《高等数学》学习辅导与考研用书

高等数学学习辅导

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO

上

主编 彭富连

湖南师范大学出版社

《高等数学》学习辅导与考研用书

高等数学学习辅导

GAODENG SHUXUE XUEXI FUDAO

GAODENG
SHUXUE
XUEXI
FUDAO

上

主　编　彭富连
编　者　彭富连　刘迪芬

湖南师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习辅导（上）/彭富连主编．—长沙：湖南师范大学出版社，2006.9

ISBN 7-81081-663-2

Ⅰ．高…　Ⅱ．彭…　Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 115530 号

高等数学学习辅导（上）

◇主　　编：彭富连

◇策划组稿：周玉波　莫　华
◇责任编辑：莫　华　颜李朝　王卫兵　卢腊军
◇责任校对：刘琼琳　蒋旭东　胡晓军
◇出版发行：湖南师范大学出版社
地址/长沙市岳麓山　邮编/410081
电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636
网址/www.hunnu.edu.cn/press
◇经销：湖南省新华书店
◇印刷：湖南新华印刷集团有限责任公司（邵阳）

◇开本：787×1092　1/16
◇印张：16.25
◇字数：437 千字
◇版次：2006 年 9 月第 1 版　2006 年 9 月第 1 次印刷
◇印数：1—4000 册
◇书号：ISBN 7-81081-663-2/O·008
◇定价：28.00 元

前 言

学习一门课程，一要掌握基本理论，二要培养实践能力. 理论和能力是相辅相成的，理论可以帮助学生锻炼能力，但绝不会自动转化为能力；能力需要自身动手，通过本身的实践，才能逐步提高. 学习高等数学更是如此，一要掌握好基本概念、基本理论和基本方法，二要提高解题能力，学会运用所学知识去解决实际问题.

“高等数学学习辅导”是作者根据现行《高等数学教学大纲》及教育部考试中心新修订的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中对高等数学的有关要求，本着面向全体与发展个性相结合的原则，结合作者多年从事高等数学教学、研究和考研培训及辅导积累的经验编写而成. 本书注重实用性、针对性和能力训练，旨在帮助正在学习高等数学的学生和准备攻读硕士研究生的考生全面、系统地学习或复习高等数学的基本理论与基本方法，帮助读者打好基础，提高分析问题和解决问题的能力，培养读者的创新精神和实践能力.

本套辅导书共8章，分上、下两册出版. 上册包括函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学与常微分方程；下册包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学与多元函数积分学. 每章由以下四部分组成：

一、知识扫描

根据上述“教学大纲”和“考试大纲”所要求的知识点和考点列出“基本要求”，旨在使广大读者明确每一章的重点内容及需要掌握的程度. 然后在“内容解析”中把基本要求中的内容（概念、性质、定理和公式等）进行简明扼要地叙述并加以细化、归纳和总结，便于读者正确地把握基本要求，并对基本概念、基本理论、基本方法和重点、难点问题有个清楚的了解.

二、知识网络

将各章的主要知识点以网络的方式列出，使读者对各章知识点的外延与内涵一目了然.

三、同步训练

同步训练包括练习题、思考题、解题提示与解答. 题目来自于由彭富连主编，湖南师范大学出版社出版的《高等数学》（上、下册）书中相应章节. 所选题目都是配合各单元知识点而精心设计的题型. 既有基本题，用以帮助学生巩固和掌握基本理论和基本方法，也有用于培养学生应用所学知识解决实际问题的应用题；既有证明题，也有一定难度、综合性较强的考研真题，目的在于培养学生的科学思想与分析问题的能力，同时使读者对研究生入学考试中高等数学试题的形式、难度有一定的了解，以便使那些打算考研的读者早作准备，有针对性地复习. 所有题目都给出了解答，许多习题在解答之前给出了解题提示或分析，用以指明所要用到的基本概念、基本理论与基本方法，或给出通向解答的某一途径.

四、同步自测

同步自测主要包括同步自测题、答案与解答. 所选题目针对性强，覆盖面大，几乎涵盖了《教学大纲》与《考试大纲》中的所有知识点，主要用来考查读者学习的效果，查漏补缺. 我们相信，读者通过这些自测题的训练，一定能夯实基础，较快地提高自己分析问题和解决问题的能力. 每个选择题都给出了答案，稍难点的题都给出了解答过程，所有计算题、

证明题、应用题均有详尽解答.

因为直接做题是加深和牢固掌握所学基本理论与基本方法，熟练运用所学知识解决问题必不可少的基本训练的一个环节，所以希望读者尽量先自己做题，如有困难或疑问，再去与解答相对照，这样，经过自己的努力，解题能力才会有较大的提高.

