BIANJIE YUANFA
JIQI ZAI JIEGOU
FENXIZHONG DE YINGYONG

边界元法及其在结构分析中的应用

郑建军　刘兴业　周欣竹　著

安徽科学技术出版社

边界元法及其在结构分析中的应用

郑建军　刘兴业　周欣竹　著

安徽科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

边界元法及其在结构分析中的应用/郑建军,刘兴业,周欣竹著.—合肥:安徽科学技术出版社,2006.5
ISBN 7-5337-3497-1

Ⅰ.边…　Ⅱ.①郑…②刘…③周…　Ⅲ.边界元法-应用-建筑结构-结构分析　Ⅳ.TU31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 048086 号

*

安徽科学技术出版社出版
(合肥市跃进路1号新闻出版大厦)
邮政编码:230063
电话号码:(0551)2833431
E-mail: yougoubu@sina.com
yougoubu@hotmail.com
网址: www.ahstp.com.cn
新华书店经销　合肥晓星印刷厂印刷

*

开本:850×1168　1/32　印张:7.5　字数:185千
2006年5月第1版　2006年5月第1次印刷
定价: 28.00元

前　言

边界元法也称边界积分方程法，是 20 世纪 60 年代开始发展起来的一种数值方法，它与电子计算机技术的发展和应用紧密相联。目前，边界元法已形成完整的理论体系，成为解决位势和连续介质力学问题的重要手段，是求解各种工程问题的重要工具。近 20 多年来该方法已被广泛应用于结构工程、岩土地质工程、海洋工程、采矿业、热传导技术和电磁场等多种工业技术领域，充分显示了边界元法的优越性及其生命力。

本书主要介绍边界元法的基本理论及该方法在结构工程方面的一些应用，如杆件扭转、弹性静力学、梁板弯曲、结构动力分析、土与结构相互作用等。本书可供一般工程技术人员、结构工程专业人员及研究生作为学习边界元法的教材和参考书。

本书共分十二章。第一章概述了边界元法的发展历史和工程应用。第二章对边界元法理论所涉及的基本数学作了扼要介绍，包括积分方程、数值积分、Green 公式、delta 函数、基本解、加权残值法和弱变分公式。第三章详细讨论了位势问题和边界元法的基本原理。第四章至第七章及第九章至第十一章主要介绍边界元法在结构工程中的一些应用，包括杆件扭转、梁弯曲、弹性静力学、薄板的线性和非线性分析、结构动力分析、边界元与有限元耦合及土与结构相互作用。第八章给出了各种静力和动力问题的基本解和环基本解。第十二章着重讨论了域积分的处理和计算。

本书是作者在 10 多年研究成果的基础上经过不断补充完善而写成的，这项研究工作先后得到了国家自然科学基金(50578147)、

教育部优秀青年教师基金和浙江省自然科学基金的资助，作者在此表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中难免有缺点和错误之处，恳请读者批评指正。

作　者

目　　录

第一章 绪　论

众所周知，物理学、力学和工程技术中所涉及的大多数自然现象的客观规律均可用满足一定边界条件的偏微分方程来表示，即归结为定解条件下适定方程的求解[1]。由于方程本身或边界条件和形状的复杂性，应用解析法求解偏微分方程常常十分困难，只有在极少数情形下才有可能获得闭合解，在绝大多数情形下必须依靠数值方法进行近似求解[2]。

数值解法主要分为区域型和边界型两种。区域型解法包括有限元法[3]、差分法[4]和传递矩阵法[5,6]，边界型解法包括边界元法，或称为边界积分方程法[7]。有限元法通过变分原理将偏微分方程转化为代数方程，差分法通过差分近似将偏微分转化为差分方程，传递矩阵法将单元内的解析法与整体分析的近似法相结合，特别适用于一些变截面结构分析，而边界元法则通过积分定理将

[1] 陈恕行，李大潜，谷超豪. 数学物理方程. 北京：高等教育出版社，2002

[2] 刘北辰. 工程计算力学：理论与应用. 北京：机械工业出版社，1994

[3] 郭乙木. 线性与非线性有限元及其应用. 北京：机械工业出版社，2004

[4] 郭本瑜. 偏微分方程的差分方法. 北京：科学出版社，1988

[5] 向天宇，郑建军，周欣竹. 变截面圆拱强迫振动的传递矩阵算法. 土木工程学报，2000，33(1)：46～49

[6] 周欣竹，郑建军，姜璐. Winkler 地基上变厚度圆板的轴对称弯曲. 力学季刊，2005，26(1)：169～176

[7] Brebbia C A, Walker S. Boundary Element Techniques in Engineering. London: Butterworths, 1980

