北大燕园

李永乐·李正元

2009年考研数学④

数学

数学一

历年试题解析

主编 清华大学 李永乐

北京大学 李正元

中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

2009年李永乐·李正元考研数学④

数学历年试题解析

【数学一】

主编 北京大学 李正元
清华大学 李永乐
中国人民大学 袁荫棠

编者 （按姓氏笔画）
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京大学 刘西垣
中国人民大学 严颖
北京大学 范培华
北京交通大学 赵达夫
中国人民大学 袁荫棠
东北财经大学 龚兆仁

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学历年试题解析.1/李永乐,李正元,袁荫棠主编.—北京:国家行政学院出版社,2004
(考研系列)
ISBN 978-7-80140-322-3

Ⅰ.数… Ⅱ.①李… ②李… ③袁… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 004374 号

书　　名	数学历年试题解析[数学一]
作　　者	李正元　李永乐　袁荫棠
责任编辑	李锦慧
出版发行	国家行政学院出版社 (北京市海淀区长春桥路6号　100089)
电　　话	(010)88517082
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2008年2月北京第5版
印　　次	2008年2月北京第1次印刷
开　　本	787毫米×1092毫米　16开
印　　张	20.5
字　　数	540千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-322-3/O·29
定　　价	28.00元

前　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学入学考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 1994 年 ~2008 年历届全国硕士研究生入学统考数学一试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本套书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，使考生引以为戒。

本书把历年考研数学一试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该题型考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而掌握考研数学试题的广度和深

度，做到复习时目标明确，心中有数。而且把历年同一内容的试题放在一起，我们可以发现近几年的考题中有许多与往年试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生数学考试是不言而喻的。

另外，每种题型后附有**综述**——归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

（三）

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书（推荐考生认真阅读由**国家行政学院出版社**出版、**李正元、李永乐、袁荫棠**等主编的**《考研数学复习全书》（理工类·数学一）**，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合），复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法作以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做 2 ~ 3 遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

（四）

本书由北京大学 **李正元**、清华大学 **李永乐**、中国人民大学 **袁荫棠**担任主编。参本书编写的有：清华大学 **李永乐**、北京大学 **李正元**、**刘西垣**、**范培华**、中国人民大学 **袁荫棠**、**严颖**、北京交通大学 **赵达夫**、东北财经大学 **龚兆仁**。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝考生复习顺利，心想事成，考研成功！

编者

2008 年 2 月

目　录

第一篇　2008 年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　1994 ~ 2007 年考研数学一试题

第三篇　1994 ~ 2007 年考研数学一试题分类解析

第一篇　2008 年考研数学一试题及答案与解析

2008 年考研数学一试题

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分. 下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的. 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\mathrm{d}t$,则 $f'(x)$ 的零点个数为

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

【　】

(2) 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点(0,1)处的梯度等于

(A) $\boldsymbol{i}$.　(B) $-\boldsymbol{i}$.　(C) $\boldsymbol{j}$.　(D) $-\boldsymbol{j}$.

【　】

(3) 在下列微分方程中,从 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos2x+C_3\sin2x$($C_1,C_2,C_3$ 为任意常数)为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

【　】

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

【　】

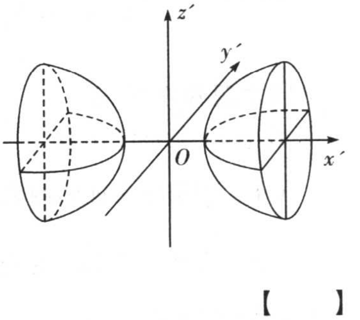
(5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$,则

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.　(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.　(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆,$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

【　】

(6) 设 $\boldsymbol{A}$ 为3阶实对称矩阵,如果二次曲面方程 $(x,y,z)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图所示,则 $\boldsymbol{A}$ 的正特征值的个数为



(A) 0.　(B) 1.

(C) 2.　(D) 3.

【　】

(7) 设随机变量 X,Y 独立同分布,且 X 的分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为

(A) $F^2(x)$.　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

【　】

(8) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$Y \sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY} = 1$，则

(A) $P\{Y = -2X - 1\} = 1$.　　(B) $P\{Y = 2X - 1\} = 1$.

(C) $P\{Y = -2X + 1\} = 1$.　　(D) $P\{Y = 2X + 1\} = 1$.

【　】

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足条件 $y(1) = 1$ 的解是 $y =$ ________.

