $f(x)=\lg x$,$(0,1)$,$(1,10)$,$(10,+\infty)$.

函数 $f(x)=\lg x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,且 $f(1)=0$,$f(10)=1$.

① 当 $x\in(0,1)$ 时,x 趋于 0,则 $f(x)$ 趋于 $-\infty$,故在$(0,1)$ 上,$f(x)=\lg x$ 无界;

② 当 $x\in(1,10)$ 时，$f(x)$ 单调增加，即 $f(1)<f(x)<f(10)$，故在 $(1,10)$ 上，$f(x)=\lg x$ 有界；

③ 当 $x\in(10,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调增加，即 $f(x)>f(10)=1$，x 趋于 $+\infty$ 时，$f(x)$ 也趋于 $+\infty$，故在 $(10,+\infty)$ 上，$f(x)=\lg x$ 无界.

(3) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$，$(-\infty,0)$，$(0,1)$，$(2,+\infty)$.

解 函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，且 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上均单调减少.

① 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，x 趋于 $-\infty$，函数 $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$ 趋于 1，而 $f(0)=-1$，故 $1>f(x)>f(0)=-1$.

即 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上有界.

② 当 $x\in(0,1)$ 时，x 趋于 1，函数 $f(x)=1+\dfrac{2}{x-1}$ 趋于 $-\infty$.

故 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在 $(0,1)$ 上无界.

③ 当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f(2)=3$，当 x 趋于 $+\infty$，函数 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 趋于 1，故 $1<f(x)<3$.

即 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ 在 $(2,+\infty)$ 上有界.

5. 下列函数是否是周期函数？如果是周期函数，求其周期.

(1) $f(x)=\sin^2 x$.

解 是周期函数. 因为 $f(x)=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$，而 $\cos 2x$ 是周期为 π 的周期函数，所以 $f(x)=\sin^2 x$ 是周期为 π 的周期函数.

(2) $f(x)=x\sin x$.

解 不是周期函数.

(3) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$.

解 不是周期函数.

(4) $f(x)=2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}x-1\right)$.

解 是周期函数. 设 l 为一个正数，有

$$f(x+l)=2\cos\left[\frac{\pi}{2}(x+l)-1\right]$$
$$=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}x-1\right)\cos\frac{\pi}{2}l-\sin\left(\frac{\pi}{2}x-1\right)\sin\frac{\pi}{2}l\right]$$

若 $f(x+l)=f(x)$,则上式中 $\cos\frac{\pi}{2}l=1$,且 $\sin\frac{\pi}{2}l=0$,故$\frac{\pi}{2}l=2\pi$,即 $l=4$.

所以 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}x-1\right)$是周期为 4 的周期函数.

6. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,求函数 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域.

解　因为函数 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$,所以 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域应满足 $0\leqslant\sqrt{1-x^2}\leqslant 1$,即 $0\leqslant|x|\leqslant 1$.

故 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域为$[-1,1]$.

7. 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的.

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

解　$y=\dfrac{1}{\sqrt{u}}$,$u=1+x^2$.

(2) $y=\sin^2 x^2$.

解　$y=u^2$,$u=\sin v$,$v=x^2$.

(3) $y=\mathrm{e}^{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}$.

解　$y=\mathrm{e}^u$,$u=2\mathrm{e}^v$,$v=-\dfrac{1}{x}$.

(4) $y=\log_2\tan\sqrt{2x-1}$.

解　$y=\log_2 u$,$u=\tan v$,$v=\sqrt{w}$,$w=2x-1$.

8. 设 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$,求 $f(x^2)$,$f[f(x)]$.

解　根据题意,可得

$$f(x^2)=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$f[f(x)]=f(x)+\frac{1}{f(x)}=x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}$$
$$=x+\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}$$

9. 设 $f(x)=2^x$,$g(x)=x^2$,求 $f[f(x)]$,$f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解
$$f[f(x)]=2^{f(x)}=2^{2^x}$$
$$f[g(x)]=2^{g(x)}=2^{x^2}$$
$$g[f(x)]=f^2(x)=(2^x)^2=4^x$$

10. 设 $f(x)=2^x+3$,求 $g(x)$,使得 $f[g(x)]=\sqrt{x}+4$.

解　由题意得 $f[g(x)]=2^{g(x)}+3=\sqrt{x}+4$,即 $2^{g(x)}=\sqrt{x}+1$,所以
$$g(x)=\log_2(\sqrt{x}+1)$$

11. 已知 $f\left(1+\frac{1}{x}\right)=(x-2)^2$,求 $f(x)$,$f(x^2-1)$.

解　设 $t=1+\frac{1}{x}$,则 $x=\frac{1}{t-1}$,故
$$f(t)=f\left(1+\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{t-1}-2\right)^2=\left(\frac{3-2t}{t-1}\right)^2$$
所以
$$f(x)=\left(\frac{3-2x}{x-1}\right)^2$$
$$f(x^2-1)=\left[\frac{3-2(x^2-1)}{(x^2-1)-1}\right]^2=\left(\frac{5-2x^2}{x^2-2}\right)^2$$

12. 已知 $f(\sin x)=\cos 2x$,求 $f(\cos x+1)$.

解　因为 $f(\sin x)=\cos 2x=1-2\sin^2 x$,所以 $f(t)=1-2t^2$,故
$$\begin{aligned}f(\cos x+1)&=1-2(\cos x+1)^2\\&=-2\cos^2 x-4\cos x-1\end{aligned}$$

13. 求下列函数的反函数并指明其定义域.