本套辅导书可作为在校本科生、大专生及自学考试者学习高等数学的辅导书，也可作为准备参加全国硕士研究生入学统一考试数学（一）至数学（四）的考生的复习参考书，同时可供从事高等数学教学的教师参考.

本书第二章中的同步训练题及解答由刘迪芬编写，全书其余部分由彭富连编写，并负责全书统编定稿.

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正.

编　者

2006年9月于湖南师范大学

目　录

第一章　函数、极限与连续

知识扫描

1. 深入理解构成函数概念的重要因素：对应法则（或对应关系）和定义域的各种形式

◇内容解析◇

(1) 定义域——使函数 y 有确定值的自变量 x 的所有值的集合.

(2) 对应法则（对应关系）——因变量 y 依赖于自变量的变化规律，用 f 表示.

(3) 值域——函数所能取得值的集合.

(4) 函数两要素：对应法则（或对应关系）和定义域称为函数两要素. 两个函数当且仅当对应法则（或对应关系）和定义域完全相同时才相同，否则就是两个不同的函数.

(5) 如果一个函数 $f(x)$ 在其定义域内的不同的区间内，其对应法则 f 有着不同的表达形式，则称此函数为分段函数，如 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), a\leqslant x\leqslant c,\\ \psi(x), c<x\leqslant b\end{cases}$ 称为分段函数. 定义域为 $[a,b]$.

2. 掌握基本初等函数的定义及其图形，定义域及简单性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性）

◇内容解析◇

(1) 反函数的定义域和值域分别是原来函数的值域和定义域，因此求反函数的定义域，不能由其解析式来求，而应是原来函数的值域.

(2) 若已知函数解析式较为复杂，求定义域通常根据各种条件列不等式组求解.

(3) 由 $y=f(x)$ 的定义域，求复合函数 $y=f[g(x)]$ 的定义域问题，实际上是已知中间变量 $u=g(x)$ 的值域，求自变量的取值范围问题.

(4) 研究函数的单调性必须在定义域内进行. 关于复合函数的单调性：设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，$x\in[a,b]$，$u\in[c,d]$ 都是单调函数，则 $y=f[g(x)]$ 在 $[a,b]$ 上也是单调函数，其单调性由同增异减确定，即：里外函数增减性相同，复合函数为增函数；里外函数增减性相反，复合函数为减函数.

(5) 函数具有奇偶性必须满足：1) 定义域　在数轴上关于原点对称；2) $f(-x)=f(x)$（偶）或 $f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow f(x)+f(-x)=0$（奇）恒成立（奇函数图象关于原点成中心对称，偶函数图像关于 y 轴成轴对称）.

3. 正确理解数列极限、函数极限的概念及左右极限概念以及它们之间的关系

◇内容解析◇

(1) 数列 $\{x_n\}$ 的极限：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 是指对于任何 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使得当 $n>N(\varepsilon)$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 总成立，这里“$n\to\infty$”称为极限过程，定义中 ε 是预先给定的任意小的正数.

(2) 函数 $f(x)$ 的极限：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，是指对任何 $\varepsilon>0$，都存在一个数 $\delta(\varepsilon)>0$，使得一切满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的 x，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 总成立.

当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 是否有极限其极限是什么，仅与 x_0 的去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内的 x 所对

应的函数值 $f(x)$ 有关，而与 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值无关，甚至 $f(x)$ 在 x_0 处可以无定义.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 是指对任何 $\varepsilon>0$，都存在一个正数 X，使得当 $|x|>X$ 时，不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 总成立. 与(1)中类似，此处 ε 是预先给定的任意小的正数，而 $X(\varepsilon)$ 与 ε 有关.

数列 $\{x_n\}$ 可以看作是定义在正整数集上的函数，即 $x_n=f(n)(n=1,2,\cdots)$，则数列极限的概念 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 便是 $f(x)$ 在 $x\to+\infty$ 的特殊情况.

(4) 单侧极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ 或 $f(x_0+0)=A$（表示 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0，$f(x)$ 无限接近常数 A），$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=B$ 或 $f(x_0-0)=B$（表示 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0，$f(x)$ 无限接近常数 B），$A(B)$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的右(左)极限. 可类似定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=B$.

(5) 极限与左、右极限之间的关系：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$. 左、右极限的用途主要在下面两个方面：

1) 研究自变量趋于区间端点时，函数的极限问题；

2) 研究分段函数在分段点两侧表达式不相同的情形，考察在分段点处的极限问题.

假设函数 $f(x)$ 在分段点 x_0 的某一去心邻域有定义，如果 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 都存在但不相等，或者其中有一个不存在，那么由极限与左、右极限之间的关系就可断定 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在.

