

用科学的CETC差距理念策划创作



荣德基

探究

教材

探究开放创造性学习

高二数学

上 试验修订版

含教材课后习题答案

<http://www.rudder.com.cn>

内蒙古少年儿童出版社



用科学的CETC差距理念策划创作

荣德基

析 材

POUXI

探究开放创造性学习

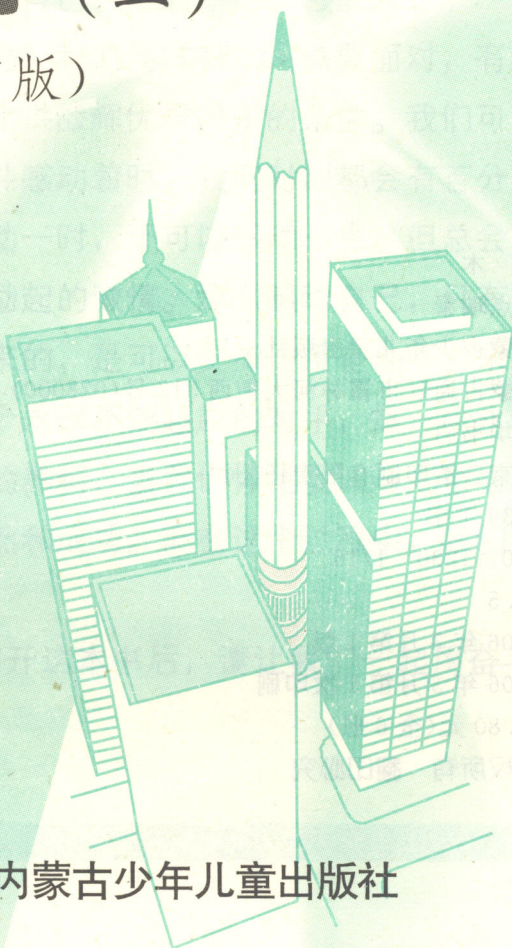
高二数学(上)

(试验修订版)

总主编:荣德基

本册主编:李俊之

编写人员:张胜利



内蒙古少年儿童出版社

· 图书在版编目(CIP)数据

荣德基剖析教材. 高二数学. 上: 探究开放创造性学习/荣德基主编. —通辽: 内蒙古少年儿童出版社, 2006. 3

ISBN 7-5312-1991-3

I. 荣… II. 荣… III. 数学课-高中-教学参考资料 IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 020132 号

责任编辑/巴 木

装帧设计/典点瑞泰

出版发行/内蒙古少年儿童出版社

地址邮编/内蒙古通辽市霍林河大街西 312 号(028000)

经 销/新华书店

印 刷/北京云浩印刷有限责任公司

总 字 数/2339 千字

规 格/880×1230 1/16

总 印 张/72.5

版 次/2006 年 3 月第 1 版

印 次/2006 年 3 月第 1 次印刷

总 定 价/97.80 元(全 6 册)

版权声明/版权所有 翻印必究



荣德教辅对教师和学生们的关爱

荣德教辅丛书编委会在认真用心地策划教辅的同时,更加注重对全国的教师和学生读者的跟踪服务和相互交流。为了保证您享受到相应服务,请在购书后一周内将填写好的《荣德教辅·读者信息档案表》寄回读者服务部,我们将为每一位教师和学生建立个人跟踪服务档案,并提供以下多种特色增值服务,敬请参与。

服务一:有奖征文活动

为了分享每一位读者用户的经验和喜悦,特组织“有奖征文活动”,内容如下:

活动目的:1. 促进教师教学经验的交流与共享;2. 增进学生学习方法的交流与共享。

活动对象:选购荣德教辅产品,并已经将《信息档案表》寄回的读者。

参与方法:请教师将教学经验,学生将自己认为最实用的学习方法,或使用荣德教辅、使用 CETC 学习法的心得体会详细地写下来。题目自拟,文体不限,字数限 800 字以内,请在信封上注明“征文”字样,寄回读者服务部。

评选方法:自 2006 年 7 月起两个月评选一次,以内容的新颖性、实用性、详细性及真实性作为评选依据。

奖励标准:获奖作品将刊登在《荣德通讯》上;同时,给予如下奖励:

一等奖:1 名,奖金 300 元;二等奖:3 名,奖金 200 元;三等奖:5 名,奖金 100 元;鼓励奖:10 名,赠荣德教辅 2 本。

服务二:读书建议奖

丛书编委会非常重视教师和同学们在使用荣德教辅过程中总结的意见和建议,设立了“读书建议奖”。2006 年,对具有建设性的建议给予奖励,奖项与服务一相同。欢迎教师和同学们积极对荣德教辅的各个方面提出意见,以便我们再版时采纳并修改,更好地为读者服务:

1. 本书在实用性上(题量及知识覆盖面)、好用性上(符合学习习惯)、够用性上(难易程度等方面)如何改进?
2. 本书结构体系的设计上有哪些值得改进的方面?
3. 在用过的教辅书中哪些对你最有帮助(请指出书名、科目、年级、出版社),主要优点是什么?

(接背面)

(请于购书后一周内填好信息沿此线剪下寄回)

荣德教辅·学生信息档案表

(《剖析》高二·数学)

请在“□”里打“√”: □教师 □学生 注:带“※”号的栏目学生不必填写。

姓名	性别		生日	月	日
※职务	※学科		※职称		
学校名称	省/自治区	市(县)	区	中学	
学校类别	<input type="checkbox"/> 完全中学 <input type="checkbox"/> 高中校 <input type="checkbox"/> 省重点 <input type="checkbox"/> 市重点 <input type="checkbox"/> 区重点 <input type="checkbox"/> 县重点 <input type="checkbox"/> 普通校				
※教师人数	人	※学生人数	人	所在年/班级	
联系电话	区号:	※办公室:	家庭电话:	手机:	
通讯地址				邮编	
家庭地址				邮编	

活动截止时间:2006年12月31日(以当地邮戳为准)。

获奖名单于2007年1月15日,在荣德网上公布,请注意上网查询,祝读者好运!

服务三:免费提供超值教育教学资讯

为了帮助各地中学实现优秀教育资源共享,为教师和同学们搭建沟通信息、教学经验、学习方法的交流平台,丛书编委会特别出版双月刊内部资料《荣德通讯》,通过网上发布、发送E-mail、邮寄、当地书店赠送等方式免费发放。

《荣德通讯》以四版报刊形式为教师们设置教育教学的相关信息、名校名师介绍、经验交流、教学教案等栏目;为同学们设置了学习方法、学习交流、考前辅导、交友互动等栏目。希望老师和同学们积极投稿参与。

服务四:“在线擂台”和“在线评估”

荣德网(www.rudder.com.cn)设有两个“金牌”栏目,一是“在线擂台”,即同学们在网上同台竞技,看谁解题正确并且最快,优胜者将获得奖品;二是“在线评估”即“成长标杆”,根据同学们网上同步试题的测试结果,进行全国、各省、各地区的的成绩成长排名,并剖析错题原因,弥补差距和不足。还有学生、教师都很喜欢的“试卷交流”、“课件交流”等栏目。

服务五:“读好书!收好礼!”活动

为了奖励选用荣德教辅两个系列以上的读者,丛书编委会精心策划了“读好书!收好礼!”活动:

如果您在当地荣德教辅销售书店一次性购买荣德教辅两个系列(注:1.必须含《剖析》或《三味组合》;2.必须为同一年级用书;3.同一系列不同学科;4.同一年级同一科《三味组合》的讲、练、测,只计为一本)以上正版荣德教辅共九本图书者,请将所购九本书中的《荣德教辅·读者信息档案表》填写后整齐裁下,一同寄回读者服务部,即可获得赠《三味组合》中《讲》、《练》、《测》任意一册。

