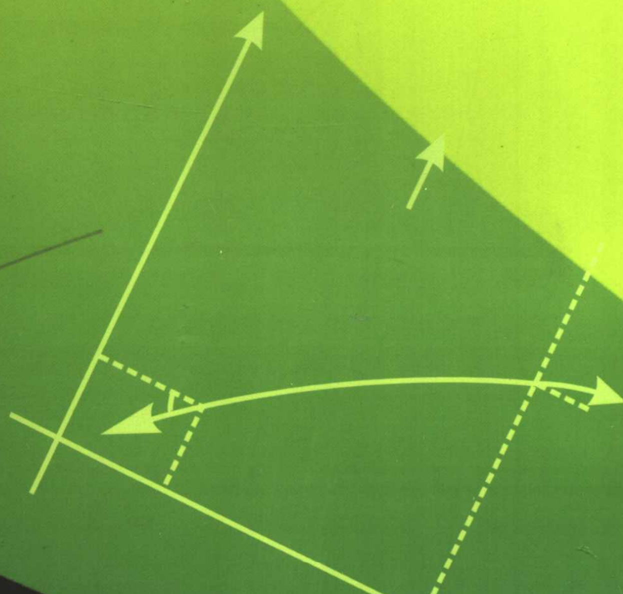
应用偏微分方程

王定江　编著

YINGYONG PIAN WEIFEN FANGCHENG



4

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

浙江工业大学专著与研究生教材出版基金资助

应用偏微分方程

王定江　编著

浙江大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用偏微分方程 / 王定江编著. —杭州：浙江大学出版社，2007.8
ISBN 978-7-308-05463-8

Ⅰ.应... Ⅱ.王... Ⅲ.偏微分方程—高等学校—教材
Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 130129 号

应用偏微分方程

王定江 编著

责任编辑	余健波
出版发行	浙江大学出版社
	(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)
	(E-mail:zupress@mail.hz.zj.cn)
	(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版	浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷	杭州富阳育才印刷有限公司
开　　本	787mm×960mm 1/16
印　　张	11.5
字　　数	226 千字
版 印 次	2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-308-05463-8
定　　价	20.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88072522

前　言

自微积分理论形成后不久，人们已经开始用偏微分方程来描述、解释和预测各种自然现象，在力学、天文学、物理学、生物学、工程技术和其他学科的许多分支中提出了很多用偏微分方程描述的数学模型，很多重要学科如物理、力学等学科的基本方程本身就是偏微分方程。人们习惯上说的数学物理方程最早主要来自物理学科的三类偏微分方程(波动方程、热传导方程、位势方程)。数学物理方程在一定程度上描述了自然界大量的基本物理现象，通过数理方程的研究，有效地解决了许多以前尚未认识和无法解决的理论问题和实际问题。因此，数理方程一直受到广大科技人员和工程技术人员的重视，现在它已成为理工科各专业研究生学习专业知识的必修内容，也是人们从事科学研究的重要工具。数学物理方程属于经典偏微分方程理论的范畴，它已有许多至今仍在广泛使用的求解方法。

随着科学技术特别是应用科学的发展，偏微分方程已成为数学理论与实际应用之间的一座桥梁。特别是数学和其他学科的交叉学科(如数学生物学、数量经济学、数学物理学)的迅速发展，使得近年来国内外出现的偏微分方程实际模型非常多。一方面，人们在实际工作中不断提出新的偏微分方程问题，例如近年来人们在生物学、生态学、生命科学和众多工程技术领域建立了很多偏微分方程形式的模型，其中就有很多是新形式的偏微分方程；另一方面，新学科、新技术、新方法的不断出现又为偏微分方程的研究提供了重要手段，例如泛函分析中算子半群方法、广义函数法、数值分析中有限元法等为处理线性和非线性偏微分方程问题提供了强有力的框架和工具，并且在实际中得到了广泛的应用。

传统的偏微分方程教材，有的强调理论推证，只适合于纯数学专业的高年级学生，使用范围小；而使用于非数学专业高年级学生和工科硕士生的偏微分方程教材又只介绍传统的三类经典偏微分方程(波动方程、热传导方程和调和方程)，基本上没有吸收近年来在一些新的领域建立起来的新的偏微分方程模型和新的求解方法。笔者本人在这几年本校工科硕士生的偏微分方程教学中体会很深，听课的化材学院、生环学院、药学院、机电学院、建工等学院的研究生，从他们专业特点不断提出一些本专业与数学的交叉问题，希望能够介绍一些近年来数学在他们专业应用的偏微分方程模型和求解方法。笔者多年来一直从事应用数学(主要是生物数学)问题研究，研究的模型主要是偏微分方程模型，因此，几年中在讲课时加进了一些目前国内外正在研究的热门偏微分方程模