(6) 函数极限与数列极限的关系：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是对于 $f(x)$ 定义域内任何数列 $\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 时，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

由上述定理，可以通过数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限来确定函数 $f(x)$ 极限的某些性质或用来说明某个函数极限的不存在；也可由函数 $f(x)$ 的极限来求数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限.

(7) 收敛数列与其子数列：如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

若一数列 $\{x_n\}$ 有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列 $\{x_n\}$ 必定发散.

4. 掌握极限性质与运算法则

(1) 极限性质：

唯一性：在自变量的一个变化过程中（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$ 或 $n\to\infty$），若函数的极限存在，则此极限唯一.

有界性：1)（局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$ 内有界.

2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在，那么必存在 $X>0$，使得 $f(x)$ 在 $(-\infty,-X]$ 和 $[X,+\infty)$ 内有界.

3) 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则数列 $\{x_n\}$ 必有界.

保序性：1) 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=B$，若 $A>B$，则存在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>X>0$），使得对于 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>X>0$）内的一切 x，恒有 $f(x)>g(x)$；反之，若在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>x>0$）内，恒有 $f(x)\geqslant g(x)$，则 $A\geqslant B$.

2) 局部保号性：若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A>0$（或 <0），则存在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$，使得对于 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>X>0$）内的一切 x，都有 $f(x)>\frac{A}{2}>0\left(或\ f(x)<\frac{A}{2}<0\right)$；反之，若在 x_0 的某个去心邻域 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$（或 $|x|>X>0$）内 $f(x)\geqslant0$（或 $\leqslant0$），且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$，则 $A\geqslant0$（或 $A\leqslant0$）.

(2) 极限的四则运算法则：设在自变量的同一变化过程中，$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则有

1) 和差　$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

2) 积　$\lim f(x)\cdot g(x)=A\cdot B$,特别 $\lim Cf(x)=CA,\lim[f(x)]^k=[\lim f(x)]^k$;

3) 商　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},(B\neq 0)$.

5. 掌握极限存在的两个准则和两个重要极限,并会利用它们求极限

(1)两个准则.

单调有界准则：单调有界数列必有极限.

夹逼准则:设函数 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$在点 x_0 的某个去心邻域(或$|x|>X>0$)内,恒有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,且,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=B$,则

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在,并有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=A$.

对数列：若 $x_n\leqslant y_n\leqslant z_n$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$，那么$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

(2) 两个重要极限：若□为某个极限过程的无穷小，则

$$\lim_{\text{某过程}}\frac{\sin\square}{\square}=1,\ \lim_{\text{某过程}}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}.$$

同时还应记住几个重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$，$(a>0)$；$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,\ (|q|<1),\ \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a\mathrm{e}=\frac{1}{\ln a}(a>0,a\neq 1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,(a>0)\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha(\alpha\text{ 为实数}).$$

6. 掌握无穷小的概念及其运算规律,了解无穷小与函数极限的关系;正确理解无穷小的阶和等价无穷小及其在求极限中的应用;了解无穷大量与无穷小量之间的关系

◇内容解析◇

(1)无穷小:极限为 0 的变量称为无穷小量,简称无穷小. 即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则称$\{x_n\}$当 $n\to\infty$时是无穷小量;若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称 $f(x)$当 $x\to x_0$ 时是无穷小量. 显然 0 是无穷小（是把 0 理解为一个常数函数），但除 0 以外，无穷小是变量，即无论绝对值多么小的数都不是无穷小. 还须注意，一个变量是否为无穷小，除了与变量本身有关以外，还与自变量的变化趋势有关. 如 $y=x^2$ 当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是无穷小，除此以外 x 的任何变化趋势,$f(x)$都不是无穷小.

(2) 无穷小与函数极限关系：

$$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha,\text{其中}\lim\alpha=0.$$

(3) 无穷小量的阶及比较：设 α、β是同一极限过程（如 $x\to\infty$或 $x\to x_0$ 等）中的两个无穷小量，若

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}c\ (\neq 0,\ 1\text{ 的常数}),\text{则称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 为同阶无穷小;}\\ 1,\text{ 则称 }\beta\text{ 与 }\alpha\text{ 为等价无穷小，记作 }\alpha\sim\beta;\\ 0,\text{ 则称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 较高阶的无穷小，记作 }\beta=o(\alpha);\\ \infty,\text{ 则称 }\beta\text{ 是比 }\alpha\text{ 较低阶的无穷小.}\end{cases}$$

若 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta^k}=c\neq 0$，$k>0$，就称 α 是关于β 的 k 阶无穷小.

等价无穷小具有的性质：设 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在，则有 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

此性质可用来确定两个无穷小的比式$\frac{\beta}{\alpha}$的极限，此时它们中任何一个可以换成任何与它等价的无穷小，而对于极限的存在及数值并无影响. 记住常用的几个等价无穷小：

当$x\to 0$时，有$\sin x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$

(4) 无穷大：当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，$|f(x)|$无限变大，则称$f(x)$当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时是无穷大量，简称无穷大，记作$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$或($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

无穷大不是数，不可与很大的数混为一谈.

