

21世纪全国高等院校通用教材辅导用书

线性代数学习指导

MATHS

编著 姚慕生



中国财政经济出版社

21 世纪全国高等院校通用教材辅导用书

线性代数学习指导

姚慕生 编著

中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

线性代数学习指导/姚慕生编著. —北京: 中国财政经济出版社,
2007. 3

21 世纪全国高等院校通用教材辅导用书

ISBN 978 - 7 - 5005 - 9714 - 8

I. 线… II. 姚… III. 线性代数 - 高等学校 - 教学参考资料
IV. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 025124 号

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: jiaoyu@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100036

发行电话: 88190616 88190655 (传真)

三河市新世纪印务有限公司印刷 各地新华书店经销

787 × 960 毫米 16 开 12.25 印张 199 000 字

2007 年 9 月第 1 版 2007 年 9 月河北第 1 次印刷

定价: 15.00 元

ISBN 978 - 7 - 5005 - 9714 - 8/O · 0057

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

前 言

线性代数是普通高等院校的一门基础课. 如果说中学代数研究的是单个的数及其运算, 那么线性代数研究的对象是数组及其运算. 具体来说是向量、矩阵、行列式以及它们的应用. 线性代数的研究内容不仅在大学本科的后续课程中有着重要的应用, 而且也是学生们在今后工作实践中解决实际问题的有力工具. 编者根据教育部对本科线性代数课程的基本要求, 结合自己多年来的教学实践编写了《线性代数》一书, 本书是《线性代数》的配套教材, 不仅对教材中的习题作了十分详细的解答, 而且还提供了一定数量的练习题供读者进一步练习使用. 本书适合大学本科经济、管理类专业、工科的某些专业、夜大、网络学院以及高等职业学院使用.

要学好一门数学课程, 除了理解课堂上和书上的知识内容以外, 最重要的是要多做练习. 为此, 我们在教材中已配备了大量的习题. 但是由于线性代数是一门比较抽象的学科, 初学者在做练习时往往会感到困难. 为了帮助读者解决这一困难, 我们编写了这本书. 希望这本书能够成为正在学习线性代数课程的读者的益友.

本书每章分四部分. 第一部分为学习要点, 把本章重要的知识包括概念、方法等提炼出来, 要求学习者重点掌握; 第二部分为教材习题解答, 将原教材各节的习题、复习题一一做了详尽的解答; 第三部分为同步练习题, 是为帮助学习者掌握和巩固所学知识而新增设的习题; 第四部分为同步练习题答案. 最后设计两套模拟试卷, 并给出了参考答案, 供学习者复习考试用.

虽然本书是作者在多年教学积累基础上编著完成的, 但是限于水平,

不当、错误之处在所难免，敬请读者和各位同行批评指正。

本书的出版得到了中国财政经济出版社的大力支持，在此谨向他们表示衷心的感谢！

编 者

2006 年 9 月于复旦大学

目 录

第一章 行列式	(1)
【学习要点】	(1)
【教材习题解答】	(1)
【同步练习题】	(25)
【同步练习题答案】	(30)
第二章 矩阵	(33)
【学习要点】	(33)
【教材习题解答】	(33)
【同步练习题】	(57)
【同步练习题答案】	(60)
第三章 向量和线性方程组	(64)
【学习要点】	(64)
【教材习题解答】	(64)
【同步练习题】	(100)
【同步练习题答案】	(104)
第四章 特征值	(111)
【学习要点】	(111)
【教材习题解答】	(111)
【同步练习题】	(137)

【同步练习题答案】	(141)
第五章 二次型	(147)
【学习要点】	(147)
【教材习题解答】	(147)
【同步练习题】	(169)
【同步练习题答案】	(173)
模拟试卷 (A)	(178)
模拟试卷 (A) 参考答案	(181)
模拟试卷 (B)	(184)
模拟试卷 (B) 参考答案	(187)

第一章 行列式

【学习要点】

1. 行列式的概念、余子式和代数余子式的概念.
2. 行列式值的定义.
3. 行列式的 7 条性质.
4. 行列式按某行或某列展开的定理.
5. 运用行列式的性质熟练计算行列式.
6. 克莱姆法则, 应用克莱姆法则解线性方程组.

【教材习题解答】

习题 § 1.1

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 (1) 根据二阶行列式的定义,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 0 - 1 \times (-1) = 1.$$

2. 计算下面两个行列式并和性质 1 比较:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 根据定义计算行列式,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 3 \times (-3) = 11, \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - (-3) \times 3 = 11.$$

这两个行列式互为转置, 值相同.

3. 计算下面两对行列式并和性质 3 比较:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 (1) 根据定义,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times (-1) = 3, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 2 \times 4 - 1 \times (-4) = 12.$$

两个行列式第一行相同, 第二个行列式的第二行是第一个行列式第二行的 4 倍, 因此行列式值也是第一个的 4 倍.

$$(2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 3 \times (-1) = 9.$$

两个行列式第一列相同, 第二个行列式的第二列是第一个行列式第二列的 3 倍, 因此行列式值也是第一个的 3 倍.