型，其中也包括笔者的一些研究成果（书中第一章第四节、第八章第二节和第三节的主要内容），受到学生欢迎。根据多年教学体会，以及工科各专业研究生的学习与研究需求，本书尽可能突出各专业实用性的特点，一是着重介绍方程、初始条件和边界条件的实际背景；二是整理清楚各个求解方法的思路步骤；三是解释好偏微分方程求解出的结果；四是延伸推广出该方程在其他学科专业中的应用。

偏微分方程是一门实用性很强的学科，对工科各专业研究生和本科高年级学生的专业学习、科学研究及未来的应用都是非常必要的。因此，在传统数学物理方程的基础上适当增加现代偏微分方程的内容，突出由实际问题建立数学模型的思路，着重求解方法来编写偏微分方程及其应用的教材具有一定的现实意义。本书着重紧密结合工程技术等方面的实际，在建立偏微分方程和定解条件时，注意突出建模方法，培养学生将实际问题抽象为数学模型的能力；在方程求解方法的探索中，注意实际问题的背景和数学理论的结合，培养学生分析问题和解决问题的能力；在对求解结果进行分析时，注意理论与实际的统一，培养学生善于将理论用于实际的能力。

本书详细介绍了一阶偏微分方程（线性和非线性）及实用模型、三类二阶偏微分方程（波动方程、热传导方程和调和方程）和一些实用的非线性偏微分方程的求解方法：特征线法、行波法、分离变量法、积分变换法、Green 函数法和数值分析法等。

本书可供非数学专业研究生、高年级本科生作为教材使用，也可供广大工程技术人员参考。

本书的出版受到浙江工业大学专著与研究生教材出版基金和国家自然科学基金的资助。同时，作为本书基础的讲义的编写曾受到浙江工业大学研究生院和理学院的大力支持，使用该讲义的研究生也提出了许多很好的建议，在此一并致谢。

由于笔者学识所限，缺点和错误在所难免，诚恳地希望读者批评指正。

编　者

2007 年 6 月

目　录

第一章　一阶偏微分方程

本章首先介绍与偏微分方程及其解有关的一些基本概念，其次给出一阶线性和拟线性偏微分方程的求解方法，最后通过近年来国内外广泛关注的一些一阶偏微分方程模型的导出和讨论说明其应用.

§1.1　基本概念

1.1.1　偏微分方程

定义 1.1　一个包含有多元未知函数和未知函数的各阶偏导数的方程称为**偏微分方程**. 方程中所含未知函数偏导数的最高阶数称为该方程的**阶数**，简称为该方程的**阶**.

若干个偏微分方程构成的方程组称为**偏微分方程组**，这些偏微分方程中的最高阶数又称为这个偏微分方程组的**阶数**.

具有 n 个自变量的未知函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 m 阶偏微分方程的一般形式为

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2},\cdots,\frac{\partial^m u}{\partial x_n^m}\right)=0, \qquad (1.1.1)$$

记
$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\boldsymbol{D}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right),\boldsymbol{D}^m=\frac{\partial^m}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},$$

这里
$$m=\sum_{i=1}^n\alpha_i,\ \alpha_i=0,1,2,\cdots,m,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

则方程(1.1.1)可写成

$$F(\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}),\cdots,\boldsymbol{D}^m u(\boldsymbol{x}))=0, \qquad (1.1.2)$$

其中 F 一般是 $\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^{n^m}$ 上的已知函数.

对于一个偏微分方程(组)，如果它关于未知函数和未知函数的各阶偏导数是线性的，或者说它线性地包含未知函数和未知函数的各阶偏导数，则称它是**线性偏微分方程(组)**；如果它关于未知函数的所有最高阶偏导数都是线性的，则称它为**拟线性偏微分方程(组)**，其中最高阶偏导数组成的部分称为该方程的**主部**；如果拟线性偏微分方程主部

的各项系数不含未知函数，则称它为**半线性偏微分方程**.通常把既不是线性的又不是拟线性的方程(组)称为**非线性方程(组)**.