(5) 无穷小与无穷大的性质.

1) 加法：有限个无穷小的和仍是无穷小.

2) 乘法：有限个无穷小的积仍是无穷小.

3) 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

4) 无穷小与无穷大的关系：无穷大的倒数是无穷小；非零无穷小的倒数是无穷大.

5) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，又$g(x)$在某个邻域$0<|x-x_0|<r$内有$|g(x)|\geqslant C>0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)g(x)=\infty.$$

6) 设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)=A$存在，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则必有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

7. 理解函数在某点连续的三种等价定义，会判断函数在某点的连续性

◇内容解析◇

(1) 函数连续的三种等价定义：

1) 若函数$y=f(x)$在点x_0的一个邻域上有定义(包括x_0)，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$处是连续的.

2) 若函数$y=f(x)$在点x_0的一个邻域上有定义(包括x_0)，当自变量在点x_0处取得增量Δx，相应的函数取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，且$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，则称$f(x)$在点$x_0$处是连续的.

3) 设有函数$y=f(x)$，若对任一$\varepsilon>0$，总存在一个$\delta(\varepsilon,x_0)>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，不等式$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$总成立，则称函数$f(x)$在点$x_0$处是连续的.

(2) 若$f(x)$在(a,b)或$[a,b]$上每一点处连续，则称$f(x)$在(a,b)或$[a,b]$上连续.

定义 1)给出了求连续函数极限的一个重要的法则：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$.

8. 掌握连续函数的运算性质

◇内容解析◇

(1) 四则运算：设$f(x)$和$g(x)$在$x=x_0$处连续，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$，$[g(x)\neq 0]$也在点x_0处连续.

(2) 复合函数：设$u=\varphi(x)$在x_0处连续，$u_0=\varphi(x_0)$，函数$y=f(x)$在u_0处连续，则复合函数$y=f(\varphi(x))$在x_0处连续.

(3) 反函数：设$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，并且是递增的(或递减的)，$f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则反函数$x=\varphi(y)$在$[\alpha,\beta]$或$[\beta,\alpha]$上也连续，并且也是递增的(或递减的).

(4) 初等函数：一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

9. 了解函数间断点的分类原则以及由连续性定义得出找间断点的方法

◇内容解析◇

(1) 间断点的定义：若上面 7. 中连续函数定义 1) 中有一个条件不满足，即或 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义，或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，或 $\lim\limits_{x\to x_0}$ 的 $f(x)\neq f(x_0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点.

(2) 间断点的分类：设 x_0 为函数 $f(x)$ 的间断点. 若：

1) $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 均存在，则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 进一步，若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，则点 x_0 称为可去间断点；若 $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则点 x_0 称为跳跃间断点.

2) 不属于第一类间断点的称为第二类间断点，即 $f(x_0-0)$ 与 $f(x_0+0)$ 中至少有一个不存在.

3) 求间断点的方法：若 $f(x)$ 为初等函数，使 $f(x)$ 无定义的点便是间断点；若 $f(x)$ 为分段函数，$f(x)$ 在分段点处是否连续，需用连续函数定义判别之.

10. 了解闭区间上连续函数的基本性质（最值定理、有界定理、介值定理、零点定理）；对函数连续性的概念和在闭区间上连续函数的性质要求形象化地理解，并会应用这些性质

◇内容解析◇

(1) 最值定理：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间上至少取得最大值和最小值各一次.

(2) 有界性定理：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则函数 $f(x)$ 在闭区间上有界，即：存在 $M>0$，使 $|f(x)|\leqslant M,\ \forall x\in[a,b]$.

(3) 介值定理：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的任何实数 C，在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

特别：设 M、m 分别为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，则对于满足条件 $m\leqslant C\leqslant M$ 的任何实数 C，在 $[a,b]$ 上至少存在一个点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

(4) 零点定理：设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，若 $f(x)f(b)<0$，则在 (a,b) 上至少存在一个点 ξ，使 $f(\xi)=0$；或说，若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，则在 (a,b) 内方程 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

11. 会求函数图形的铅直线、水平线和斜渐近线

◇内容解析◇

求函数 $y=f(x)$ 的图形的渐近线的公式：

(1) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则直线 $x=x_0$ 相应地为曲线 $y=f(x)$ 的一条铅直(垂直)渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，则直线 $y=b$ 相应地为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(3) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$，$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=b$，则直线 $y=kx+b$ 相应地为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