通讯地址:北京100077-29信箱 读者服务部 收 邮编:100077

咨询电话:010-67528614 E-mail:rdj688@sohu.com

邮购汇款地址:北京100077-29信箱 裴立武 收 邮编:100077

邮购汇款查询:010-86991251

(请于购书后一周内填好信息沿此线剪下寄回)

荣德教辅·学生信息档案表

(接前表)

是否为老用户:是否

曾使用过:《点拨》 《典中点》 《三味组合》 《剖析》

选购途径

学校订购

老师推荐

书店自购

邮购

荣德网上购买

读书建议

(若建议内容较多,可以另附纸)

No.1
第一卷

析


典

点

三
组合

在知识的海洋里汲取智慧的浪花

见过一片海，
用渊博的知识激荡起壮阔的海面；
采过一丛花，
因智慧的碰撞绽放开含蓄的花瓣；
有过一个梦，
决定从这里启程……



相信自己是一只雄鹰

一个人在高山之巅的鹰巢里，抓到了一只幼鹰，他把幼鹰带回家，养在鸡笼里。这只幼鹰和鸡一起啄食、嬉闹和休息。它以为自己是一只鸡。这只鹰渐渐长大，羽翼丰满了，主人想把它训练成猎鹰，可是由于终日和鸡混在一起，它已经变得和鸡完全一样，根本没有飞的愿望了。主人试了各种办法，都毫无效果，最后把它带到悬崖边，一把将它扔了出去。这只鹰像块石头似的，直掉下去，慌乱之中它拼命地扑打翅膀，就这样，它终于飞了起来！

一本书可以让你相信自己是一只雄鹰，那么足慰编者心迹。



感动自己是最重要的

——写给荣德教辅所有的读者朋友们

一个学生的名字震撼着一代人。

一个学生的精神感动着所有人。

这个名字就是——洪战辉。

这种精神就是——奋斗！

一个人自立、自强才是最重要的！

一个人通过自己的奋斗改变自己劣势的现状才是最重要的！

同一条求学的路，他走得分外坎坷，也格外坚强。当我们也走在同一条路上，心中是否有同样一个声音在激荡着脚步的节拍？是否有同样的信念鞭策着绷紧的每一根意志神经？

为什么我们会崇拜心目中的英雄？因为每个人心中都有一个英雄梦，当一个人把这个梦实现的时候，便成为了人们心目中的英雄。

为什么我们因为别人的故事而感动，而受到激励？因为我们有着同样的梦想，同样喜欢那种充满激情的生活，喜欢用自己的坚毅涂抹多彩的人生。

为什么我们不自己感动自己？我们同样有坎坷需要面对，有困难需要克服，有挑战需要迎接，而且可能我们还有着比洪战辉优异得多的条件。我们可以，当然可以。

当我们为自己的拼搏和奋斗感动着时，我们时刻都会有百分百的能量去走后面的每一步路。听别人的故事，可以激动一时，不可以感动一生。但总会有一些时候，我们忙于自己的学业忘记了心底那份被激励起的激情。那么感动自己，只有感动自己的力量，是无时无刻不存在，是无穷无尽涌出来的，是可以支撑你用奋斗不息来贯穿生命始终的。

我们面对的是知识，是一个永远不能超越的对手，是一个永远开采不尽的矿源。它是丰富人生的色彩，是滋养人生的养料，当我们怀抱虔诚与渴望去追求它的时候，我们才会在这个过程中体会到成长、成熟和成功。而在这个过程中，我们要踏着奋斗和拼搏走过每一步求知的路。

所以，在2006年，在你翻开这本书后，请让我们一起用奋斗来捍卫自己的理想，用拼搏来装扮自己的人生！

剖析丛书编委会

2006年3月

震撼学生心灵的学习方法

◆ 撬动灵感的杠杆——荣德基老师创造CETC学习法灵感的由来

创造从学习开始。1997年两本书叫醒了荣老师沉睡的灵感神经，点亮了CETC循环学习法的灵魂之光。她们是《在北大等你》（光明日报出版社出版）和《等你在清华》（中国检察出版社出版）。

书中考入清华和北大的文、理科高考状元及优秀学生，用自己的切身经历，介绍了他们高效率的复习方式和独特的高考心态平衡法。摘录如下：

1. “我习惯于把每次测验中出现的错误记录下来，到下一次考试前翻过来看看，这样就不会重犯过去的错误。”

（熊远萌，1996年广西文科高考第一名 北京大学经济学院）

3. “对高考来说，重视一道错题比你做一百道习题也许更为重要。”

（洪森，1996年河北省文科高考第三名 北京大学法律系）

4. “我高中三年的单元考和期末考的卷子以及高三的各种试卷基本上都保存着，在最后关头把他们拿出来看

看，主要是看其中的错题，分析一下错误原因，讨论一下正确做法，使我加深了印象，不让自己再犯相同的错误。”

（徐海燕，1995年四川省理科高考第三名 北京大学生命科学学院）

7. “要重视自己的学习方法。在学习中，学习方法非常重要，两个智力和勤奋程度差不多的人，

方法好的可能会优秀很多。这里我只提供一个比较适用的方法：自己准备一个笔记本，把平时做题中出现的错误都整理上去，写上造成错误的原因和启示。如果你平时做题出错较多，比如一张练习卷要错五、六处或更多，抄错题恐怕得不偿失，这时你可以在试卷上把错题做上标记，在题目的旁边写上评析，然后把试卷保存好，每过一段时间，就把‘错题笔记’或标记错题的试卷翻着看一看，好处会很大。在看参考书时，也注意把精彩之处或做错的题目做上标记，这样以后你再看这本书时就有所侧重了，不必再整个看一遍。”

（魏少岩，1996年平时成绩优秀保送清华）

◆ 荣老师规律总结：

如何对待错误？考上清华、北大的同学们，都有一个错题记录本，关注做错的题，花精力复习做错的题！

2. “题不二错。我们班同学大都有一个错题本。通过分析错题，可以明白自己的弱点，更好地查漏补缺。同学们不妨一试。”

（段楠，1995年北京文科高考第一名 北京大学经济学院）

5. “我建议同学们能建立一个‘错题记录’，仔细分析原因，找出相应的知识点加以巩固强化，这样能避免重复犯同样的错误。”

（尹羊，1997年高考山东省理工科第一名 清华大学化学系）

6. “一个很有效的方法就是做完题后写总结、感想，尤其是对那些想了半天没做出来的或者会做做错的题尤为重要。要把自己为什么不会做

或者为什么做错的原因记下来，这样才会有真正的收获，做题的意义也在于此。我自己就一直是这样做的，如果你翻看我做过的习题集或试卷，就会发现随处都是用红笔写的批注，我从中收获极大。”