例如方程

$$u_{tt}-a^2u_{xx}-f(x,t)=0$$

为二阶线性偏微分方程.

方程

$$u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}+f(x,y,u,u_x,u_y)=0$$

为二阶拟线性偏微分方程.

方程

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(x_1,\cdots,x_n,u)=0$$

为一阶半线性偏微分方程.

方程

$$\sum_{i=1}^{n}(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}+f(x_1,\cdots,x_n,u)=0$$

为一阶非线性偏微分方程.

只有一个未知函数(含 n 个自变量)u 的一阶偏微分方程其一般形式为

$$F\left(x_1,x_2,\cdots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \tag{1.1.3}$$

或写成向量形式为

$$F(\boldsymbol{x},u,\boldsymbol{D}u(\boldsymbol{x}))=0.$$

一阶线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}+f(x_1,\cdots,x_n)u=g(x_1,\cdots,x_n). \tag{1.1.4}$$

一阶拟线性偏微分方程的一般形式为

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,\cdots,x_n,u)\frac{\partial u}{\partial x_i}=g(x_1,\cdots,x_n,u). \tag{1.1.5}$$

当 $g(x_1,\cdots,x_n)=0$ 时，方程(1.1.4)称为**一阶线性齐次偏微分方程**，而当 $g(x_1,\cdots,x_n)\neq 0$ 时，方程(1.1.4)称为**一阶线性非齐次偏微分方程**.

1.1.2 定解条件与定解问题

若函数 u 在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 的区域 Ω 内连续，并具有连续的各阶偏导数，该函数及其各阶导数满足方程(1.1.1)，则称 u 为方程(1.1.1)的**解(古典解)**，也称它为方程(1.1.1)的**积分**或**积分曲面**(超曲面).

满足某些特定条件的解称为偏微分方程的**特解**.这些附加在未知函数上的特定条件称为偏微分方程的**定解条件**.定解条件通常是在区域Ω的子集或边集界$\partial\Omega$上给出一些已知函数,要求未知函数u及u的偏导数在$\partial\Omega$上等于这些已知函数.定解条件通常分为两类:

(1)初始条件:在一些情况下,方程中某个自变量用来表示时间t,而且超平面$t=t_0$为所考虑区域的一部分,在$t=t_0$上给出的条件称为**初始条件**.

(2)边界条件:在区域Ω的边界曲面$\partial\Omega$上给出的定解条件称为**边界条件**.常见的边界条件有:

第一类边界条件:$u|_{\partial\Omega}=\varphi$;

第二类边界条件:$\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{\partial\Omega}=\varphi$;

第三类边界条件:$\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\right|_{\partial\Omega}=\varphi$.

其中$\boldsymbol{n}$是$\partial\Omega$的外法线方向,φ是$\partial\Omega$上已知函数.

若定解条件中关于u及u的偏导数是线性的,则称为**线性定解条件**,特别若定解条件中给出的已知函数恒为零,则称为**齐次定解条件**.

对一个偏微分方程附加上一个或若干个定解条件的求解问题称为这个偏微分方程的**定解问题**.只有初始条件而没有边界条件的定解问题称为**初值问题(Cauchy 问题)**;只有边界条件而没有初始条件的定解问题称为**边值问题**;既有初始条件又有边界条件的定解问题称为**混合问题(初—边值问题)**.通常把解的存在性、唯一性和解对定解条件的连续依赖性(稳定性)称为**定解问题的适定性**,如果一个定解问题存在唯一稳定的解,我们说这个问题是适定的.

一般情况下,一个具有n个自变量的m阶偏微分方程(1.1.1)的解可以含有m个任意函数,并且这些函数的自变量的个数为$n-1$,这样的解称为此方程的**通解**.只有为数极少的偏微分方程可以求出它的通解.

偏微分方程通解的特点是其中包含任意函数,这与常微分方程通解中包含任意常数类似.如含两个自变量x,y而不含未知函数u关于y的偏导的一阶偏微分方程$F\left(x,y,u,\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0$,当把$y$看作常数时,可把该方程看作一阶常微分方程,它的通解设为$u=f(x,y,C)$,这里C相对于x是常数,但相对于y可以是任意函数$C=g(y)$,从而通解为:$u=f(x,y,g(y))$.这里f,g都是任意函数.

例如二阶方程$u_{xy}=0$的通解为$u(x,y)=f(x)+g(y)$,其中f,g为任意可微函数.