知识网络

- 函数极限连续
  - 函数
    - 定义
    - 性质(有界性、单调性、奇偶性、周期性)
    - 基本初等函数
    - 反函数
    - 复合函数
    - 分段函数
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
      - 函数极限
        - $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$
        - 左、右极限
        - 极限存在的充分必要条件
    - 性质（有界性，唯一性，保号性）
    - 无穷小（大）量
      - 定义
      - 无穷小比较与阶数
        - 高阶
        - 同阶
        - 等价
        - k 阶
    - 存在准则
      - 单调有界准则
      - 夹逼准则
    - 两个重要极限
      - $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
      - $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$
    - 求极限方法
      - 用极限定义证明极限
      - 初等方法(有理化、去零因子、取大头法)
      - 利用重要极限
      - 利用极限存在准则
      - 利用等价无穷小代换
      - 利用无穷小运算性质
      - 利用洛必达法则(第二章)
      - 利用泰勒公式(第二章)
      - 利用定积分定义(第三章)
  - 连续
    - 定义(三种等价定义)、间断及间断点分类
    - 闭区间上性质
      - 有界性
      - 最大(小)值定理
      - 介值定理
      - 零点定理

同步训练

习题 1-1(函数)

1. 如果 $A=\{x|3<x<5, x\in\mathbf{R}\}$, $B=\{x|x>4, x\in\mathbf{R}\}$，求：

(1) $A\cup B$；　　(2) $A\cap B$.

解　$A\cup B=\{x|x>3, x\in\mathbf{R}\}$；$A\cap B=\{x|4<x<5, x\in\mathbf{R}\}$.

2. 用区间表示下列点集，并在数轴上表示出来：

(1) $3x-2>0$；　　(2) $x^2-4<0$；

(3) $0<|2x+1|<2$；　　(4) $|x-a|<\delta$，a 为常数，$\delta>0$；

(5) $|x-a|>\delta$，a 为常数，$\delta>0$；　　(6) 点 2 的 1 邻域；

(7) $\{x \mid 1<|x-1|<2\}$.

解　(1) $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$；　　(2) $(-2, 2)$；

(3) $\left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$；　　(4) $(a-\delta, a+\delta)$；

(5) $(-\infty, a-\delta)\cup(a+\delta, +\infty)$；　　(6) $(1, 3)$；

(7) $(-1,0)\cup(2,3)$.

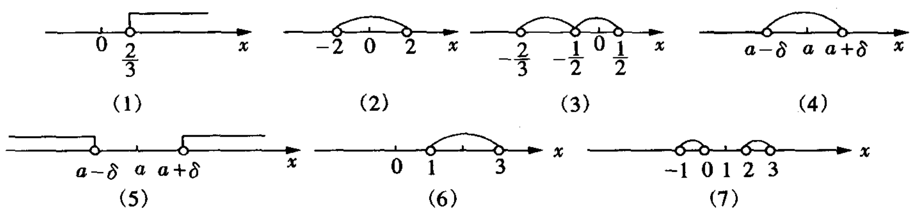

图 1-1

3. 已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，$x\neq 1$，$g(x)=1-x$，求 $f[g(x)]$，$f[f(x)]$，$g[f(x)]$及 $g[g(x)]$的表达式，并指出它们的定义域.

【解题提示】将两个或两个以上函数进行复合，常用的方法有代入法、分析法和图解法．代入法：将一个函数中的自变量用另一个函数的表达式来代换，该法常用于初等函数．分析法：利用外函数定义域的各区间段，结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析，从而得出复合函数．该法适用于初等函数与分段函数或分段函数之间的复合．图解法：借助于图形的直观性得到复合函数的一种方法，该法适用于分段函数之间的复合.

解　$f[g(x)]=\frac{1-(1-x)}{1+(1-x)}=\frac{x}{2-x}(x\neq 2)$；$f[f(x)]=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=x(x\neq -1)$；

$g[f(x)]=1-\frac{1-x}{1+x}=\frac{2x}{1+x}(x\neq -1)$；$g[g(x)]=1-(1-x)=x$.

4. 设 $\varphi(x+1)=\begin{cases}x^2, 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, 1<x\leqslant 2,\end{cases}$　求 $\varphi(x)$.

【解题提示】由 $f[g(x)]$表达式求 $f(x)$的表达式，一般令 $g(x)=t$，求出 $f(t)$的表达式，再代回 x 可得.

解 令 $x+1=t$,得 $\varphi(t)=\begin{cases}(t-1)^2, 1\leqslant t\leqslant 2\\ 2(t-1), 2<t\leqslant 3\end{cases}$ 于是 $\varphi(x)=\begin{cases}x^2-2x+1, 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 2x-2, 2<x\leqslant 3.\end{cases}$

5. 将函数 $y=5-|2x-1|$ 用分段函数形式表示，并作出函数图形.