(10) 曲线 $\sin(xy) + \ln(y - x) = x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是________.

(11) 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x = 0$ 处收敛，在 $x = -4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为________.

(12) 设曲面 Σ 是 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 的上侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

(13) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量，$\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$，则 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值为________.

(14) 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X = EX^2\} =$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)(本题满分 9 分)

求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{[\sin x - \sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 9 分)

计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x + 2(x^2 - 1)y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

(17)(本题满分 11 分)

已知曲线 $C:\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z = 5, \end{cases}$ 求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是连续函数，

(Ⅰ) 利用定义证明函数 $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x) = f(x)$；

(Ⅱ) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时，证明函数 $G(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19)(本题满分 11 分)

将函数 $f(x) = 1 - x^2 (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(**本题满分 10 分**)

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量,矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 分别是 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的转置.证明:

(Ⅰ)秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})\leqslant 2$;

(Ⅱ)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})<2$.

(21)(**本题满分 12 分**)

设 n 元线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2a & 1 & & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & & \\ & a^2 & 2a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a^2 & 2a & 1 \\ & & & & a^2 & 2a \end{bmatrix}_{n\times n},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(Ⅰ)证明行列式 $|\boldsymbol{A}|=(n+1)a^n$;

(Ⅱ)当 a 为何值时,该方程组有唯一解,并求 x_1;

(Ⅲ)当 a 为何值时,该方程组有无穷多解,并求通解.

(22)(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $\boldsymbol{P}\{X=i\}=\dfrac{1}{3}(i=-1,0,1)$,$Y$ 的概率密度为

$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 记 $Z=X+Y$.

(Ⅰ)求 $\boldsymbol{P}\left\{Z\leqslant\dfrac{1}{2}\mid X=0\right\}$;

(Ⅱ)求 Z 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(**本题满分 11 分**)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(Ⅰ)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量;

(Ⅱ)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时,求 $\boldsymbol{D}T$.

2008 年考研数学一试题答案与解析

一、选择题

(1)**【分析】** 由变限积分求导法先求出

$$f'(x)=2x\cdot\ln(2+x^2).$$

因 $\ln(2+x^2)\neq 0$,所以 $f'(x)$ 只有一个零点(即 $x=0$).

选(B).

(2)【分析】 求梯度，就是求两个偏导数：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,1)\big|_{x=0} = (\arctan x)'\big|_{x=0} = \left.\frac{1}{1+x^2}\right|_{x=0} = 1,$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)\big|_{y=1} = (0)'\big|_{y=0} = 0,$$

因此，$\mathbf{grad}f\big|_{(0,1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(0,1)} = \boldsymbol{i}.$

选(A)．

(3)【分析】 从通解的结构知，三阶线性常系数齐次方程相应的三个特征根是：$1,\ \pm 2i(i=\sqrt{-1})$，对应的特征方程是

$$(\lambda-1)(\lambda+2i)(\lambda-2i) = (\lambda-1)(\lambda^2+4) = \lambda^3-\lambda^2+4\lambda-4=0,$$

因此所求的微分方程是

$$y'''-y''+4y'-4y=0.$$

选(D)．

(4)【分析】 因$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调有界，当x_n单调时，$\Rightarrow f(x_n)$单调有界$\Rightarrow f(x_n)$收敛．选(B)．

(5)【分析】 因为$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E}$,

$$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2)=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{E},$$

所以，由定义知$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A},\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$均可逆．故选(C)．

注：本题用特征值也是简捷的，由$\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}$的特征值$\lambda=0\Rightarrow\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$(或$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$)特征值均不为$0\Rightarrow\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$(或$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$)可逆．

(6)【分析】 由图知曲面为旋转双叶双曲面，其方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$.

对于二次型$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}$，其特征值为$\frac{1}{a^2},-\frac{1}{c^2},-\frac{1}{c^2}$，故应选(B)．

(7)【分析】 设Z的分布函数为$F_Z(x)$，则

$$F_Z(x)=P\{Z\leqslant x\}=P\{\max(X,Y)\leqslant x\}=P\{X\leqslant x,Y\leqslant x\}.$$

由于X与Y独立同分布，于是有

$$F_Z(x)=P\{X\leqslant x\}P\{Y\leqslant x\}=F^2(x).$$

应选(A)．

(8)【分析】 由于X与Y的相关系数$\rho_{XY}=1>0$，因此$P\{Y=aX+b\}=1$，且$a>0$．又因为$Y\sim N(1,4)$，$X\sim N(0,1)$，所以$EX=0$，$EY=1$．而$EY=E(aX+b)=b \Rightarrow b=1$．即应选(D)．

二、填空题

(9)【分析一】 该方程可以写成

$$(xy)'=0,$$

积分得 $\quad xy=c.$

由 $y(1)=1\Rightarrow c=1$. 因此该初值问题的解是 $y=\frac{1}{x}$.

