现代数学基础丛书 106

非线性演化方程的稳定性与分歧

马天 汪守宏 著

科学出版社
www.sciencep.com

内 容 简 介

本书是一部关于非线性演化方程稳定性与分歧理论及应用的专著. 主要内容包括作者最近发展的关于定态分歧、动态分歧和跃迁理论，以及这些理论在物理、化学、流体动力学及地球物理流体动力学中的应用，特别是在化学中 Belousov-Zhabotinsky 反应、二元体相分离问题的 Cahn-Hilliard 方程、超导体 Ginzburg-Landau 方程的相变与分歧理论、Rayleigh-Benard 对流问题、Couette 流的 Taylor 问题及赤道上大气层的 Walker 环流等重要问题中的应用.

本书的读者对象为从事数学、物理、化学、地球物理流体动力学及其他与相变、分歧和稳定性理论相关的高年级大学生、研究生、教师及科研人员.

图书在版编目(CIP)数据

非线性演化方程的稳定性与分歧/马天，汪守宏著. 北京：科学出版社，2007
(现代数学基础丛书；106/杨乐主编)
ISBN 978-7-03-018113-8

Ⅰ. 非… Ⅱ. ①马…②汪… Ⅲ. 孤立子－线性方程 Ⅳ. O411.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 118858 号

责任编辑：吕 虹 赵彦超/责任校对：桂伟利
责任印制：赵德静/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 4 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2007 年 4 月第一次印刷 印张：28 1/2
印数：1—4 000 字数：540 000

定价：58.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换(环伟))

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用.许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益.

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着.1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会.当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述.据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷.它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍.既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新.

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科.我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动.它获得了广大读者的喜爱.我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献.

杨　乐

2003年8月

前　言

本书较系统地介绍了作者在非线性耗散系统方面最近提出的分歧与跃迁理论及其在物理、化学、流体动力学和地球物理流体动力学等领域中的应用. 同时, 对传统的稳定性与分歧以及相关的数学基础也作了较为详细的论述.

在非线性科学中, 相变是一类普遍的自然现象, 它广泛地存在于物理、化学、生物、经济、流体动力学及地球物理流体动力学的自然运动中. 所谓相变就是系统状态的跃迁与突变. 在数学中, 反映和描述这类自然现象的学科分支就是非线性演化方程动力学. 它的主要研究内容就是稳定性、分歧与混沌. 最近, 作者在非线性演化方程动力学领域的稳定性、定态分歧、动态分歧及跃迁等方面提出一套系统的理论和方法, 它们形成一个统一的整体. 应用这些理论和方法, 许多非线性科学中长期存在的分歧和相变中一些困难问题变得可以理解和处理. 特别地, 在本书中, 我们广泛讨论了许多物理、化学及流体动力学中典型偏微分方程的动态分歧与相变问题, 包括控制相分离的 Cahn-Hilliard 方程;描述 Belousov-Zhabetinsky 型化学反应的 Field-Noyes 方程; 控制燃烧问题的 Kuramoto-Sivashinsky 方程; 反映流体稳定性的复 Ginzburg-Landau 方程; 超导体的 Ginzburg-Landau 方程; 热对流的 Benard 问题; 同轴柱体间 Couette 流稳定性的 Taylor 问题以及赤道上大气层的 Walker 环流. 可以期待更多的非线性科学中动态分歧与相变问题能够被处理与理解.

第一章主要论述了微分方程与自然运动之间的联系. 特别突出从自然角度去理解数学、再从数学的角度去理解自然这一双向过程, 强调从自然源泉中汲取数学发展的动力这一宗旨. 第二章较为系统地介绍了必要的数学基础理论与知识. 这里, 作者采用的写作方法与传统的形式化方式有所不同, 它非常重视对数学实在意义的揭示, 重视数学的直观与严谨性之间的统一. 第三章讨论了非线性耗散系统的稳定性, 较系统地介绍了全局吸引子存在性理论及其最近的一些进展. 全局吸引子的存在性理论与书中提出的动态分歧与跃迁理论相结合, 对于理解非线性科学中相变现象, 建立相应的理论起到了十分重要的作用. 第四章首先提出了线性全连续场谱理论, 该理论在后面发展的分歧与跃迁理论中是非常基本的. 建立在谱理论基础之上, 这里介绍的 Lyapunov-Schmidt 约化过程与传统的观点有所不同. 古典的方法是对算子的临界特征子空间及其补空间的直和分解, 而这里采用广义特征向量空间与其补空间的直和分解, 利用这种分解可以对后面所讨论的定态分歧理论作统一处理. 特别地, 该方法在新建立的偶数阶非退化奇点处分歧理论起到关键作用, 该理论不考虑临界特征值的代数重数,

这是与传统理论的一个很大区别. 在第五和第六章中, 作者提出了非线性耗散系统的动态分歧和跃迁理论. 该理论的条件与结论基本上是根据物理、化学、生物及流体动力学中普遍存在的相变现象中抽象而来. 因而这些理论能够有效地广泛处理非线性科学中的相变问题. 在第七和第八章中, 应用作者建立的理论讨论了几个来自物理、化学及流体动力学的动力系统与偏微分方程的分歧与相变问题, 得到了一些具有物理意义的结果.