与常微分方程相比,偏微分方程的通解依赖于任意函数,它的自由度很大,从中可以看出偏微分方程求解的复杂性.尽管如此,有人构造出了无解的偏微分方程(Hans Lewy,1957):

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\frac{\partial u}{\partial z}=f,$$

该方程对很多无限次可数的函数 f,在原点邻域内不存在解.

因此,偏微分方程与常微分方程的研究方法尽管有很大不同,但是常微分方程的理论与方法对于偏微分方程仍很重要.特别是一阶偏微分方程通常能够化为一组常微分方程来求解.第一章主要介绍一阶偏微分方程的求解方法.

§1.2 一阶线性偏微分方程

1.2.1 齐次线性偏微分方程

一阶齐次线性偏微分方程为

$$F(u)\equiv\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0, \tag{1.2.1}$$

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 在区域 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 内连续可微,且对各个自变量 x_i 的偏导数为有界的.显然,方程(1.2.1)总有平凡解 $u=$常数,我们主要求它的非平凡解.

下面在 $\mathbf{R}^3$ 中看一下一阶齐次线性偏微分方程的意义.如怎样求一个曲面 $u(x,y,z)=c$,使曲面上的法线均与已知方向场

$$\boldsymbol{F}=P(x,y,z)\mathbf{i}+Q(x,y,z)\mathbf{j}+R(x,y,z)\mathbf{k}$$

在该点的方向正交.

设曲面方程为 $u(x,y,z)=c$,曲面在点(x,y,z)的法向量为

$$\boldsymbol{n}=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k},$$

则有 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=0$,即

$$P(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+R(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0. \tag{1.2.2}$$

因此所求函数 $u(x,y,z)$为一阶齐次线性偏微分方程(1.2.2)的解.从而在几何上求积分曲面的问题就转化为方程(1.2.2)的求解问题.

下面介绍一阶齐次线性偏微分方程(1.2.1)的求解方法——**特征线法**.

对于方程(1.2.1),常微分方程组

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{ds}=a_1(x_1,\cdots,x_n), \\
\dfrac{dx_2}{ds}=a_2(x_1,\cdots,x_n), \\
\quad\cdots\cdots \\
\dfrac{dx_n}{ds}=a_n(x_1,\cdots,x_n).
\end{cases} \tag{1.2.3}
$$

称为方程(1.2.1)的**特征方程组**；这个方程组的每一条积分曲线

$$x_1=\varphi_1(s),\ x_2=\varphi_2(s),\ \cdots,\ x_n=\varphi_n(s)$$

称为方程(1.2.1)的**特征线**.

如果在Ω内具有一阶连续偏导数的函数$u(x_1,\cdots,x_n)$沿特征线取常数值，即$u(\varphi_1(s),\cdots,\varphi_n(s))=$常数时，它才是方程(1.2.1)的一个积分，那么该函数$u(s,x_1,\cdots,x_n)$称为方程组(1.2.3)的一个**首次积分**.

如果求得方程组(1.2.3)的n个首次积分$u_i(s,x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n)$，且有Jacobi行列式

$$\det\frac{\partial(u_1,u_2,\cdots,u_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq 0,$$

则易知方程组(1.2.3)的通积分为

$$
\begin{cases}
u_1(s,x_1,\cdots,x_n)=c_1, \\
u_2(s,x_1,\cdots,x_n)=c_2, \\
\quad\cdots\cdots \\
u_n(s,x_1,\cdots,x_n)=c_n.
\end{cases}
$$

其中$c_1,c_2,\cdots,c_n$都是任意常数.

求首次积分时，常将微分方程组(1.2.3)写成对称形式

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{ds}{1},$$

此对称形式可方便地用来求首次积分.

例 2.1　求解微分方程组

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1+\sqrt{z-x-y}}=\frac{dz}{2}.$$

解　由$\dfrac{dx}{1}=\dfrac{dz}{2}$，两边积分后得$2x-z=C_1$，所以得到一个首次积分$u_1=2x-z$.

由合比定理有

$$\frac{dz-dy-dx}{-\sqrt{z-x-y}}=\frac{dx}{1},$$

两边积分后得　　$$x+2\sqrt{z-x-y}=C_2,$$

由此又得到一个首次积分 $u_2=x+2\sqrt{z-x-y}$.

因此，原方程组的通解为

$$\begin{cases}2x-z=C_1,\\ x+2\sqrt{z-x-y}=C_2.\end{cases}$$

下面通过方程(1.2.2)来看特征方程组的首次积分与对应偏微分方程的解之间的关系.