【分析二】 这是分离变量的方程,先分离变量然后积分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x},\quad \ln|y|=-\ln|x|+c_1,$$

$$|y|=\frac{\mathrm{e}^{c_1}}{|x|},\quad y=\frac{c}{x}.$$

由 $y(1)=1\Rightarrow c=1$. 因此该初值问题的解是

$$y=\frac{1}{x}.$$

---

(10)【分析】 $(0,1)$ 在曲线上,先求 $y'(0)$.

方程两边对 x 求导得

$$\cos(xy)\cdot(y+xy')+\frac{1}{y-x}(y'-1)=1.$$

令 $x=0,y=1$ 得

$$1+y'(0)-1=1,\quad y'(0)=1.$$

$\Rightarrow$ 曲线在 $(0,1)$ 点的切线方程是

$$y=x+1.$$

---

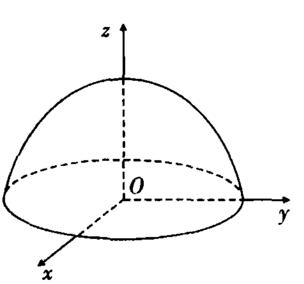
(11)【分析】 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 收敛 $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=2$ 收敛 $\Rightarrow$ 它的收敛半径 $R\geqslant 2$. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=-4$ 发散 $\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 在 $t=-2$ 发散 $\Rightarrow$ 它的收敛半径 $R\leqslant 2$. 于是 $R=2$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛区间是 $(-2,2)$,收敛域是 $(-2,2]$.

由 $-2<t=x-3\leqslant 2 \Rightarrow 1<x\leqslant 5 \Rightarrow$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域是 $(1,5]$.

---

(12)【分析一】 曲面 Σ 是上半球面(如图)法向量朝上. 用高斯公式来求这个面积分. 将所求曲面积分表为



$$I=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

由于 Σ 不封闭,要添加辅助面 $\Sigma_1:z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$,法向量朝下. 由 Σ_1 与 Σ 围成区域 Ω,边界取外法向.

Σ_1 垂直 yz 平面与 zx 平面 $\Rightarrow$

$$\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0.$$

Σ_1 在 xy 平面上的区域记为 $D:x^2+y^2\leqslant 4 \Rightarrow$

$$\iint_{\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{曲面积分化为二重积分})$$

$$\xlongequal{\text{极坐标}}-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cos^2\theta r\mathrm{d}r=-\pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2=-4\pi.$$

在 Ω 上用高斯公式得

$$\iint_{\Sigma\cup\Sigma_1} P\mathrm{d}x y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} y\mathrm{d}V = 0,$$

其中 Ω 关于 zx 平面对称．

因此　　$I = -(-4\pi) = 4\pi$.

【分析二】 直接代公式将第二类曲面积分化为二重积分．曲面 Σ 的方程是

$$z = \sqrt{4-x^2-y^2}\quad ((x,y)\in D),$$

其中 $D: x^2+y^2\leqslant 4$．$\Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

$\Rightarrow$

$$\text{原曲面积分} = \iint_D [xy(-z_x') + x(-z_y') + x^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0+0+\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\cdot r\mathrm{d}r = \pi\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2 = 4\pi.$$

---

(13)**【分析】** 用定义．由 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = \boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{\alpha}_1$,

$$\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{A\alpha}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

知 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 和 0．因此 $\boldsymbol{A}$ 的非 0 特征值为 1．

或者，利用相似，有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{0},2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) = (\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

可知　　$\boldsymbol{A}\sim\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，亦可得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 1 和 0．因此 $\boldsymbol{A}$ 的非 0 特征值为 1．

---

(14)**【分析】** 依题意，$EX = DX = \lambda = 1$．又 $EX^2 = DX + (EX)^2 = 2$，于是有

$$P\{X = EX^2\} = P\{X=2\} = \frac{1^2}{2!}\mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