最后, 借此机会, 作者对导师陈文嫄教授表示深深的感谢. 先生的学术观点与远见, 以及对数学科学的献身精神对我们的数学生涯产生重大影响. 本书得到了四川大学人才引进基金的资助, 对此我们表示感谢. 另外, 作者对科学出版社吕虹老师的支持也表示真诚的感谢.

马　天　汪守宏

2006 年 6 月 6 日

目 录

第一章　从自然观点看微分方程

§1.1　自然定律与方程

物理世界给人类提供了三大研究课题：物理背景空间、相互作用与运动、物质结构．这三大课题构成了数学强有力的自然背景．另一方面，根据 Bourbaki 学派的观点，数学具有三大基本结构：拓扑结构、序结构、代数结构．这三大基本结构所代表的三类重要学科分支分别为拓扑与几何学、微分方程、群论及其表示理论．这样，物理学与数学给出下面三个基本的对应：

物理背景空间　　　相互作用与运动　　　物质结构与对称

/　　\　　　/　　\　　　/　　\

拓扑结构 —— 拓扑与几何学　序结构 —— 微分方程　代数结构 —— 群论及其表示

在自然中，系统的运动都要遵守一定的规则与定律．而微分方程可视为自然定律的数学表达形式．简而言之，方程即是运动规律与规则．

为了理解这种观点，下面给出三个例子．

例 1.1　扩散方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\Delta u+f(x,t),\quad x\in\Omega\subset R^3,\quad t\geqslant 0, \tag{1.1.1}$$

这里 $k>0$ 为扩散系数，Δ 是拉普拉斯算子，Ω 是 R^3 中一个开区域，f 是扩散源．

扩散运动是指高浓度的某种物质朝低浓度方向运动的过程，如热传导、烟雾扩散等．若未知函数 u 为浓度，则扩散方程 (1.1.1) 是下面两个自然定律的数学表示．

(1) Fick 定律：扩散的流量 $\overrightarrow{q}$ 与浓度 u 的梯度负值成正比：

$$\overrightarrow{q}=-k\nabla u,\qquad k>0. \tag{1.1.2}$$

(2) 质量守恒定律：在任一区域内质量的变化率等于单位时间内通过该区域表面的通量与扩散源 f 之和．令 x 点为一无穷小区域，则在 x 点该定律表示为

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\text{变化率})=-\mathrm{div}\,\overrightarrow{q}(\text{通量})+f, \tag{1.1.3}$$

这里表面通量取负号是约定流入的量为正，流出 x 点的量为负．显然从 (1.1.2) 和 (1.1.3) 便可得到方程 (1.1.1)．

例 1.2 Navier-Stokes 方程:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v=\mu\Delta v-\nabla p+f,\quad x\in\Omega, \tag{1.1.4}$$

$$\text{div } v=0, \tag{1.1.5}$$

Navier-Stokes 方程是流体运动的控制方程, 这里 $v=(v_1,v_2,v_3)$ 是定义在区域 $\Omega\subset R^3$ 上的流体元的速度, $\mu>0$ 为动力黏性系数, p 为压力函数, f 为外力密度.

方程 (1.1.4) 是 Newton 第二定律的数学表达:

$$F=ma. \tag{1.1.6}$$

在 (1.1.4) 中, 流体元的质量密度被单位化 $m=1$, 加速度 $a=\{a_1,a_2,a_3\}$ 的每个分量为

$$\begin{aligned}a_i=\frac{dv_i}{dt}&=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\cdot\frac{dx_j}{dt}\\&=\frac{\partial v_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\quad\left(v_j=\frac{dx_j}{dt}\right)\\&=\frac{\partial v_i}{\partial t}+(v\cdot\nabla)v_i\qquad i=1,2,3.\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

流体元所受力为

$$F=\mu\Delta v-\nabla p+f, \tag{1.1.8}$$

其中 $\mu\Delta v$ 为流体黏性引起的内摩擦力, $-\nabla p$ 为压力差, f 为外力密度. 这样从 (1.1.6)~ (1.1.8) 即可得到方程 (1.1.4).