（陈卓恩，1997年保送清华大学经济管理学院 1997年高考北京市理工科第七名）

◆ CETC的灵魂——差距

C—comprehension：听老师讲课，读教材，看教辅，不懂的地方——差距。（为什么不懂，有差距）

E—exercise：做练习题的错题——差距。（练习时为什么做错，有差距）

T—test：各种考试中做错的题——差距。（考试时为什么做错，有差距）

C—countermeasure：应对措施——消灭差距的方式方法。（再次做题时，保证题不二错）

锁定差距：C、E、T

缩小差距与消灭差距：C

CETC：锁定差距——缩小差距——消灭差距（这是CETC的目标和核心）

荣德基CETC循环学习法：CETC不停地循环——循环——再循环，差距在循环中锁定，在循环中缩小，在循环中消灭。

目 录

CONTENTS

第六章 不等式

第一节 不等式的性质	1
I. 自主探究与发现	1
II. 大纲要求和学法剖析	1
III. 教材内容剖析	1
IV. 应用剖析	3
V. 最新题型剖析	4
VI. 三年高考真题剖析	5
VII. 过关测试题	6
VIII. 趣味阅读	6
第二节 算术平均数与几何平均数	6
I. 自主探究与发现	6
II. 大纲要求和学法剖析	6
III. 教材内容剖析	7
IV. 应用剖析	8
V. 最新题型剖析	9
VI. 三年高考真题剖析	10
VII. 过关测试题	11
VIII. 趣味阅读	12
第三节 不等式的证明	12
I. 自主探究与发现	12
II. 大纲要求和学法剖析	12
III. 教材内容剖析	12
IV. 应用剖析	13
V. 最新题型剖析	14
VI. 三年高考真题剖析	16
VII. 过关测试题	16
VIII. 趣味阅读	17
第四节 不等式的解法举例	17
I. 自主探究与发现	17
II. 大纲要求和学法剖析	18
III. 教材内容剖析	18
IV. 应用剖析	20
V. 最新题型剖析	21
VI. 三年高考真题剖析	22
VII. 过关测试题	22
VIII. 趣味阅读	23
第五节 含有绝对值的不等式	23
I. 自主探究与发现	23

II. 大纲要求和学法剖析	23
III. 教材内容剖析	24
IV. 应用剖析	24
V. 最新题型剖析	25
VI. 三年高考真题剖析	26
VII. 过关测试题	27
VIII. 趣味阅读	28
全章总结	28
第六章检测卷	31

第七章 直线和圆的方程

第一节 直线的倾斜角和斜率	33
I. 自主探究与发现	33
II. 大纲要求和学法剖析	34
III. 教材内容剖析	34
IV. 应用剖析	35
V. 最新题型剖析	36
VI. 三年高考真题剖析	37
VII. 过关测试题	38
VIII. 趣味阅读	38
第二节 直线的方程	38
I. 自主探究与发现	38
II. 大纲要求和学法剖析	39
III. 教材内容剖析	39
IV. 应用剖析	40
V. 最新题型剖析	42
VI. 三年高考真题剖析	43
VII. 过关测试题	44
VIII. 趣味阅读	44
第三节 两条直线的位置关系	44
I. 自主探究与发现	44
II. 大纲要求和学法剖析	45
III. 教材内容剖析	45
IV. 应用剖析	49
V. 最新题型剖析	50
VI. 三年高考真题剖析	51
VII. 过关测试题	52
VIII. 趣味阅读	53
第四节 简单的线性规划	53
I. 自主探究与发现	53

II. 大纲要求和学法剖析	53	VII. 过关测试题	95
III. 教材内容剖析	53	VIII. 趣味阅读	95
IV. 应用剖析	55	第三节 双曲线及其标准方程	96
V. 最新题型剖析	56	I. 自主探究与发现	96
VI. 三年高考真题剖析	57	II. 大纲要求和学法剖析	96
VII. 过关测试题	58	III. 教材内容剖析	96
VIII. 趣味阅读	59	IV. 应用剖析	97
第一学期期中检测卷	60	V. 最新题型剖析	99
第五节 曲线和方程	62	VI. 三年高考真题剖析	100
I. 自主探究与发现	62	VII. 过关测试题	100
II. 大纲要求和学法剖析	62	VIII. 趣味阅读	101
III. 教材内容剖析	62	第四节 双曲线的简单几何性质	102
IV. 应用剖析	63	I. 自主探究与发现	102
V. 最新题型剖析	64	II. 大纲要求和学法剖析	102
VI. 三年高考真题剖析	65	III. 教材内容剖析	102
VII. 过关测试题	65	IV. 应用剖析	103
VIII. 趣味阅读	66	V. 最新题型剖析	104
第六节 圆的方程	66	VI. 三年高考真题剖析	105
I. 自主探究与发现	66	VII. 过关测试题	105
II. 大纲要求和学法剖析	66	VIII. 趣味阅读	106
III. 教材内容剖析	66	第五节 抛物线及其标准方程	106
IV. 应用剖析	69	I. 自主探究与发现	106
V. 最新题型剖析	71	II. 大纲要求和学法剖析	106
VI. 三年高考真题剖析	71	III. 教材内容剖析	106
VII. 过关测试题	73	IV. 应用剖析	107
VIII. 趣味阅读	74	V. 最新题型剖析	108
全章总结	74	VI. 三年高考真题剖析	109
第七章检测卷	77	VII. 过关测试题	109
第八章 圆锥曲线方程		VIII. 趣味阅读	110
第一节 椭圆及其标准方程	79	第六节 抛物线的简单几何性质	110
I. 自主探究与发现	79	I. 自主探究与发现	110
II. 大纲要求和学法剖析	79	II. 大纲要求和学法剖析	111
III. 教材内容剖析	79	III. 教材内容剖析	111
IV. 应用剖析	80	IV. 应用剖析	112
V. 最新题型剖析	81	V. 最新题型剖析	113
VI. 三年高考真题剖析	82	VI. 三年高考真题剖析	114
VII. 过关测试题	83	VII. 过关测试题	115
VIII. 趣味阅读	84	VIII. 趣味阅读	115
第二节 椭圆的简单几何性质	84	全章总结	116
I. 自主探究与发现	84	第八章检测卷	120
II. 大纲要求和学法剖析	84	第一学期期末检测卷	123
III. 教材内容剖析	84	参考答案及规律总结	125
IV. 应用剖析	89	附录 1: 教材练习题剖析	144
V. 最新题型剖析	91	附录 2: 教材练习题剖析错题反思录	172
VI. 三年高考真题剖析	93		

第六章 不等式

全章综合剖析

1. 本章的主要内容: 本章的主要内容有不等式的性质; 不等式的证明; 不等式的解法; 不等式的应用四部分.

2. 在学科中的地位 and 重要性: 本章的知识点较少, 但综合性较强, 难度也比较大, 在高考试题中占有较大的比重, 高考所占分值比例远大于课时所占比例, 是高考命题的重点和热点之一. 从近几年的高考命题情况来看, 形式上为选择题或填空题, 解答题. 文科多以解不等式为主, 理科多以不等式的综合运用为主.

3. 已学过的关联知识回顾:

(1) 不等式的性质: $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$; (2) 反证法: 假设结论不成立, 然后根据推理、计算最后导出矛盾, 从而证明结论成立; (3) 函数的单调性: 函数 $y = f(x)$, 设 x_1, x_2 是其定义域内两个任意的数, 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) < f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为其定义域内的增函数; 若 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_1) > f(x_2)$, 称 $f(x)$ 为其定义域内的减函数; (4) 绝对值不等式的解法;

$|x| < a (a > 0) \Leftrightarrow -a < x < a$; $|x| > a (a > 0) \Leftrightarrow x > a$ 或 $x < -a$; (5) 一元二次不等式的解法; (6) 充分必要条件的概念.