方程(1.2.2)的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{P(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{Q(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{R(x,y,z)},$$

不妨设 $P(x,y,z)\neq 0$，则特征方程组有等价形式

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{Q(x,y,z)}{P(x,y,z)},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{R(x,y,z)}{P(x,y,z)}.\end{cases}\tag{1.2.4}$$

由方程组(1.2.4)可求出特征曲线：$y=y(x)$，$z=z(x)$. 设 $\varphi(x,y,z)$ 为方程组(1.2.4)的一个首次积分，由首次积分的定义有 $\varphi(x,y(x),z(x))\equiv c$（$c$ 为某一常数），由此知特征曲线全在曲面 $S:\varphi(x,y,z)=c$ 上. 又由常微分方程解的存在唯一性定理知，过 S 上任意一点都有特征线通过，于是曲面 S 由特征线组成，因此 S 是方程(1.2.2)的一个积分曲面，即 $u=\varphi(x,y,z)$ 就是方程(1.2.2)的一个解.

对于偏微分方程(1.2.1)有如下定理.

定理 1.2.1 连续可微函数 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是方程(1.2.1)的解，其充分必要条件为 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是特征方程组(1.2.3)的首次积分.

证明 如果 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是方程(1.2.1)的解，则有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\equiv 0,$$

又 $\mathrm{d}x_i=a_i\mathrm{d}s$，从而有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\varphi(x_1,\cdots,x_n)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}a_i\mathrm{d}s\\ &=\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\varphi(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}s\equiv 0,\end{aligned}$$

所以 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)\equiv$ 常数，故 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 为(1.2.3)的首次积分.

反过来，假设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是(1.2.3)的首次积分，要证 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 是方程(1.2.1)的解，只需证明对任意点 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\in\Omega$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x}^0)\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_i}=0.$$

事实上，由常微分方程解的存在唯一性定理，方程(1.2.3)存在满足初始条件

$x_i^0=x_i(0)(i=1,2,\cdots,n)$的解 $x_i=x_i(s)(i=1,2,\cdots,n)$，将其代入函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，有

$$\varphi(x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s))\equiv C,$$

其中

$$C=\varphi(x_1(0),x_2(0),\cdots,x_n(0)).$$

因此 $\mathrm{d}\varphi(x_1(s),x_2(s),\cdots,x_n(s))\equiv 0$，即

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\equiv 0,$$

也就是

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\varphi(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}s\equiv 0,$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\frac{\partial\varphi(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=0,$$

即 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$是方程(1.2.1)的解.

定理 1.2.2　如果 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n-1)$是(1.2.3)的 $n-1$ 个独立的首次积分，则它们的任意连续可微函数 $u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})$是方程(1.2.1)的通解.

证明　设 $u=\varphi(x_1,\cdots,x_n)$是方程(1.2.1)的任意一个解，又 $\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)(i=1,2,\cdots,n-1)$是方程(1.2.3)的首次积分，即它们都是方程(1.2.1)的解，于是 $\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1},\varphi$ 都满足方程(1.2.1)，从而有 n 个恒等式：

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\equiv 0, & j=1,2,\cdots,n-1,\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial\varphi(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}\equiv 0.\end{cases}\tag{1.2.5}$$

把方程组(1.2.5)看成关于 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$的线性齐次代数方程组，由于 a_i 在 Ω 内不同时为零，即线性齐次代数方程组(1.2.5)在 Ω 内有非零解，从而方程组(1.2.5)的系数行列式在 Ω 上恒等于零，即

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\end{vmatrix}\equiv 0.\tag{1.2.6}$$

式(1.2.6)是函数组 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1},\varphi$ 的雅可比(Jacobi)行列式，由已知 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1},\varphi$ 线性相关，又因为 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}$是相互独立的，故式(1.2.6)左端行列式的前 $n-1$行中存在不为零的 $n-1$ 阶子行列式，因此有

$$\varphi=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}).$$

定理 1.2.1 及定理 1.2.2 实际上给出了利用特征方程组求解偏微分方程的一种方法,这种方法称为**特征线法**.