一个向量场 v 在 x 点的散度 $\text{div}v(x)$ 的实在意义就是由向量场 v 确定的流穿过包含 x 点的无穷小区域表面的通量, 简单地说就是进入 x 点的流量减去流出 x 点的流量. 由此可知方程 (1.1.5) 就是质量守恒定律: 通过 x 点无穷小区域的流体通量等于该点区域内质量密度变化率,

$$\frac{d\rho}{dt}=-\text{div}v,\quad \rho\text{为质量密度}.$$

当考虑流体为不可压缩时, $d\rho/dt=0$, 即流入 x 点的量等于流出的量, 这就是方程 (1.1.5).

例 1.3 经济周期的 Kaldor 模型:

$$\frac{dx}{dt}=k(I(x,y)-S(x,y)), \tag{1.1.9}$$

$$\frac{dy}{dt} = I(x, y), \tag{1.1.10}$$

其中 x 是国民经济总收入，y 为实际资本存量，$k > 0$ 为常数，$I(x, y)$ 为净投资函数，$S(x, y)$ 为储蓄函数.

方程 (1.1.9) 是经济学家 Keynes 理论的数学表达：每年国民收入的增量 $\frac{dx}{dt}$ 与社会超额需求 $I - S$ 成正比. 方程 (1.1.10) 表明每年实际资本的增量 $\frac{dy}{dt}$ 等于净投资 I.

注 1.1

社会超额需求 = 社会总需求 − 社会总收入；

社会总需求 = 正常消费 + 净投资；

社会总收入 = 正常消费 + 储蓄.

在本书中，我们始终突出数学的自然观及其实在意义，也就是说我们强调从自然的角度去理解数学和从数学的角度去理解自然这一双向过程. 因此我们以"方程即是定律"这一观点作为本书的开端.

上述三个例子具有典型意义，特别是在稳定性与分歧问题方面. 在文献 [52] 中，具体给出了关于 Kaldor 模型的投资函数与储蓄函数，并且证明了当生产技术水平超过某一临界点时，就会产生经济周期规律. 后面我们还会更详细讨论这一问题.

§1.2 运动类型与方程分类

§1.2.1 古典的分类

在自然界中，有许多不同的运动类型. 但是我们所遇到的比较典型的运动大致有这几类：天体与机械运动、反应扩散运动、遗传与变异、化学反应与相变、流体运动、波的传播、微观粒子的波动性等. 所有这些运动都受到微分方程的控制.

在另一方面，以下是微分方程的几种典型类型：

常微分方程：

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t), \quad x \in R^n,$$
$$v = (v_1, \cdots, v_n) \text{是 } n \text{ 维向量场.}$$

抛物型方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f(x, u, \nabla u), \quad x \in \Omega \subset R^n,$$

$$u=(u_1,\cdots,u_m),\quad f=(f_1,\cdots,f_m),$$

这里 $\Omega\subset R^n$ 是一个开区域.

双曲型方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f(x,u,\nabla u),\quad x\in\Omega\subset R^n,$$

$$u=(u_1,\cdots,u_m),\quad f=(f_1,\cdots,f_m).$$

椭圆型方程:

$$-\Delta u=f(x,u,\nabla u),\quad x\in\Omega,$$

$$u=(u_1,\cdots,u_m),\quad f=(f_1,\cdots,f_m).$$

大致上讲，自然界中不同类型的运动与受控方程的分类有如下关系：天体运动与机械运动所受的控制方程是常微分方程 (Hamilton 系统).

反应扩散运动、流体动力学、化学反应与相变等所受的控制方程是抛物型的 (广义意义下) 偏微分方程.

波的传播、微观粒子的波动性所受的控制方程是双曲型的.

§1.2.2　耗散结构的方程

在自然界，还可以从另一角度分出一大类运动，称为具有耗散结构的运动. 这类运动的特点就是伴随着运动有大量的某种能量的损耗，使得必须有外部能源补充才能平衡其运动. 描述这一类运动的方程通常称为具有耗散结构的方程或动力系统. 只有在这一类方程中分歧问题与混沌才具有普遍意义. 在这里，我们将主要考虑这类方程的分歧及稳定性问题.

具有耗散结构的运动在自然界中非常普遍. 如上面提到的反应扩散运动、流体运动、化学反应与相变、生物生态平衡、带阻尼的振动等都属于这类运动. 因此不能用传统的上述分类来刻画具有耗散结构方程. 但是一般具有耗散结构的微分方程都能够被归为如下满足一定条件的抽象形式.