4. 学习注意事项:

(1) 学习本章内容时, 注意联系前面学过的一元一次不等式、一元二次不等式、方程和函数等内容, 以便对不等式知识有较完整的认识; (2) 不等式的性质是基础, 特别注意不等式的两边同乘、同除、乘方、开方时不等号的方向; (3) 不等式的证明是本章的难点, 只需掌握比较法、综合法和分析法即可, 不必再掌握较难的其他方法, 要重视分析法的应用, 它是一种执果索因, 一步步寻找上一步成立的充分条件的方法, 寻找的过程其实就是推理、化简、计算的过程, 从而使难度大大降低; (4) $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 成立的条件是: “一正, 二定, 三等”; (5) 解不等式的关键是对不等式进行等价变形, 首先是变形时要注意无理式、分式、对数式对不等式的影响, 其次要注意不等式的解集形式, 要注意区间端点的开闭.

第一节 不等式的性质

A. 基础篇

I. 自主探究与发现

一、自主探究

- $a > b$ 是 $ac^2 > bc^2$ 的什么条件?
- $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的什么条件?
- $a > 0, b > 0$ 时, $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的什么条件?
- 已知 $x \leq 1, y \leq 1$, 则 $x + y$ 的最大值是多少?
- 已知 $\sin\theta \leq 1, \cos\theta \leq 1$, 则 $\sin\theta + \cos\theta$ 的最大值是多少?

从以上的各式中, 你能发现什么规律吗? 你能用语言叙述吗? 你能解释吗?

二、剖析发现

1. $a > b \not\Rightarrow ac^2 > bc^2$. 当 $c = 0$ 时, $ac^2 = bc^2$, 所以 $a > b \not\Rightarrow ac^2 > bc^2$. $ac^2 > bc^2 \Rightarrow a > b$, 所以 $a > b$ 是 $ac^2 > bc^2$ 的必要不充分条件.

2. $a > b \not\Rightarrow a^2 > b^2$, 如 $-1 > -2$, 但 $(-1)^2 < (-2)^2$.

$a^2 > b^2 \not\Rightarrow a > b$, 如 $(-2)^2 > 0^2$, 但 $-2 < 0$.

所以 $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的既不充分也不必要条件.

3. 可以将 a^2, b^2 看成是 $y = x^2$, 当 x 等于 a, b 时两个对应的函数值, $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数, 所以 $a > 0, b > 0, a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$. 所以 $a > 0, b > 0$ 时, $a > b$ 是 $a^2 > b^2$ 的充要条件.

4. 同向不等式相加, 不等号方向不改变. 所以 $x \leq 1, y \leq 1 \Rightarrow x + y \leq 2$, 即 $x + y$ 的最大值是 2.

5. $\sin\theta \leq 1, \cos\theta \leq 1$,

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}.$$

即 $\sin\theta + \cos\theta$ 的最大值是 $\sqrt{2}$.

注意: 4. 中变量 x, y 是两个相互独立的变量, 当 x 取最大值 1 时, y 能够取到最大值 1, 所以 $x + y \leq 2$.

5. 当 $\sin\theta$ 取得最大值 1 时, $\cos\theta$ 取不到 1, 所以 $\sin\theta + \cos\theta$ 的最大值不是 2, $\sin\theta, \cos\theta$ 是两个有联系的变量, 所以 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$.

II. 大纲要求和学法剖析

一、大纲要求

理解不等式的性质. 不等式的性质是学习不等式的证明和不等式的解法的基础, 应熟练掌握.

二、学法剖析

不等式的性质是解不等式或证明不等式时, 对不等式进行正确变形的依据, 而实数的一些理论是不等式的性质的基础. 因此, 学习时要运用实数的运算性质和符号法则, 并与等式的性质作比较, 去理解和运用不等式的性质. 要注意逻辑推理的严谨性. 要判断一个命题是真命题, 必须依据不等式的性质进行严格的证明, 要判断一个命题是假命题, 可举反例, 或由条件推出与结论相反的结果. 比较实数大小的方法: (1) 作差法, 基本步骤是: 作差 \rightarrow 变形 \rightarrow 判断符号, 主要变形方法有分解、配方、通分, 有时还需讨论; (2) 作商法, 基本步骤: 作商 \rightarrow 变形 \rightarrow 与 1 比较大小, 其前提是两数的符号是确定的.

III. 教材内容剖析

讲解点 1: 比较两实数 a 和 b 的大小的理论依据.

详释: 每一个实数都与数轴上的点一一对应, 且数轴上右边的点表示的实数要比左边的点表示的实数大. 设右边的点表示实数 b , 左边的点表示实数 a , 则有 $a < b$. 数值大的数减数值小的数大于 0, 即 $b - a > 0$, 即 $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$, 同理有 $a = b \Leftrightarrow a - b = 0, a > b \Leftrightarrow a - b > 0$, 于是两实数 a 与 b 的大小比较就可通过比较它们的差与零的大小来实现, 即 $a > b \Leftrightarrow a - b > 0, a = b \Leftrightarrow a - b = 0, a < b \Leftrightarrow a - b < 0$.

【例 1】比较 $(x-2)(x+3)$ 与 $(x+4)(x-3)$ 的大小.

解: $(x-2)(x+3) - (x+4)(x-3) = (x^2 + x - 6) - (x^2 + x - 12) = 6 > 0$, 所以 $(x-2)(x+3) > (x+4)(x-3)$.

规律总结: 比较两个代数式大小的方法步骤如下:

①作差; ②变形(常用到的方法有配方、提取公因式、分解因式等); ③判断符号. 在此题中, 变形是关键, 如何

变形,怎样变形,因题而异,有时还需对参数进行分类讨论.

【例 2】 若 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$, $\sin \alpha + \cos \alpha = a$, $\sin \beta + \cos \beta = b$, 则 ()

- A. $a < b$ B. $a > b$ C. $ab < 1$ D. $ab > 2$

解: 因为 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{4}$, 所以 $0 < 2\alpha < 2\beta < \frac{\pi}{2}$, 且 $0 < \sin 2\alpha < \sin 2\beta$, 所以 $a^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$, $b^2 = (\sin \beta + \cos \beta)^2 = 1 + \sin 2\beta$, 所以 $a^2 - b^2 = (1 + \sin 2\alpha) - (1 + \sin 2\beta) = \sin 2\alpha - \sin 2\beta < 0$, 所以 $a^2 < b^2$. 又 $a = \sin \alpha + \cos \alpha > 0$, $b = \sin \beta + \cos \beta > 0$, 所以 $a < b$. 故选 A.

规律总结: 一些函数的性质(如本例中三角函数的单调性)在解决不等式问题中有重要的作用,所以在平时的训练中要多注意它们之间的联系.

讲解点 2: 不等式的性质: 对称性、传递性、加法性质.

详释: $a > b \Leftrightarrow b < a$ 称为不等式的对称性,我们可由数轴上的点的坐标大小很容易得到验证; $a > b, b > c \Rightarrow a > c$, 称为不等式的传递性,这与初中内容:“第一量大于第二量,第二量大于第三量,则第一量大于第三量”相同; $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ 称为不等式的加法法则,语言叙述:“在不等式的两边加上同一个常数,不等式的方向不改变”,且有推论: $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d$. 语言叙述为:“同向不等式相加,不等式方向不改变”. 加法性质是不等式移项的理论依据. 今后解不等式和证明不等式要适当对不等式进行等价变形,即 $a + b > c \Leftrightarrow a > c - b$. 推论是同向不等式相加的法则依据,可推广到任意有限个,即有限个同向不等式相加,不等号方向不改变.

上面列举的不等式性质有“双向推出”与“单向推出”之分,特别应弄清楚哪种性质具有可逆性,哪种性质不具有可逆性.

【例 3】 已知 $a > 2$, 求证: $\log_a(a-1) \cdot \log_a(a+1) < 1$.