偏微分方程转化为边界积分方程。

边界积分方程法的基本思想是基于格林公式的应用，这一思想的提出可以追溯到20世纪初或更早。尽管这种理论的建立已有近百年的历史，但当时侧重于应用数学工具推导并建立边界积分方程，没有涉及积分方程的数值求解过程。直到20世纪60年代末随着电子计算机技术的迅速发展和应用，边界元法作为一种独立的数值方法才逐渐形成完整的理论体系[8]。

由于边界元法仅在边界上剖分，将问题的维数降低了一维，与有限元法和有限差分法相比，具有输入数据工作量小、节省计算时间、域内无插值误差、便于在微机上应用等优点。

目前，边界元法已广泛应用于位势问题、流体力学、地下流变、热应力、散射问题、电磁学、弹性力学、结构动力学、板壳分析、非弹性问题、材料和几何非线性问题、断裂力学、接触和自由边界问题、优化设计和灵敏度、岩土力学、结构与介质相互作用、土动力学、波的传播、金属合成材料加工、生物工程、声学等方面。

此外，边界元法在土木工程方面的应用还包括分析弹性地基上的结构、桩与土共同工作、隧道和涵洞等地下结构、岩石和土壤力学中的断层、节理和液化、块体结构、桥梁结构、框架剪力墙、混凝土断裂、结构动力效应等。

边界元法的数学理论基础可以说是由 Love、Bergman、Muskhelishvili、Mikhlin 和 Kupradze 等人建立起来的[9~12]。随着

[8] 杜庆华，岑章志，嵇醒等. 边界积分方程方法—边界元法. 北京：高等教育出版社，1989

[9] Love A E H. A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge: Cambridge University Press, 1924

[10] Bergman S, Schiffer M. Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics. New York: Academic Press, 1953

[11] Muskhelishvili N I. Singular Integral Equations. Groningen: Noordhoff, 1953

[12] Mikhlin S G. Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations. London: Pergamon Press, 1965

电子计算机的发展和应用,积分方程的深入研究为进一步应用边界积分方程法开辟了道路,自 20 世纪 60 年代起,这种方法得到了迅速的发展,Jaswon、Symm、Ponter、Banerjee、Butterfield、Cruse 和 Rizzo 等人做出了开创性的工作[13~21]。

1963 年,Jaswon 和 Symm 首先提出了位势问题的间接积分方程法[13,14],同年 Jaswon 和 Ponter 又提出了直接积分方程法,并成功地应用于弹性杆件的扭转[15]。1967 年,Rizzo 应用直接法求解了二维弹性力学问题[16]。1968 年,Rizzo 等人将二维边界积分方程法推广到非均匀弹性体,同年,Cruse 和 Rizzo 提出了瞬时弹性动力学问题的边界元法[17]。1969 年,Cruse 将直接法推广到三维弹性力学问题[18]。1972 年,Swedlow 和 Cruse 提出了弹塑性问题的边界积分公式[19]。1976 年,Lachat 和 Watson 引进了等参元等

[13] Jaswon M A. Integral equation methods in potential theory (I). Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1963, 275: 23~32.

[14] Symm G T. Integral equation methods in potential theory (II). Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1963, 275: 33~46.

[15] Jaswon M A and Ponter A R. An integral equation solution of the torsion problem. Proceedings of the Royal Society of London Series A, 1963, 273: 237~246.

[16] Rizzo F J. An integral equal approach to boundary value problem of classical elastostatics. Quarterly Applied Mathematics, 1967, 25(1): 83~95.

[17] Cruse T A, Rizzo F J. A direct formulation and numerical solution of the general elastodynamic problem (I). Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 22(1): 244~259.

[18] Cruse T A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. International Journal of Solids and Structures, 1969, 5(12): 1259~1274.

[19] Swedlow J L, Cruse T A. Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow. International Journal of Solids and Structures, 1971, 7(12): 1673~1683.