令 H 和 H_1 是两个 Hilbert 空间，$H_1\subset H$ 是一个稠密与紧致的包含嵌入. 我们引入下面非线性演化方程:

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=L_\lambda u+G(u,\lambda),\\ u(0)=\varphi,\end{cases}\tag{1.2.1}$$

这里 $u:R^+\to H$ 是未知函数，$R^+=(0,\infty)$，$\lambda\in R$ 是实参数，$G:H_1\times R\to H$ 是连续映射，满足

$$G(u,\lambda)=o(\|u\|_{H_1}),\quad\forall\lambda\in R,\tag{1.2.2}$$

$L_\lambda : H_1 \to H$ 是线性全连续场，它满足：

$$\begin{cases} L_\lambda = -A + B_\lambda, \\ A : H_1 \to H\text{是线性同胚且特征值具正实部}, \\ B_\lambda : H_1 \to H\text{是一个线性紧算子}. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

下面我们给出两个具有耗散结构方程的例子．从这两个例子也可以看到如何将一个微分方程化为 (1.2.1) 抽象形式的过程．

例 1.4 Navier-Stokes 方程：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu\Delta u - (u\cdot\nabla)u - \nabla p + \lambda f, \quad x \in \Omega \subset R^3, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0,x) = \varphi(x), \end{cases} \tag{1.2.4}$$

这里 $f \in L^2(\Omega, R^3), \varphi \in H$, 下面将给出 H 的定义．

首先，我们知道对任何 $\lambda \in R$, 下面定态方程在 $H^2(\Omega, R^3)$ 中存在一个解

$$\begin{cases} \mu\Delta u - (u\cdot\nabla)u - \nabla p + \lambda f = 0, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

令 v_λ 是 (1.2.5) 的解，然后作平移变换

$$v = u - v_\lambda \ (u\text{是 (1.2.4) 的解}), \quad \phi(x) = \varphi(x) - v_\lambda,$$

则方程 (1.2.4) 等价于如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \mu\Delta v - (v_\lambda\cdot\nabla)v - (v\cdot\nabla)v_\lambda - (v\cdot\nabla)v - \nabla p, \\ \mathrm{div} v = 0, \\ v|_{\partial\Omega} = 0, \\ v(0,x) = \phi(x). \end{cases} \tag{1.2.6}$$

我们建立如下空间

$$H = \{u \in L^2(\Omega, R^3) | \mathrm{div} u = 0, u\cdot n|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$H_1 = \{u \in H^2(\Omega, R^3) \cap H | \ \ u|_{\partial\Omega} = 0\},$$

这里 n 为 $\partial\Omega$ 的单位法向量. 由 Hodge 分解定理, $L^2(\Omega, R^n)(n \geqslant 2)$ 能够被分解为如下两个子空间的直交和

$$\begin{cases} L^2(\Omega, R^n) = H \oplus G, \\ H = \{u \in L^2(\Omega, R^n) | \mathrm{div} u = 0, u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ G = \{\nabla\varphi \in L^2(\Omega, R^n) | \varphi \in H^1(\Omega)\}, \\ G \perp H. \end{cases}$$

这样, 我们可以定义一个正交投影, 称为 Leray 投影.

$$P : L^2(\Omega, R^n) \to H.$$

现在定义映射

$$L_\lambda = -A + B_\lambda : H_1 \to H, \quad G : H_1 \to H$$

如下: $\forall u \in H_1$,

$$\begin{cases} Au = -\mu P[\Delta u], \\ B_\lambda u = -P[(v_\lambda \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v_\lambda], \\ Gu = -P[(u \cdot \nabla)u], \end{cases} \tag{1.2.7}$$

这里 $P : L^2(\Omega, R^3) \to H$ 是 Leray 投影.

由 (1.2.7) 可以看到方程 (1.2.6) 化为抽象形式 (1.2.1). 条件 (1.2.2) 显然成立, 由 Sobolev 空间的紧嵌入定理, B_λ 是一个线性紧算子. 因为 Stokes 方程

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = f, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

对任何 $f \in L^2(\Omega, R^3)$ 存在唯一解 $u \in H_1$, 因而算子 $A : H_1 \to H$ 是一个线性同胚. 进一步我们可以看到, A 算子的特征方程 $Au = \lambda u$ 对应于如下形式的 Stokes 算子的特征方程

$$\begin{cases} -\mu\Delta u + \nabla p = \lambda u, \\ \mathrm{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{1.2.8}$$

由泛函分析中对称紧算子特征值理论, 我们知道 (1.2.8) 具有可数无穷个实特征值:

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_k \leqslant \cdots, \quad \lambda_k \to +\infty, \quad k \to \infty,$$