证明: 因为 $a > 2$, 所以 $\log_a(a-1) > 0, \log_a(a+1) > 0$.

又 $\log_a(a-1) \neq \log_a(a+1)$,

所以 $(\sqrt{\log_a(a-1)} - \sqrt{\log_a(a+1)})^2 > 0$,

所以 $\sqrt{\log_a(a-1)} \cdot \log_a(a+1) <$

$\frac{\log_a(a-1) + \log_a(a+1)}{2}$.

又 $\frac{\log_a(a-1) + \log_a(a+1)}{2} = \frac{1}{2} \log_a(a^2 - 1) <$

$\frac{1}{2} \log_a a^2 = 1$, 所以 $\log_a(a-1) \cdot \log_a(a+1) < 1$.

规律总结: 综合运用函数的单调性、不等式的性质等知识是解决函数与不等式的题的有效途径,证明有关二次函数、指数函数、对数函数的不等式时,将函数的单调性与不等式有机地结合起来,问题往往会得到简化.

讲解点 3: 不等式的性质: 乘法性质、开方性质.

详释: $\begin{cases} a > b \\ c > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bc; \begin{cases} a > b \\ c < 0 \end{cases} \Rightarrow ac < bc$. 称为不等式的乘法性质,语言叙述为:“在不等号的两边同乘以同一个正数,不等号方向不改变;同乘以同一个负数,不等号方向改变”. 另有两个推论: $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd$ 和

$a > b > 0, n \in \mathbf{N}$, 且 $n > 1 \Rightarrow a^n > b^n$. 这两个推论显然都为乘法法则的推广. $a > b > 0, n \in \mathbf{N}$, 且 $n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. 称为不等式的开方性质. 其中对 $a > b > 0, n \in \mathbf{N}$, 且

$n > 1 \Rightarrow a^n > b^n$, 与 $a > b > 0, n \in \mathbf{N}$, 且 $n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ 的证明可从函数的单调性角度来考虑. 我们知道函数 $f(x) = x^n, n \in \mathbf{N}$ 与 $f(x) = \sqrt[n]{x}, n \in \mathbf{N}$ 在 $(0, +\infty)$ 上均为增函数,当两个自变量为 a 和 b 时,且 $a > b > 0$ 时,则必有 $f(a) > f(b)$, 即有 $a^n > b^n$ 和 $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. 当然,我们还可以用反证法证明 $a > b > 0, n \in \mathbf{N}$, 且 $n > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$.

【例 4】 判断下列各命题的真假,并说明理由.

(1) 若 $a > b$, 则 $a^{2n+1} > b^{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$;

(2) 若 $a > b, c > d$, 则 $ac > bd$;

(3) 若 $a > b > 0 > c > d$, 则 $ad < bc$;

(4) 若 $a > b > 0$, 则 $a^n > b^n (n \in \mathbf{Z})$.

解: (1) 真命题,理由如下: 因为函数 $f(x) = x^{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数,当两个自变量为 a 和 b 时,且 $a > b$ 时, $f(a) > f(b)$, 即 $a^{2n+1} > b^{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$;

(2) 是假命题. 对于同向不等式相乘,很容易忽略两数为正数的条件,同样可举反例: $a = 3, b = 1, c = -5, d = -6$, 满足 $a > b, c > d$, 但 $ac < bd$;

(3) 是真命题. 理由如下: 因为 $a > b > 0 > c > d$, 所以 $a > b > 0, 0 > c > d$, 所以 $-d > -c > 0$. 所以 $a(-d) > b(-c) > 0$, 所以 $ad < bc < 0$. 所以是真命题;

(4) 是假命题. 很容易把 $n \in \mathbf{Z}$ 当成 $n \in \mathbf{N}$ 而理解为正确. 显然当 $n = -1$ 时,若 $a > b > 0$, 则 $a^n > b^n$ 是不成立的. 故为假命题.

规律总结: 解决此类问题往往由于记丢、记混条件而导致判断不正确. 错误地运用不等式的性质,推理过程中不考虑转化的等价性,克服这些问题的方法是对定理的条件和结论进行强化记忆,并且要进行强化训练,使自己养成审题仔细、推理严密的良好运算习惯.

讲解点 4: 求代数式的变化范围.

详释: 已知 a 的范围, b 的范围, 如何求 $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}$ 等代数式的变化范围? (1) 正确运用不等式的性质,如同向不等式的可加性,乘法法则要保证大于零的条件,如遇到减法,可将不等式两边先乘以 -1 , 注意此时不等号要变向,再按同向不等式相加进行; (2) a, b 必须是独立的变量,即 a, b 之间是无任意联系的, a, b 之间是没有制约关系的,如果 a, b 之间有制约关系,那么将 a 与 b 的范围直接加起来就不一定是 $a + b$ 的范围了.

【例 5】 已知 $-1 < x < 3, 1 < y < 2$, 求 $x + y, x - y, \frac{x}{y}$ 的取值范围.

解: 因为 $-1 < x < 3, 1 < y < 2$, 所以 $0 < x + y < 5$.

又 $-2 < -y < -1$, 所以 $-3 < x - y < 2$.

又 $\frac{1}{2} < \frac{1}{y} < 1$, 当 $0 \leq x < 3$ 时, $0 \leq \frac{x}{y} < 3$; 当 $-1 <$

$x < 0$ 时, $0 < -x < 1, 0 < \frac{-x}{y} < 1, -1 < \frac{x}{y} < 0$.

综上所述, $-1 < \frac{x}{y} < 3$.

所以 $0 < x + y < 5, -3 < x - y < 2, -1 < \frac{x}{y} < 3$.

规律总结: 解此类题关键是正确使用不等式的性质,注意使用的条件,不具备条件的要创造条件,如异向不等式不能直接相加,此时可将一个两边同乘以 -1 , 变为同向不等式再进行相加,相乘时,必须保证是正数,必要时可将变量进行分类讨论后再进行综合.

【例 6】 设 $a = \sin^2 \theta, b = \sin \theta + 1$, 求 $a + b$ 的取值范围.

错解: 因为 $0 \leq a = \sin^2 \theta \leq 1$, $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, $0 \leq b = \sin \theta + 1 \leq 2$. 所以 $0 \leq a + b = \sin^2 \theta + \sin \theta + 1 \leq 3$.

正确解法: $a + b = \sin^2 \theta + \sin \theta + 1$

$$= \left(\sin \theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

因为 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$, $-\frac{1}{2} \leq \sin \theta + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$,

所以 $0 \leq \left(\sin \theta + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$, $\frac{3}{4} \leq \left(\sin \theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \leq 3$, 所以 $\frac{3}{4} \leq a + b \leq 3$.

规律总结: 此题极易犯的错误是将 a, b 的范围直接进行相加, 而没有考虑到 a, b 的关联关系, 正确解法是将 $\sin^2 \theta + \sin \theta + 1$ 视作关于 $\sin \theta$ 的一元二次函数, 然后求该函数的值域即可.

B. 应用篇

IV. 应用剖析

一、知识点综合应用剖析

知识点综合应用问题 1: 不等式的性质与一元二次函数, 一元二次方程相结合的综合应用.

详释: 一元二次函数的图象若与 x 轴有交点, 则交点的横坐标即为一元二次方程的解. x 轴上方的图象即为 $y > 0$ 的部分, 对应的 x 值即为 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解, x 轴下方的图象即为 $y < 0$ 的部分, 对应的 x 值即为 $ax^2 + bx + c < 0$ 的解, 可见一元二次不等式与一元二次函数, 一元二次方程是紧密相关的, 它们是有机的整体. 因此, 将不等式与一元二次方程和一元二次函数相结合命题是最重要的热点.