(1) $y=2^x-1$.

解　因为 $y=2^x-1$,所以 $2^x=y+1$,$x=\log_2(y+1)$,故 $y=2^x-1$ 的反函数为 $y=\log_2(x+1)$,其定义域为$\{x\mid x>-1\}$.

(2) $y=\frac{\lg x}{\lg x-1}$,$x\in(10,+\infty)$.

解　当 $x\in(10,+\infty)$ 时,$y=\frac{\lg x}{\lg x-1}$ 的值域为$(1,+\infty)$.
因为 $y=\frac{\lg x}{\lg x-1}$,所以 $\lg x=\frac{y}{y-1}$,$x=10^{\frac{y}{y-1}}$,故 $y=\frac{\lg x}{\lg x-1}$ 的反函数为 $y=10^{\frac{x}{x-1}}$,其定义域为原函数的值域,即反函数的定义域为$(1,+\infty)$.

(3) $y=\sqrt{2x-x^2}$,$x\in[0,1]$.

解　当 $x\in[0,1]$ 时,$y=\sqrt{2x-x^2}$ 的值域为$[0,1]$.

因为 $y=\sqrt{2x-x^2}$，所以 $x^2-2x+y^2=0$，则 $x=1\pm\sqrt{1-y^2}$，又因 $x\in[0,1]$，所以 $x=1+\sqrt{1-y^2}$ 舍去，即 $x=1-\sqrt{1-y^2}$.

故 $x\in[0,1]$ 时，$y=\sqrt{2x-x^2}$ 的反函数为 $y=1-\sqrt{1-x^2}$，其定义域为 $[0,1]$.

14. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}$.

解 若函数有意义，则 $\dfrac{2-x}{x-1}\geqslant 0$ 且 $x\neq 1$.

解 $\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ x-1>0\end{cases}$ 得 $1<x\leqslant 2$，故函数 $y=\sqrt{\dfrac{2-x}{x-1}}$ 的定义域为 $(1,2]$.

(2) $y=\dfrac{1}{(x-4)\ln|x-2|}$.

解 若函数有意义，则 $x-4\neq 0, x-2\neq 0, |x-2|\neq 1$，故 $x\neq 4, x\neq 2, x\neq 3, x\neq 1$. 所以，原函数的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq 1, x\neq 2, x\neq 3, x\neq 4\}$.

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}}+\arcsin\dfrac{1-x}{4}$.

解 若函数有意义，则 $x^2-2x-3>0$ 且 $-1\leqslant\dfrac{1-x}{4}\leqslant 1$. 由 $x^2-2x-3>0$ 可得 $x<-1$ 或 $x>3$，由 $-1\leqslant\dfrac{1-x}{4}\leqslant 1$ 可得 $-3\leqslant x\leqslant 5$，故原函数的定义域为 $[-3,-1)\cup(3,5]$.

(4) $y=\mathrm{e}^{\cot\frac{1}{x}}, x\neq 0$.

解 若函数有意义，则 $\dfrac{1}{x}\neq k\pi$，k 为整数. 由 $\dfrac{1}{x}\neq k\pi$ 得 $x\neq\dfrac{1}{k\pi}$，故原函数的定义域为 $\{x\mid x\in\mathbf{R}$，且 $x\neq\dfrac{1}{k\pi}$（k 为整数），$x\neq 0\}$.

15. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 1,\\ 2x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(0), f(2), f(1-x)$.

解

$$f(0)=0-1=-1$$

$$f(2)=2\cdot 2=4$$

$$f(1-x)=\begin{cases}(1-x)-1, & 1-x\leqslant 1,\\ 2(1-x), & 1-x>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x, & x\geqslant 0,\\ 2(1-x), & x<0\end{cases}$$

16. 设 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<1,\\ 2-x, & x>1,\end{cases}$ 求 $f(-x)$ 并讨论 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 的奇偶性.

解
$$f(-x)=\begin{cases}(-x)-1, & -x<1,\\ 2-(-x), & -x>1\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-x-1, & x>-1,\\ 2+x, & x<-1\end{cases}$$

因为
$$g(-x)=\frac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$$
$$=-g(x)$$

所以 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 为奇函数.

17. 设 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$,$g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\dfrac{1}{2}[g(x)+|g(x)|]=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x+|x|), & x<0,\\ \dfrac{1}{2}(x^2+|x^2|), & x\geqslant 0\end{cases}$

$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$$

因为 $f(x)=\dfrac{1}{2}(x+|x|)$,所以 $f(x)\geqslant 0$,故

$$g[f(x)]=f^2(x)=\left[\frac{1}{2}(x+|x|)\right]^2=\frac{1}{2}(x^2+x|x|)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0\end{cases}$$

18. 求函数 $y=\begin{cases}2x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-(x-2)^2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的反函数.

解 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=2x-1$,则 $x=\dfrac{y+1}{2}$,$-1\leqslant y\leqslant 1$;

当 $1<x\leqslant 2$ 时,$y=2-(x-2)^2$,则 $x=2\pm\sqrt{2-y}$,$1<y\leqslant 2$,其中 $x=2+\sqrt{2-y}$ 舍去(因为 $1<x\leqslant 2$).

故函数 $y=\begin{cases}2x-1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-(x-2)^2, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ 的反函数为

$$y=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-\sqrt{2-x}, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$$