三、解答题

(15)**【解法一】** $x\to 0$ 时 $x\sim\sin x$，用等价无穷小因子替换得

$$I = \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x}.$$

作变量替换 $t=\sin x$ 后再用洛必达法则得

$$I = \lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2} = \frac{1}{6}.$$

【解法二】 $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x(1-\cos(\sin x))}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(\sin x)}{3x^2}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cdot\cos x}{6x} = \frac{1}{6}.$$

---

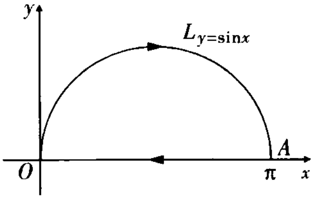
(16)**【解法一】** 直接计算

$$I = \int_L \sin 2x\mathrm{d}x - 2y\mathrm{d}y + \int_L 2x^2y\mathrm{d}y = \left(-\frac{1}{2}\cos 2x - y^2\right)\Big|_{(0,0)}^{(\pi,0)} + \int_0^{\pi} 2x^2\sin x\cos x\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi} x^2 \sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}\cos 2x = -\frac{1}{2}x^2\cos 2x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x\cos 2x \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \mathrm{d}\sin 2x = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2}x\sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{2}.$$

【解法二】 用格林公式．曲线 L 不封闭，如图所示，添加辅助线 $\overline{AO}$（$y = 0, x \in [\pi, 0]$），L 与 $\overline{AO}$ 围成 D，边界取负向（顺时针方向），则



$$\int_{\overline{AO}} \sin 2x \mathrm{d}x + 2(x^2 - 1)y\mathrm{d}y = \int_{\pi}^{0} \sin 2x \mathrm{d}x = 0.$$

在 D 上用格林公式得

$$I = \int_L \sin 2x \mathrm{d}x + 2(x^2 - 1)y\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L\cup\overline{AO}} \sin 2x \mathrm{d}x + 2(x^2 - 1)y\mathrm{d}y = -\iint_D 4xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x} 4xy\mathrm{d}y$$

$$= -\int_0^{\pi} 2xy^2 \Big|_0^{\sin x} \mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} x(1 - \cos 2x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\mathrm{d}\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}x\sin 2x \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2x \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi^2.$$

---

(17)**【分析与求解一】** 这是三元函数的条件最值问题，含两个条件．空间中点 (x,y,z) 到 xOy 平面的距离即 $|z|$．问题是求 $|z|$ 在条件 $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ x + y + 3z - 5 = 0 \end{cases}$ 下的最值点，等价于求 z^2 在同样条件下的最值点．

令 $F(x,y,z,\lambda,\mu) = z^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2z^2) + \mu(x + y + 3z - 5)$，

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda x + \mu = 0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2\lambda y + \mu = 0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 2z - 4\lambda z + 3\mu = 0, & ③ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, & ④ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = x + y + 3z - 5 = 0, & ⑤ \end{cases}$$

由 ①、② 得 $x = y$，代入 ④ 得 $z = \pm x$，再由 ⑤ 分别得

$$P_1(x_1,y_1,z_1) = (1,1,1),\quad P_2(x_2,y_2,z_2) = (-5,-5,5).$$

由于实际问题存在最大值与最小值，又通过计算只有两个驻点，再比较就知道，曲线 C 上点 $(-5,-5,5)$，$(1,1,1)$ 分别是距 xOy 平面最远点和最近点．

【分析与求解二】 转化为二元函数的条件最值问题．

空间中点 (x,y,z) 到 xOy 平面的距离即 $|z|$，从曲线 C 的第一个方程解出

$$2z^2 = x^2 + y^2,$$

由第二个方程解出 $z = \frac{1}{3}(5 - x - y)$，代入第一个方程得

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{1}{3}(5 - x - y)\right)^2 = 0.$$

问题变成求 $x^2 + y^2$ 在条件 $x^2 + y^2 - \frac{2}{9}(5 - x - y)^2 = 0$ 下的最大、最小值点．令

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left[x^2 + y^2 - \frac{2}{9}(5 - x - y)^2\right],$$

解 方 程 组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2x + \lambda\left[2x + \dfrac{4}{9}(5 - x - y)\right] = 0, & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + \lambda\left[2y + \dfrac{4}{9}(5 - x - y)\right] = 0, & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - \dfrac{2}{9}(5 - x - y)^2 = 0, & ③ \end{cases}$$

由 ①,②$\Rightarrow x = y$,代入 ③$\Rightarrow$

$$x^2 = \frac{1}{9}(5 - 2x)^2, \quad x = \pm\frac{1}{3}(5 - 2x).$$

于是分别得 $(x_1, y_1) = (1,1), \quad (x_2, y_2) = (-5, -5),$

相应地得 $P_1(x_1, y_1, z_1) = (1,1,1), \quad P_2(x_2, y_2, z_2) = (-5, -5, 5).$

由于实际问题存在最大值与最小值,又通过计算只有两个驻点,再比较就知道,曲线 C 上点 $(-5, -5, 5)$,$(1,1,1)$ 分别是距离 xOy 平面最远点和最近点.