解 令 $2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，$|2x-1|=\begin{cases}2x-1, & x\geqslant\frac{1}{2},\\ 1-2x, & x<\frac{1}{2}.\end{cases}$ 于是 $y=\begin{cases}-2x+6, & x\geqslant\frac{1}{2},\\ 2x+4, & x<\frac{1}{2}.\end{cases}$

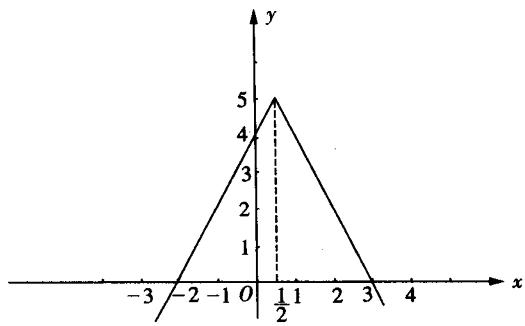

图 1-2

6. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{2x}{x^2-3x+2}$;

(2) $y=\sqrt{3x+4}$;

(3) $y=\sqrt{a^2-x^2}$;

(4) $y=\frac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+4}$;

(5) $y=\lg\frac{x}{x-2}$;

(6) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$;

(7) $y=\arcsin\frac{z-3}{2}$.

【解题提示】对于函数关系是由公式表示出来的简单函数，求定义域时，为了使表达式有意义，常遇到的四种情况是：

(1) 分式中的分母不能为零；(2) 偶次方根号下的表达式不能为负值；(3) 对数的真数必须大于零；(4) 反正弦、反余弦后面的表达式的绝对值小于等于 1.

解 (1) 由 $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)\neq 0$，得 $x\neq 2$，$x\neq 1$，于是所求定义域为$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$；

(2) 由 $3x+4\geqslant 0$，得 $x\geqslant -\frac{4}{3}$，即所求定义域为$\left[-\frac{4}{3}, +\infty\right)$；

(3) 由 $a^2-x^2\geqslant 0$，得 $|x|\leqslant|a|$，所求定义域为$[-|a|,|a|]$；

(4) 由$\begin{cases}1-x^2\neq 0,\\ x+4\geqslant 0,\end{cases}$得$\begin{cases}x\neq\pm 1,\\ x\geqslant -4,\end{cases}$即所求定义域为$[-4,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；

(5) 由$\frac{x}{x-2}>0$，得$\begin{cases}x>0,\\ x>2,\end{cases}$或$\begin{cases}x<0,\\ x<2,\end{cases}$于是所求定义域为$(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$；

(6) 由$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\ 16-x^2\geqslant 0,\end{cases}$得$\begin{cases}2k\pi\leqslant x\leqslant \pi+2k\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\\ -4\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$

于是所求定义域为$[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$；

(7) 由$-1\leqslant\frac{z-3}{2}\leqslant 1$，得 $1\leqslant z\leqslant 5$，于是所求定义域为 $[1, 5]$.

7. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些既非奇函数又非偶函数？

(1) $y=\tan x, \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2};\right)$

(2) $y=\frac{1}{1+x^2}, (-3,4)$;

(3) $y=|x-1|$;

(4) $f(x)=\lg(x+\sqrt{x^2+1})$;

(5) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$；　　(6) $f(x)=\frac{x^2-x}{x-1}$.

【解题提示】(1) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的，若定义域关于原点不对称，则该函数就不是奇或偶函数.

(2) 判别给定函数的奇偶性，主要是利用奇偶性的定义，而验证 $f(x)+f(-x)=0$ 有时是判别函数 f 为奇函数的有效方法.

解 (1) 因为 $\tan(-x)=-\tan x$，所以 $\tan x$ 为奇函数；

(2) 因为定义区间与原点不对称，所以该函数非奇非偶；

(3) 因为 $f(-x)=|-x-1|=|x+1|$，从而 $f(-x)\neq f(x)$，$f(-x)\neq -f(x)$. 所以该函数非奇非偶；

(4) 因为 $f(-x)=\lg\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\lg\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=-\lg(x+\sqrt{x^2+1})=-f(x)$，所以该函数为奇函数；

(5) 因为 $f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=f(x)$，所以该函数为偶函数；

(6) 因为 $f(-1)=-1$，而 $f(1)$无定义，所以该函数非奇非偶.

8. 指出下列函数中哪些是周期函数，并求出它们的周期.

(1) $y=\sin\lambda x$，$(\lambda>0)$；　　(2) $y=2$；

(3) $y=\sin 2x+\sin\pi x$；　　(4) $y=\sin x+\cos x$.

【解题提示】(1) 若 $f(x)$以 T 为周期，则 $f(x)$ 有无穷多个周期 nT $(n=1,2,\cdots)$.