例 2.2 求解方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

解 该方程的特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2y}=\frac{\mathrm{d}z}{-z}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2y}$,可得一个首次积分 $\varphi_1=x\sqrt{y}$,又由$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}z}{-z}$,可得另一个首次积分 $\varphi_2=xz$,对于矩阵

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \frac{x}{2\sqrt{y}} & 0\\ z & 0 & x\end{pmatrix},$$

当 $xyz\neq0$ 时,存在不为零的二阶子行列式,故 φ_1 与 φ_2 是独立的. 所以在这样的区域上原方程的通解为

$$u=\Phi(x\sqrt{y},xz),$$

其中 Φ 为任意的二元连续可微函数.

1.2.2 齐次线性偏微分方程的 Cauchy 问题

一阶齐次线性偏微分方程的 Cauchy 问题即求如下初值问题

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}a_i(\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial x_i}=0,\\ u\big|_{x_i=x_i^0}=f(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\end{cases}\tag{1.2.7}$$

的解. 这里 f 是已知函数,i 为某个确定的下标,为方便起见,以后总取 $i=n$,即把初始条件总设为

$$u\big|_{x_n=x_n^0}=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}),$$

其中 x_n^0 为给定的数.

由定理 1.2.2 知方程(1.2.1)的通解为

$$u=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}),$$

所以求解 Cauchy 问题(1.2.7)可归结为求 Φ 使得满足

$$\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})\big|_{x_n=x_n^0}=f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}).\tag{1.2.8}$$

设 $a_i(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)\neq0(i=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$不是特征方程组(1.2.3)

的奇点(平衡点),则在点 $\boldsymbol{x}^0$ 的邻域内,从方程组

$$\begin{cases}\varphi_1(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=\overline{\varphi_1},\\ \varphi_2(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=\overline{\varphi_2},\\ \quad\cdots\cdots\\ \varphi_{n-1}(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^0)=\overline{\varphi_{n-1}}.\end{cases}\tag{1.2.9}$$

中可解出 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 为

$$\begin{cases}x_1=\omega_1(\overline{\varphi_1},\overline{\varphi_2},\cdots,\overline{\varphi_{n-1}}),\\ x_2=\omega_2(\overline{\varphi_1},\overline{\varphi_2},\cdots,\overline{\varphi_{n-1}}),\\ \quad\cdots\cdots\\ x_{n-1}=\omega_{n-1}(\overline{\varphi_1},\overline{\varphi_2},\cdots,\overline{\varphi_{n-1}}).\end{cases}\tag{1.2.10}$$

这里 $\overline{\varphi_i}$ 若取值为 $\overline{\varphi_i^0}=\varphi_i(x_1^0,\cdots,x_n^0)(i=1,2,\cdots,n-1)$,则实际上对应有 $\omega_i=x_i^0(i=1,2,\cdots,n-1)$.

因此,Cauchy 问题(1.2.7)的解为

$$u=f(\omega_1(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}),\cdots,\omega_{n-1}(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1})).\tag{1.2.11}$$

事实上,因(1.2.11)是(1.2.1)的特解 φ_i 的函数,所以 f 本身为(1.2.1)的解,又当 $x_n=x_n^0$ 时,$\varphi_i=\overline{\varphi_i}$,且 $\omega_i(\overline{\varphi_1},\cdots,\overline{\varphi_{n-1}})=x_i(i=1,2,\cdots,n-1)$,因此,(1.2.8)式得到满足.

例 2.3　求解 Cauchy 问题

$$\begin{cases}yz\dfrac{\partial u}{\partial x}+xz\dfrac{\partial u}{\partial y}+xy\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\\ u|_{y=y_0}=f(x,z).\end{cases}$$

解　特征方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x}{yz}=\frac{\mathrm{d}y}{xz}=\frac{\mathrm{d}z}{xy},$$

由前面等式得一首次积分 $\varphi_1=x^2-y^2$,由后面等式得另一首次积分 $\varphi_2=z^2-y^2$,令

$$\begin{cases}x^2-y_0^2=\overline{\varphi_1},\\ z^2-y_0^2=\overline{\varphi_2}.\end{cases}$$

解得 $x=\pm\sqrt{\overline{\varphi_1}+y_0^2}$,$z=\pm\sqrt{\overline{\varphi_2}+y_0^2}$.

因此原问题的解为

$$u=f(\pm\sqrt{\varphi_1+y_0^2},\pm\sqrt{\varphi_2+y_0^2}),$$

即

$$u=f(\pm\sqrt{x^2-y^2+y_0^2},\pm\sqrt{z^2-y^2+y_0^2}).$$