---

(18)**【证明】**(Ⅰ)首先按导数定义有

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int_0^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right].$$

再由定积分的性质得

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

最后由定积分的中值定理及连续性知,$\exists \xi$ 在 x 与 $x + \Delta x$ 之间,使得

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\Delta x,$$

于是 $F'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(\xi) = f(x).$

评注 这是一道证明基本定理的试题.

若用洛必达法则求 $\dfrac{0}{0}$ 型极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\times}{=\!=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)'_{\Delta x}}{(\Delta x)'} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x),$$

这就犯了一个大错误:用该定理的结论来证明这个定理.

(Ⅱ) $G(x) = 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t,$

要证 $G(x)$ 以 2 为周期,即证 $G(x + 2) - G(x) \equiv 0 \quad (\forall x)$.

方法 1° 由

$$\begin{aligned} G(x+2) - G(x) &= 2\int_0^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t - (x+2)\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - 2\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\quad (G(x+2) - G(x))' = 2f(x+2) - 2f(x) = 0 \quad (\forall x)$

(因为 $f(x)$ 以 2 为周期).

$\Rightarrow$ $\quad G(x+2) - G(x) = 常数 = [G(x+2) - G(x)]\big|_{x=0} = G(2) = 0 \quad (\forall x).$

方法 2° 同前计算

$$G(x+2)-G(x)=2\int_0^{x+2}f(t)\,dt-2\int_0^{x}f(t)\,dt-2\int_0^{2}f(t)\,dt$$
$$=2\int_x^{x+2}f(t)\,dt-2\int_0^{2}f(t)\,dt=2\int_0^{2}f(t)\,dt-2\int_0^{2}f(t)\,dt$$
$$=0\quad(\forall x).$$

这一证法中利用了已知结论,即周期函数的积分性质:若$f(x)$是连续函数以T为周期,则

$$\int_x^{x+T}f(t)\,dt=\int_0^{T}f(t)\,dt\quad(\forall x).$$

---

(19)【解】 $f(x)$看成是$[-\pi,\pi]$上的偶函数

$$f(x)=1-x^2\quad(-\pi\leqslant x\leqslant\pi).$$

先计算余弦级数的系数

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\,dx=2-\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,dx$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\,dx=-\frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}x^2\,d\sin nx$$
$$=\frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi}x\sin nx\,dx=-\frac{4}{n^2\pi}\int_0^{\pi}x\,d\cos nx=-\frac{4(-1)^n}{n^2},$$

$(b_n=0,n=1,2,3,\cdots)$.

$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上连续,又$f(-\pi)=f(\pi)$,满足展开定理的条件 $\Rightarrow$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\quad(x\in[-\pi,\pi]).$$

令$x=0$得

$$1=1-\frac{1}{3}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

$$\Rightarrow\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}.$$

---

(20)【证明】 (Ⅰ)因为$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$为3维列向量,那么$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T},\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T}$都是3阶矩阵,且秩$\mathrm r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T})\leqslant 1$,$\mathrm r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})\leqslant 1$.故

$$\mathrm r(\boldsymbol A)=\mathrm r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})\leqslant\mathrm r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T})+\mathrm r(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm T})\leqslant 2.$$

(Ⅱ)若$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$线性相关,则$\exists$不全为0的$k_1,k_2$使$k_1\boldsymbol{\alpha}+k_2\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol 0$.不妨设$k_2\neq 0$,则有$\boldsymbol{\beta}=k\boldsymbol{\alpha}$,那么

$$\mathrm r(\boldsymbol A)=\mathrm r[\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}+(k\boldsymbol{\alpha})(k\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm T}]=\mathrm r[(1+k^2)\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T}]=\mathrm r(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm T})\leqslant 1<2.$$

---

(21)【解】 (Ⅰ)用归纳法.

当$n=1$时,命题正确.设$n<k$时,命题正确.