【例 1】 关于 x 的方程 $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一负实数根的充要条件是()

- A. $0 < a \leq 1$ B. $a < 1$
C. $a \leq 1$ D. $0 < a \leq 1$ 或 $a < 0$

解法一: 此题为选择题, 观察选项知, 最重要的区别是 $a = 0$ 与 $a = 1$ 的区别. 先将 $a = 0$ 代入, 得 $2x + 1 = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, 符合题意, 排除 A、D. 再将 $a = 1$ 代入, 得 $x^2 + 2x + 1 = 0$. 解得 $x = -1$, 符合题意, 排除 B. 所以选 C.

解法二: $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 至少有一负实数根.

当 $a = 0$ 时, $2x + 1 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$, 符合题意.

当 $a \neq 0$ 时, 若方程有两负根, 需满足

$$\begin{cases} \Delta \geq 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ x_1 x_2 > 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4 - 4a \geq 0, \\ -\frac{2}{a} < 0, \\ \frac{1}{a} > 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a \leq 1, \\ a > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

所以 $0 < a \leq 1$.

若方程有一正根和一负根, 需满足

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ x_1 x_2 < 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 4 - 4a > 0, \\ \frac{1}{a} < 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a < 1, \\ a < 0. \end{cases} \quad \text{所以} \quad a < 0.$$

若方程有一负根和一零根, 则不满足 $x_1 x_2 = 0 =$

$\frac{1}{a}$. 综上所述: a 的取值范围为 $a \leq 1$. 故选 C.

【例 2】 已知关于 x 的方程 $7x^2 - (m+13)x + m^2 - m - 2 = 0$ 有两实根 x_1 和 x_2 , 若 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$, 求实数 m 的取值范围.

解: 设 $f(x) = 7x^2 - (m+13)x + m^2 - m - 2$.

因为两实根 x_1 与 x_2 满足 $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$, 如图 6-1-1.

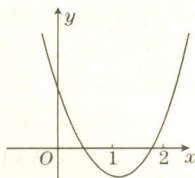


图 6-1-1

所以需满足 $\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) < 0, \\ f(2) > 0. \end{cases}$

$$\text{即} \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0, \\ 7 \times 1^2 - (m+13) \times 1 + m^2 - m - 2 < 0, \\ 28 - 2(m+13) + m^2 - m - 2 > 0. \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} m^2 - m - 2 > 0, \\ m^2 - 2m - 8 < 0, \\ m^2 - 3m > 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} m > 2 \text{ 或 } m < -1, \\ -2 < m < 4, \\ m > 3 \text{ 或 } m < 0. \end{cases}$$

所以 $-2 < m < -1$ 或 $3 < m < 4$.

规律总结: 求解变量的取值范围问题是通过一元二次函数的图象来解决一元二次不等式, 揭示了一元二次不等式、一元二次函数、一元二次方程的内在联系. 我们掌握了它们之间的实质联系, 就掌握了解决此类问题的关键.

知识点综合应用问题 2: 不等式的性质与初等函数性质的综合应用.

详释: 初等函数如指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 和对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 在各自的定义域内都有自己的单调性, 单调性的含义即为不等式: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$). 所以利用单调性往往可以比较两个实数的大小, 这也是不等式性质应用的另一种载体.

【例 3】 若 $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > b$, 则下列各式正确的是()

- A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{b}{a} < 1$
C. $\lg(a-b) > 0$ D. $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

解: D

规律总结: ① $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为单调减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数, 所以 $a > b$, 无法断定 a^2 与 b^2 的大小, 所以 A 不正确; ② 因为 $a > b$, a 可能为 0, 所以 $\frac{b}{a} < 1$ 是不正确的; ③ $y = \lg x$, 在 $(0, +\infty)$ 上为单调增函数, 当且仅当 $x > 1$ 时, $y > 0$, 所以仅从 $a > b$ 中无法断定 $a - b$ 与 1 的大小, 故无法断定 $\lg(a - b) > 0$ 是否正确. 所以不正确; ④ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调减函数, 已知 $a > b$, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$, 所以 D 正确. 故选 D.

【例 4】 设 $a > 0$, 且 $a \neq 1, t > 0$, 比较 $\frac{1}{2} \log_a t$ 与 $\log_a \frac{t+1}{2}$ 的大小.

解: $\frac{1}{2} \log_a t = \log_a \sqrt{t}$, $\frac{t+1}{2} - \sqrt{t} = \frac{t+1-2\sqrt{t}}{2} = \frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2} \geq 0$. 所以 $\frac{t+1}{2} \geq \sqrt{t}$.

当 $0 < a < 1$ 时, $\log_a \frac{t+1}{2} \leq \frac{1}{2} \log_a t$.

当 $a > 1$ 时, $\log_a \frac{t+1}{2} \geq \frac{1}{2} \log_a t$.

规律总结: 不等式问题与函数的单调性是紧密联系的, 当已知函数 $y = f(x)$ 在某一区间上是增(或减)函数时, 那么在 $x_1 < x_2$ (x_1, x_2 在这个区间内) 条件下,

x_1 与 x_2 对应的函数值 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小就能够确定下来,所以熟练掌握函数的单调性也是解决不等式问题的关键.

二、实际应用剖析

(一) 本节知识在经济和科学技术中的应用

实际应用问题 1: 利用比较实数大小解决实际问题.

详释: 经济生活中经常会遇到等与不等的问题, 不等就意味着有大小之分, 那么谁大谁小呢? 就要用一种方法去比较, 我们常用到的方法就是比较法, $A - B > 0 \Leftrightarrow A > B$, 是比较两个实数大小的理论依据. 如商家如何运作才能赚取最大利润? 公司如何设计方案才能成本最低? 水管的横截面为什么设计为圆形的? 这些问题都与不等式有关.

【例 5】 某市光明医院的布局是一个长方形布局, 市政府对医院进行重新规划改造, 需改成正方形布局, 但要求是要么保持原面积不变, 要么保持原周长不变, 那么对于光明医院来说应选哪种布局最有利.

解: 设原医院长方形的长为 a , 宽为 b , 若保持原面积不变, 改造后的正方形面积为 ab , 若保持原周长不变, 则规划后的周长为 $2(a+b)$, 正方形的边长为 $\frac{2(a+b)}{4}$, 面积为 $\left[\frac{2(a+b)}{4}\right]^2$. 对于医院最有利, 即改造后哪一种方案的面积较大,

所以比较 ab 与 $\left[\frac{2(a+b)}{4}\right]^2$ 的大小.

$$ab - \left[\frac{2(a+b)}{4}\right]^2 = ab - \left[\frac{(a+b)}{2}\right]^2 \\ = ab - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{4ab - (a+b)^2}{4} = \frac{-(a-b)^2}{4}.$$

因为 $a \neq b$, 所以 $ab - \left[\frac{2(a+b)}{4}\right]^2 = -\frac{(a-b)^2}{4} < 0$.

所以 $ab < \left[\frac{2(a+b)}{4}\right]^2$. 所以选择保持原周长不变的方案有利.

规律总结: 利用比较实数大小可以解决一些实际应用问题, 常用方法步骤如下: ①理解题意; ②建立数学模型(即将实际问题转化为数学问题); ③利用比较大小的方法比较大小(常用作差法); ④进行论断, 回答问题.

(二) 趣味应用

实际应用问题 2: 利用比较实数大小解释浓度稀释问题.