(2) 判别给定函数 $f(x)$是否为周期函数，主要由定义判别，有时也用其运算性质.

解 (1) 要 $\sin\lambda(x+T)=\sin(\lambda x+\lambda T)$，则 $T=\frac{2}{\lambda}\pi$，所以该函数是周期函数，最小正周期为$\frac{2}{\lambda}\pi$；

(2) 由 $f(x)=2$，$x\in(-\infty,+\infty)$，对$\forall T\neq 0$，恒有 $f(x\pm T)=f(x)=2$，所以 $y=2$ 是周期函数，但它没有最小正周期；

(3) 假设存在 $T>0$，使得 $f(x+T)=f(x)$，即 $\sin 2(x+T)+\sin\pi(x+T)=\sin 2x+\sin\pi x$，由 (1) 知，必存在非零整数 k，m，使得 $T=k\pi$，$T=2m$，于是有 $k=\frac{2m}{\pi}$，与 k 为非零整数矛盾，所以该函数不是周期函数；

(4) 是周期函数，$T=2\pi$.

9. 判断下列函数在给定区间是否有界：

(1) $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ 在$(2,4)$；　　(2) $f(x)=\frac{x+2}{x-2}$ 在$(3,4)$；

(3) $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 在$[1,+\infty)$；　　(4) $f(x)=x+\sin x$ 在$[1,+\infty)$；

(5) $f(x)=2^x$ 在$[1,2]$.

【解题提示】(1) 函数 $f(x)$是否有界是相对于某个区间而言的.

(2) 判别方法为：将函数取绝对值，然后用不等式放缩法；或利用导数求函数最大（小）值法处理（见第二章）.

解 (1) $\forall M>2$，当 $x\in(2,4)$时，要$\left|\frac{x+2}{x-2}\right|=\frac{x+2}{x-2}\geqslant\frac{4}{x-2}\geqslant M$，只要取 $2<x\leqslant\frac{4}{M}+2$，则

有 $\left|\dfrac{x+2}{x-2}\right| \geqslant M$，由 M 的任意性知 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ 在 $(2,4)$ 上无界；

(2)因为 $\dfrac{5}{2}=\dfrac{3+2}{4-2}\leqslant\dfrac{x+2}{x-2}\leqslant\dfrac{4+2}{3-2}=6$，所以 $f(x)=\dfrac{x+2}{x-2}$ 在 $(3,4)$ 上有界；

(3) 因为 $0<\dfrac{1}{x^2}\leqslant 1$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $[1,+\infty)$ 上有界；

(4) $\forall M>0$，只要取 $x_0=k\pi$，其中 k 为大于 M 的正整数，则 $f(x_0)=k\pi+\sin k\pi=k\pi>M$，故 $f(x)=x+\sin x$ 在 $[1,+\infty)$ 上无界；

(5) 因为 $2\leqslant 2^x\leqslant 4$，所以 $f(x)=2^x$ 在 $[1,2]$ 上有界.

10. 证明：(1) 两个单调增加（减少）的函数之和是单调增加（减少）的；

(2) 两个单调增加（减少）的正值函数之积是单调增加（减少）的.

【解题提示】若 $f(x)$ 在区间 I 上无可导条件，则其单调性的判别用定义；若 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则一般利用导数符号判别较为简便.

证 (1) 设 $f(x)$、$g(x)$ 为区间 I 上的两个单调增加的函数，则对 $\forall x_1, x_2\in I$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，$g(x_1)<g(x_2)$，从而得 $f(x_1)+g(x_1)<f(x_2)+g(x_2)$，所以 $f(x)+g(x)$ 为区间 I 上的两个单调增加的函数. 类似地可以证明:两个单调减少的函数之和是单调减少的.

(2) 设 $f(x)$、$g(x)$ 为区间 I 上的两个单调增加的正值函数,则对 $\forall x_1, x_2\in I$，$x_1<x_2$，有 $f(x_1)<f(x_2)$，$g(x_1)<g(x_2)$，从而得 $f(x_1)g(x_1)<f(x_2)g(x_2)$，所以 $f(x)g(x)$ 为区间 I 上的两个单调增加的函数.类似地可以证明:两个单调减少的正值函数之和(积)是单调减少的.

11. 求下列函数的反函数及其定义域：

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，$(x\neq -1)$.

(2) $y=\sqrt{1-x^2}$，①$(-1\leqslant x<0)$；②$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) $y=\begin{cases} x & -\infty<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4, \\ 2^x & 4<x<+\infty. \end{cases}$

【解题提示】(1)只有一一对应的函数才有反函数,因为单调函数是一一对应的,所以单调函数一定有反函数.