高阶元，提出一般化的离散方法，大大提高了计算效率和精度[20]。1977 年，Rizzo 和 Shippy 在热弹性边界元方面做出开创性的工作，成功地计算了核压力容器、构件等问题[21]。到 20 世纪 70 年代后期这门科学已趋于成熟。自 1978 年到现在已先后召开了数十届国际边界元会议和国际边界元技术会议，出版了各种边界元系列丛书，如“Progress in BEM”、“Developments in BEM”和“Topics in BE Research”等，每年在各种学术刊物和会议文集中均有数以百计的学术论文。Rizzo、Cruse、Banerjee、Brebbia、Kobayashi、杜庆华等人在边界元理论、应用和推广方面做了大量杰出的工作。

我国边界元法的研究大约始于 1978 年，冯康教授和杜庆华教授做出了开创性的工作，在固体力学、动力学、流体力学、热传导、结构与介质相互作用等方面，我国学者和技术人员均取得了大量的研究成果，先后召开了多届全国性的边界元学术会议和中日边界元学术研讨会，先后在学术会议和学术刊物上发表了数百篇学术论文。

边界元法作为一种数值方法应用于连续介质力学有着显著的优点。首先，它是一种一般的数值方法，可以广泛地应用于结构分析、热传导、电磁场等领域。其次，它是一种边界型的数值方法，不需对区域进行剖分，仅需对边界表面离散，使所研究的问题维数降低一维，这样不仅带来了一系列方便，而且由于仅在边界上离散，减少了离散误差，提高了计算精度。此外，边界元法特别适合于求解无限域和半无限域的问题、应力梯度变化大的问题，如应力集中和断裂力学。

[20] Lachat J C, Watson J O. Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1976, 10(5): 991～1005.

[21] Rizzo F J, Shippy D J. An advanced boundary integral equation method for three-dimensional thermoelasticity. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 1977, 11(9): 1753～1768.

边界元法的主要缺点是最后所形成的代数方程的矩阵为一非对称满阵，而且对于各向异性问题、非线性问题的处理比较麻烦。

有限元法是一种发展较早、非常成熟和有效的数值方法，适合于求解几何形状复杂、不规则区域问题，可以方便地处理非均质、各向异性和非线性问题，其程序系统化、标准化，有各种大型的商用软件。有限元法的主要缺点是需要对问题的整个区域进行离散，数据准备工作量大，总刚度矩阵阶数高，对计算机内存要求高，另外对于无限域、半无限域以及应力梯度变化大的问题不易处理。因此，将边界元法和有限元法进行耦合，可以充分发挥各自的优点，避免各自的缺点，从而能更有效地解决一些实际工程问题。

第二章　数学预备知识

2.1　积分方程

2.1.1　积分方程的分类

我们称以下形式的方程

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s + f(x) \tag{2.1}$$

为第二类 Volterra 积分方程[1,2]。在上式中，$\varphi(x)$ 是待求函数，$f(x)$ 是自由项，$K(x,s)$ 是积分方程的核，λ 是方程的参数，a 是一有限常数，而且 λ、$\varphi(x)$、$K(x,s)$ 和 $f(x)$ 可以是实数，也可以是复数。若将积分上限 x 换成一有限常数 b，就得到第二类 Fredholm 积分方程，即

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s + f(x) \tag{2.2}$$

若待求函数仅出现在积分号下，分别称为第一类 Volterra 积分方程和第一类 Fredholm 积分方程，即

---

[1] 陈传璋. 积分方程论及其应用. 北京：科学技术文献出版社，1987

[2] 路见可，钟寿国. 积分方程论. 北京：高等教育出版社，1990

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = f(x) \tag{2.3}$$

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = f(x) \tag{2.4}$$

在边界元法中，主要涉及到第二类 Fredholm 积分方程。与式(2.2)相对应的齐次方程为

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s \tag{2.5}$$

称下列方程

$$\Psi(x) = \lambda\int_a^b K(s,x)\Psi(s)\mathrm{d}s + g(x) \tag{2.6}$$

为方程(2.2)的转置方程，$K(s,x)$ 是 $K(x,s)$ 的转置核。与式(2.6)相对应的齐次方程为

$$\Psi(x) = \lambda\int_a^b K(s,x)\Psi(s)\mathrm{d}s \tag{2.7}$$

若核取为以下形式

$$K(x,s) = \frac{H(x,s)}{|x-s|^{\alpha}} \tag{2.8}$$

这里，$H(x,s)$ 为有界函数，α 为常数，且 $0<\alpha<1$，则式(2.2)称之为弱奇性核积分方程。若核取为以下形式

$$K(x,s) = \frac{A(x,s)}{x-s} \tag{2.9}$$

这里，函数 $A(x,s)$ 对 x 和 s 的偏导数均存在，且积分

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)\mathrm{d}s = \int_a^b \frac{A(x,s)}{x-s}\varphi(s)\mathrm{d}s \tag{2.10}$$

在柯西主值意义下存在，则式(2.2)称之为奇性核积分方程。

2.1.2 Fredholm 定理

定理 1：或者对任意的自由项 $f(x)$，非齐次积分方程(2.2)存