当$n=k$时,按第一列展开,记n阶行列式$|\boldsymbol A|$的值为$\boldsymbol D_n$,则有

$$\boldsymbol D_k=2a\begin{vmatrix}2a&1&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&0&&&\\a^2&2a&1&&\\&a^2&2a&\ddots&\\&&\ddots&\ddots&1\\&&&a^2&2a\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$= 2a\boldsymbol{D}_{k-1} - a^2\boldsymbol{D}_{k-2} = 2a(ka^{k-1}) - a^2((k-1)a^{k-2}) = (k+1)a^k,$$

所以$|\boldsymbol{A}| = (n+1)a^n$.

（Ⅱ）由克莱姆法则，$|\boldsymbol{A}| \neq 0$ 方程组有惟一解．故 $a \neq 0$ 时方程组有惟一解．且用克莱姆法则，有

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2a & 1 & & & \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix}}{\boldsymbol{D}_n} = \frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n} = \frac{n}{(n+1)a}.$$

（Ⅲ）当 $a = 0$ 时，方程组$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$有无穷多解．

其通解为$(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}} + k(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$k$ 为任意常数．

注：本题（Ⅰ）关于三对角线行列式的计算通常用递推法．（96 年数四考题中出现过）

例如，本题按第 1 列展开，有

$$\boldsymbol{D}_n = 2a\boldsymbol{D}_{n-1} - a^2\boldsymbol{D}_{n-2},$$

得
$$\boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = a\boldsymbol{D}_{n-1} - a^2\boldsymbol{D}_{n-2} = a(\boldsymbol{D}_{n-1} - a\boldsymbol{D}_{n-2}).$$

从而
$$\boldsymbol{D}_n - a\boldsymbol{D}_{n-1} = a(\boldsymbol{D}_{n-1} - a\boldsymbol{D}_{n-2}) = a^2(\boldsymbol{D}_{n-2} - a\boldsymbol{D}_{n-3}) = \cdots = a^{n-2}(\boldsymbol{D}_2 - a\boldsymbol{D}_1) = a^n.$$

那么
$$\boldsymbol{D}_n = a\boldsymbol{D}_{n-1} + a^n = a(a\boldsymbol{D}_{n-2} + a^{n-1}) + a^n = a^2\boldsymbol{D}_{n-1} + a^n = \cdots = a^{n-1}\boldsymbol{D}_1 + (n-1)a^n = (n+1)a^n.$$

---

(22)【解】（Ⅰ）$\boldsymbol{P}\{Z \leqslant \frac{1}{2} \mid X = 0\} = \boldsymbol{P}\{X + Y \leqslant \frac{1}{2} \mid X = 0\} = \boldsymbol{P}\{Y \leqslant \frac{1}{2} \mid X = 0\}$

$$= \boldsymbol{P}\{Y \leqslant \frac{1}{2}\} = \int_0^{\frac{1}{2}} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}.$$

（Ⅱ）记 Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= \boldsymbol{P}\{Z \leqslant z\} = \boldsymbol{P}\{X + Y \leqslant z\} = \sum_{i=-1}^{1}\boldsymbol{P}\{X = i, X + Y \leqslant z\} \\ &= \sum_{i=-1}^{1}\boldsymbol{P}\{X = i, Y \leqslant z - i\} = \sum_{i=-1}^{1}\boldsymbol{P}\{X = i\}\boldsymbol{P}\{Y \leqslant z - i\} \\ &= \frac{1}{3}(\boldsymbol{P}\{Y \leqslant z + 1\} + \boldsymbol{P}\{Y \leqslant z\} + \boldsymbol{P}\{Y \leqslant z - 1\}). \end{aligned}$$

当 $z < -1$ 时，$z + 1, z, z - 1$ 均小于 0，则 $F_Z(z) = 0$；

当 $-1 \leqslant z < 0$ 时，$z, z - 1$ 均小于 0，则

$$F_Z(z) = \frac{1}{3}\boldsymbol{P}\{Y \leqslant z + 1\} = \frac{z+1}{3};$$

当 $0 \leqslant z < 1$ 时，$z - 1 < 0, z + 1 < 2$，则

$$F_Z(z) = \frac{1}{3}(\boldsymbol{P}\{Y \leqslant z + 1\} + \boldsymbol{P}\{Y \leqslant z\}) = \frac{1}{3}(1 + z) = \frac{z+1}{3};$$

当 $1 \leqslant z < 2$ 时，$0 \leqslant z - 1 < 1$，则