(2)求反函数步骤为:1)由 $y=f(x)$ 反解出 $x=\varphi(y)$；2) 将 $x=\varphi(y)$ 中的 x、y 分别改写为 y、x，得反函数 $y=\varphi(x)$.

解 (1) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ $(x\neq -1)$，解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，所以反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$，$(x\neq -1)$.

(2) 由 $y=\sqrt{1-x^2}$ 解得 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$，所以反函数为：

①$y=-\sqrt{1-x^2}$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$；(b) $y=\sqrt{1-x^2}$，$(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) 由 $y=\begin{cases} x & -\infty<x<1, \\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 4, \\ 2^x & 4<x<+\infty \end{cases}$ 解得 $x=\begin{cases} y, & -\infty<y<1, \\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 16, \\ \log_2 y, & 16<y<\infty. \end{cases}$

所以反函数为：$y=\begin{cases} x, & -\infty<x<1, \\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 16, \\ \log_2 x, & 16<x<+\infty. \end{cases}$

12. 已知 $y=f(x)$ 的定义域为 $(0,4]$，求下列各函数的定义域.

(1) $f(x^2)$；　(2) $f(\lg x)$；　(3) $f(x+a)(a>0)$.

【解题提示】求复合函数 $y=f(g(x))$ 的定义域，其原则是从外层到内层，列不等式或不等式组求解.

解 (1) 由 $0<x^2\leqslant 4$，得 $f(x^2)$ 的定义域为 $[-2,0)\cup(0,2]$；

(2)由 $0<\lg x\leqslant 4$，得 $f(\lg x)$ 的定义域为 $(1,10000]$；

(3) 由 $0<x+a\leqslant 4$，得 $f(x+a)$ 的定义域为 $(-a,4-a]$.

13. 下列函数是由哪些简单函数复合而成的？

(1) $y=\sqrt{2-x^2}$；　(2) $y=e^{\sin^2\frac{1}{x}}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sin(x+1)}$；　(4) $y=\ln\ln(x-1)$；

(5) $y=\sin[\lg(x^2+1)]$；　(6) $y=2^{\arcsin\sqrt{x}}$.

解 (1) $y=\sqrt{u}$，$u=2-x^2$；　(2) $y=e^u$，$u=v^2$，$v=\sin w$，$w=\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{1}{u}$，$u=\sin v$，$v=x+1$；　(4) $y=\ln u$，$u=\ln v$，$v=x-1$；

(5) $y=\sin u$，$u=\lg v$，$v=x^2+1$；　(6) $y=2^u$，$u=\arcsin v$，$v=\sqrt{x}$.

14. 设一个无盖的圆柱形容器的容积为 V，试将其表面积表示为底半径的函数.

解 设其表面积为 S，底面半径为 r，则 $S=\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$，$(0<r<+\infty)$.

15. 某工厂生产的产品，每台售价 100 元，若产量不超过 1000 台，可以全部卖出；若产量超过 1000 台时，通过广告宣传又可卖出 500 台，平均每台广告费为 30 元；若产量超过 1500 台，当年就卖不出去，求出当年的销售总收入与产量之间的函数关系.

解 设销售总收入为 y（元），产量为 x 台，则

$$y=\begin{cases}100x & 0<x\leqslant 1000,\\ 100000+70\ (x-1000) & 1000<x\leqslant 1500,\\ 135000 & x>1500.\end{cases}$$

16. *（人口模型）设 1982 年底我国人口为 10.3 亿，如果不实行计划生育政策，按照年均 2%的自然增长率计算，设 t 年后的人口为 p，试列出 p 与时间 t 之间的函数关系式.

解 一年后，人口为 $10.3+10.3\times 2\%=10.3\times(1+2\%)$，两年后，人口为 $10.3\times(1+2\%)+[10.3\times(1+2\%)]\times 2\%=10.3\times(1+2\%)^2$，从而可得，$t$ 年后的人口为 $p=10.3\times(1+2\%)^t$.

一般地，设某地某年末人口为 p_0，人口自然增长率为 r，那么 t 年后的人口 p 为：$p=p_0(1+r)^t$.

思考题 1－1

1. 点 x_0 的 $\delta(\delta>0)$ 邻域是指下面哪一个点集？

A. $\{x\mid x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\}$　B. $\{x\mid x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta)\}$

C. $\{x\mid x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta]\}$　D. $\{x\mid x\in[x_0-\delta,\ x_0+\delta]\}$

答 A.

2. 什么叫两个函数相同？试判断下列各组函数是否相同.

(1) $y_1=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$y_2=x+2$；　(2) $y_1=\log x^3$，$y_2=3\log x$；

(3) $y_1=|x|$，$y_2=\sqrt{x^2}$；　(4) $f(x)=1$，$g(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$.