详释: 不等式的应用是广泛的, 有严密的推理、有趣的知识, 下面的例子就包含着重要不等式的知识在里面.

【例 6】 一碗糖水, 若再往里面加些糖(不能饱和), 问糖水是变甜了还是变淡了? 试用数学知识去解释.

解: 显然是变甜了, 用不等式知识解释如下:

设原来碗里糖的质量为 a , 糖和水的质量为 $b(b > a)$, 那么糖水的甜度(其实是百分比浓度)为 $\frac{a}{b}$, 再加入糖的质量设为 m , ($m > 0$). 那么加入后的甜度为 $\frac{a+m}{b+m}$, 只需比较 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{a+m}{b+m}$ 的大小即可. $\frac{a}{b} - \frac{a+m}{b+m} = \frac{a(b+m) - b(a+m)}{b(b+m)} = \frac{am - bm}{b(b+m)} = \frac{m(a-b)}{b(b+m)} < 0$.

所以 $\frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$, 所以加入糖后糖水是变甜了.

规律总结: 无论是严肃的推理, 还是有趣的故事, 用数学知识解决的方法是将具体问题数学化, 用数学方法处理, 然后做出论断.

C. 拔高篇

V. 最新题型剖析

一、开放性问题剖析

问题入门指导: 开放性问题在本节中常见的是不等式性质的应用开放, 多见于有关不等式性质的推理、论证等. 要求熟练掌握不等式的基本性质, 注意条件和结论之间的必然联系, 融观察、分析、猜想、推证于一体, 寻找解题途径.

【例 1】 已知 $a > b (ab \neq 0)$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立吗? 如果不成立, 请加一个条件, 使 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立.

解: $a > b (ab \neq 0)$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不一定成立. 若 $a = 2$, $b = -3$, 则 $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{b} = -\frac{1}{3}$. 所以 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立.

添加一个条件为: $a > 0, b > 0$, 此时 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立.

规律总结: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{ab} < 0$. 因为 $a > b$, 所以 $b-a < 0$. 需使 $ab > 0$ 成立. 所以 $a > b$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的充要条件是 $ab > 0$. 所以只要再添加符合 $ab > 0$ 的一个条件即可满足题意. 此题的条件开放体现了数学思维的多样性.

【例 2】 根据你自己所学知识的积累, 在 $a > b$ 的条件下, 写出 3 个一定成立的结论和 3 个不一定成立的结论.

解: 若 $a > b$, 则一定成立的结论有:

(1) $a+c > b+c$; (2) $2^a > 2^b$; (3) $a^3 > b^3$.

不一定成立的结论有:

(1) $a^2 > b^2$; (2) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (3) $|a| > |b|$.

规律总结: 此题是在 $a > b$ 的条件下对结论开放, 考查不等式的重要性质和常见函数的图象和单调性, 形式灵活, 结果多样.

二、探究性问题剖析

问题入门指导: 本节遇到的探究性问题往往是根据以不等式为知识背景对有关实数大小、不等式的结论是否成立进行探究. 探究的过程有时较繁, 需要进行推理、分析和判断, 探究的结论有时也不唯一, 需要验证, 探究过程需找到一个合理的、科学的程序, 不要盲目地去探究.

【例 3】 实数 a, b, c, d 满足下列三个条件:

(1) $d > c$;

(2) $a+b=c+d$;

(3) $a+d < b+c$. 问能否将 a, b, c, d 的大小顺序排列出来.

解: 因为 $a+d < b+c$, 所以 $d-b < c-a$.

又因为 $a+b=c+d$, 所以 $c-a=b-d$.

所以 $d-b < c-a=b-d$, $a-c < b-d=c-a$,

所以 $d < b, a < c$. 因为 $d > c$, 所以 $a < c < d < b$.

规律总结: 此题条件较多, 如果选择角度不合适, 那么两两比较就需要进行 6 次, 比较繁琐, 我们运用不等式的性质, 找到一个合理的程序, 解题过程就很简洁.

三、试一试

问题入门指导: 用比较两个实数大小的方法去解决与不等式有关的数学问题, 与此联系密切的是证明某函数 $y=f(x)$ 在某区间上的单调性. 事实上, 设出 x_1, x_2 是定义域内的任意的两个自变量后, 只需比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小, 经常用的方法就是作差法, 用比较两个实数大小的方法去解决函数的增减性问题, 不妨试一试.

【例 4】 证明: $y=x^3+1$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增函数.

$$\begin{aligned} \text{证明: 设 } x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty) \text{ 且 } x_1 < x_2, \\ f(x_1) - f(x_2) &= (x_1^3 + 1) - (x_2^3 + 1) \\ &= x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2) \left[\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 \right]. \end{aligned}$$

因为 $x_1 < x_2$, 所以 $x_1 - x_2 < 0$,

$$\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0,$$

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0, f(x_1) < f(x_2)$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为单调增函数.

规律总结: 作差后 $f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$, 关键是将 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ 进行配方, 化为 $\left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2$, 再判断.

注意此处不能这样做: 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ 时, $x_1 - x_2 < 0, x_1^2 + x_2^2 > 0, x_1x_2 > 0$, 所以 $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0$. 当 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时, $x_1 - x_2 < 0, x_1^2 + x_2^2 > 0, x_1x_2 > 0$, 所以 $(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < 0$.

所以综上所述 $f(x_1) < f(x_2), f(x)$ 为单调增函数.

以上解法的错误为将定义域 $(-\infty, +\infty)$ 分成了两部分 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 进行讨论, 因为函数的单调性是针对一个区间而言的, 不能说 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上是增函数, 再如, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为单调减函数, 在 $(0, +\infty)$ 上为单调减函数, 但不能说 $f(x)$ 在其定义域内为减函数.

四、观察与思考

问题入门指导: 学习数学需要思考, 更需要去观察问题、分析问题、解决问题, 用我们学过的知识去解释一些现象、揭示事物的本质是解决实际问题的主要内容.

【例 5】 篮球运动员投篮次数为 n , 投中次数为 n_1 , 将 $\frac{n_1}{n}$ 称为投篮命中率, 一篮球运动员第一次投篮未中, 之后投篮均投中, 问随着投篮次数的增加投篮命中率变高了还是变低了? 命中率能等于 1 吗?

解: 篮球运动员只投了一次, 则命中率为 0;

投了两次, 则命中率为 $\frac{1}{2}$; 投了三次, 则命中率为

$$\frac{2}{3}; \dots; \text{投了 } n \text{ 次, 则命中率为 } \frac{n-1}{n} (n > 1); \dots;$$

命中率依次为 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$.

第 n 次投完, 命中率为 $\frac{n-1}{n}$,

第 $n+1$ 次投完, 命中率为 $\frac{n}{n+1}$,

$$\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1) - n^2}{n(n+1)}.$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)} < 0,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \dots < \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} < \dots < 1. \text{ 故}$$

命中率越来越高, 但永远不会等于 1.

规律总结: 将篮球运动员投篮命中率问题转化为数学中的分式问题, 进一步去比较两个实数的大小, 这是解决实际问题的关键.

VI. 三年高考真题剖析

本节考点剖析: 不等式内容是中学数学的重点内容, 也是高考的考查重点, 不等式的性质是不等式的基础, 是证明不等式和解不等式的理论依据. 由于是基础知识, 所以体现的更多的是它的工具性, 单独命题的很少, 更多的是在性质的基础上进行深层次的考查.

【例 1】 (2004, 北京理, 5 分) 已知 a, b, c 满足 $c < b < a$, 且 $ac < 0$, 那么下列选项中不一定成立的是 ()

- A. $ab > ac$ B. $c(b-a) > 0$
C. $cb^2 < ab^2$ D. $ac(a-c) < 0$

解: 因为 $c < b < a$, 且 $ac < 0$, 所以 $a > 0, c < 0$,

所以 $\left. \begin{matrix} b > c \\ a > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ab > ac$. 故 A 正确.

又 $\left. \begin{matrix} b < a \\ c < 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} b-a < 0, \\ c < 0, \end{cases} \Rightarrow c(b-a) > 0$. 故 B 正确.

又 $c < a$ 但 b 可能为零, 故 $cb^2 < ab^2$ 不一定成立.

又 $\left. \begin{matrix} ac < 0 \\ c < a \end{matrix} \right\} \Rightarrow ac(a-c) < 0$.

故 D 正确.

综上, 故选 C.

规律总结: 正确使用不等式的性质是解决问题的关键, 特别是使用性质时的前提条件, 注意特殊情况, 否则容易混淆正误.

【例 2】 (2004, 北京春季, 5 分) 已知三个不等式: $ab > 0, bc - ad > 0, \frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ (其中 a, b, c, d 均为实数),

用其中两个不等式作为条件, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 可组成的正确命题的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解: $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0 \Leftrightarrow \frac{bc - ad}{ab} > 0$.

所以 $(1) \left. \begin{matrix} ab > 0 \\ bc - ad > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{bc - ad}{ab} > 0$, 正确;

$(2) \left. \begin{matrix} ab > 0 \\ \frac{bc - ad}{ab} > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow bc - ad > 0$, 正确;

$(3) \left. \begin{matrix} bc - ad > 0 \\ \frac{bc - ad}{ab} > 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow ab > 0$, 正确.

所以共有 3 个正确命题. 综上, 故选 D.

规律总结: 关键是找到 $\frac{c}{a} - \frac{d}{b} > 0$ 的充要条件 $\frac{bc - ad}{ab} > 0$, 将 $bc - ad$ 与 ab 的符号与 $\frac{bc - ad}{ab}$ 的符号联系起来, 再根据不等式的性质逐一判断.

【例 3】 (2005, 全国 III, 5 分) 若 $a = \frac{\ln 2}{2}, b = \frac{\ln 3}{3}, c = \frac{\ln 5}{5}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

解: C

规律总结: $a = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln 2^{\frac{1}{2}}$, $b = \ln 3^{\frac{1}{3}}$, $c = \ln 5^{\frac{1}{5}}$, 因为 $(2^{\frac{1}{2}})^{30} = 2^{15} = (2^3)^5 = 8^5 = (2^5)^3 = 32^3$, $(3^{\frac{1}{3}})^{30} = 3^{10} = (3^2)^5 = 9^5$, $(5^{\frac{1}{5}})^{30} = 5^6 = (5^2)^3 = 25^3$, 所以 $25^3 < 32^3 = 8^5 < 9^5$, 所以 $5^{\frac{1}{5}} < 2^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{1}{3}}$, 所以 $c < a < b$.



过关测试题 (125)

1. (讲1练习) 若 $x \neq 2$ 或 $y \neq -1$, $M = x^2 + y^2 - 4x + 2y$, $N = -5$, 则 M 与 N 的大小关系是()

- A. $M > N$ B. $M < N$
C. $M = N$ D. 不能确定

2. (讲3练习) $\frac{1}{x} < 1$ 是 $x > 1$ 的()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. (讲1、3练习) 命题甲: 实数 a, b 满足 $\begin{cases} 3 < a+b < 5, \\ 2 < ab < 6. \end{cases}$

命题乙: $\begin{cases} 1 < a < 2, \\ 2 < b < 3. \end{cases}$ 那么()

- A. 甲是乙成立的充分不必要条件
B. 甲是乙成立的必要不充分条件
C. 甲是乙成立的充要条件
D. 甲不是乙成立的充分条件, 也不是必要条件
4. (讲2练习) 设 $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, 且 $a > b, c > d$, 则下列结论正确的是()

- A. $a+c > b+d$ B. $a-c > b-d$
C. $ac > bd$ D. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$

5. (讲1练习) 若 $a > 0, b < 0, a < |b|$, 则将 $a, -a, b, -b$ 从小到大排列为_____

6. (讲2、3练习, 探究性问题) 若 $0 < a < b$, 且 $a+b=1$, 则 $\frac{1}{2}, a, 2ab, a^2+b^2$ 中最大的是_____

7. (讲2、3练习, 开放性问题) 给定实数 a, b, c , 设计一个含 a, b, c 的不等式, 使该不等式为 $a < b$ 的充分不必要条件: _____

8. (讲2、3练习) 给出条件: (1) $ab < 0$; (2) $ab > 0$;

(3) $a > 0 > b$; (4) $0 > a > b$, 其中能够推出 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 成立的有_____ (只能四选一).

9. (讲4练习) 设 α, β 满足 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \beta < \pi$, 则 $\alpha - \beta$ 的范围是_____.

10. (讲4练习) 已知 $-1 \leq a+b \leq 1, 1 \leq a-b \leq 3$, 求 $3a-b$ 的取值范围.

VIII 趣味阅读

炒菜中的“模糊数学”

模糊数学作为一个新兴的数学分支, 使过去那些与数学毫不相干的或关系不大的学科(如生物学、心理学、语言学、社会科学等)都有可能用定量化和数学化加以描述与处理, 使数学的应用范围大大扩展, 模糊数学在计算机仿真技术、多媒体辨识等领域的应用取得突破性进展, 如图象和文字的自动辨识、自动学习机、人工智能、音频信号辨识与处理等领域均借助了模糊数学的基本原理和方法.

模糊数学到底离我们有多远呢?

比如说: “今天天气不错!” 这句话就是模糊的, 你可以根据这句话放心出门, 但如果精确到今天的气压是多少, 风力有多大, 紫外线强度有多少, 就无法判断自己该不该出门.

炒菜就是人们利用大脑对模糊信息进行处理的一个例子, 炒菜的人不可能用温度计来测炒锅达到什么温度, 然后再下菜, 也不会准备一只天平来称该下多少菜.

“如果你将什么事情都要精确, 你将寸步难行.”

第二节 算术平均数与几何平均数



自主探究与发现

一、自主探究

1. 问: 函数 $y = x + \frac{1}{x} (x > 0)$ 的最小值是 2 吗?

2. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的值域是什么?

3. $y = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}$ 的最小值是 2 吗?

二、剖析发现

1. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上为单调减函数, 在 $[1, +\infty)$

上为单调增函数, 当 $x=1$ 时, $y = x + \frac{1}{x}$ 取得最小值 2.

2. 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 的值域为 $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

$$3. y = \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} \geq 2 \sqrt{\sin^2 x \cdot \frac{1}{\sin^2 x}} = 2.$$

当且仅当 $\sin^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$,

即 $\sin^2 x = 1, \sin x = \pm 1$ 时取等号.

大纲要求和学法剖析

一、大纲要求

掌握两个(不扩展到三个)正数的算术平均数不小于它们的几何平均数的定理, 并会简单的应用. 高考中可单独命题, 也可以与函数相结合综合考查, 均值定理在不等式的证明和求最值问题中, 作用显著.

二、学法剖析

不等式 $a^2 + b^2 \geq 2ab (a, b \in \mathbf{R})$ 与不等式 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} (a > 0, b > 0)$ 及其应用是本节的重点, 也是难点, 掌握时应从知识的发生过程去掌握, 特别是均值不等式