4. 计算下面三个行列式并和性质 4 比较:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 经计算知道,

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 3 - 2 \times 4 = 1, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - 2 \times 3 = -3$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \times 2 - 2 \times 1 = 4$$

第一个行列式的第一行和另两个行列式的第一行相同，而第二行可以表示为后两个行列式第二行之和，所以第一个行列式的值等于后两个行列式值之和。

5. 计算下列行列式并和性质 5 比较：

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}.$$

解 经计算，

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-1) \times (-4) - 2 \times 2 = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times 1 = 0.$$

这两个行列式行（列）元素成比例，所以值都等于零。

6. 利用性质 6 说明下列两个行列式值相同：

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 11 \end{vmatrix}.$$

解 第一个行列式第一列乘以 4 加到第二列上就得到第二个行列式，根据性质 6 行列式值不变。事实上经计算知道它们的值都等于 11。

7. 比较下列行列式的值：

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 经计算，

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 - (-2) \times 2 = 9, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = (-2) \times 2 - 1 \times 5 = -9.$$

第一个行列式交换两列再转置就是第二个行列式，因此它们的值相差一个负号。

8. 举例说明下列等式不成立：

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

问: 根据性质 4, 行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix}$ 应等于什么?

解 反例:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2+1 & 1+1 \\ 1+1 & 1+1 \end{vmatrix} = 2,$$

但是,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 = 1.$$

根据性质 4, 行列式

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

习题 § 1.2

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解 (1) 根据定义,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -8.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(1-6) + (-1)(1-2) = 11.$$

2. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & 7 & -2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

解 (1) 行列式第一、第二行成比例, 根据性质, 其值等于零.

(2) 行列式第一行是第一题 (2) 中行列式第一行的 2 倍, 其余行相同, 因此值等于 22.

3. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} x & x^2+1 & -1 \\ 0 & -x & e^x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 (1) 第一行乘以 (-1) 加到第二行、第三行上, 行列式值不变, 因此

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x+1 & y+1 & z+1 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

得到的行列式第二和第三行成比例, 所以行列式值等于零, 即原行列式值等于 0.

(2) 按定义,

$$\begin{vmatrix} x & x^2+1 & -1 \\ 0 & -x & e^x \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = x \cdot \begin{vmatrix} -x & e^x \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} x^2+1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ + 1 \cdot \begin{vmatrix} x^2+1 & -1 \\ -x & e^x \end{vmatrix} = e^x(x^2+1) - x.$$

4. 解下列方程:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 3 \\ 1 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad (2) \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

解 (1) 当 $x=2$ 时, 行列式第一、第二行成比例, 值等于 0, 所以 $x=2$ 是解. 另一方面, 根据行列式值的定义知道 3 个余子式中 x 的次数不会超过 1, 所以这是个一次方程. 故 $x=2$ 是全部解.

(2) 根据定义先求出行列式,

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (x-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = x-13,$$

因此原方程化为 $x-13=0$, 故解为 $x=13$.

5. 用行列式解下列三元一次方程组:

$$(1) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 - x_3 = 4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - 5y - 3z = 10 \\ 4x + 8y + 2z = 4 \end{cases}$$

解 (1) 计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7.$$

所以

$$x_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{13}{-5}, \quad x_2 = \frac{A_2}{A} = -\frac{4}{-5}, \quad x_3 = \frac{A_3}{A} = -\frac{7}{-5}.$$

(2) 计算行列式

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 34,$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 68,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 10 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 10 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 10 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 10 \end{vmatrix} = -68.$$

所以 $x=2, y=0, z=-2$.

习题 §1.3

1. 求下列行列式中第 (1, 2), 第 (3, 1) 及第 (3, 3) 元素的余子式和代数余子式:

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

解 (1) 第 (1, 2), (3, 1), (3, 3) 元素的余子式依次为

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

它们的代数余子式依次为

$$-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

(2) 原行列式的第 (1, 2) 元素的余子式和代数余子式分别为

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

原行列式的第 (3, 1) 元素的余子式和代数余子式分别为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

原行列式的第 (3, 3) 元素的余子式和代数余子式分别为

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. 写出下列行列式的转置

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

解 这两个行列式的转置依次为:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

3. 计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ 9 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解 (1) 这是一个对角行列式, 值等于主对角线元素之积, 即等于 $abcd$.

(2) 这是一个下三角行列式, 其值等于主对角线元素之积 -6 .

4. 计算下列行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解 (1) 这是一个上三角行列式, 值等于主对角线元素之积 60.

(2) 将这个行列式转置, 值不变, 而

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

原行列式值等于 2.

5. 计算行列式的值:

$$(1) \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & u & v \\ 0 & 0 & x & y \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 10 & 4 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

解 (1) 按定义原行列式等于 (注意下面式子中零乘以它的余子式仍为零, 故不再写出):

$$a \cdot \begin{vmatrix} 0 & e & f \\ 0 & u & v \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$$

而上面的行列式有一列元素全等于零, 因此该行列式值等于零, 故原行列式值也等于零.

(2) 这个行列式第一行和第三行成比例, 故值等于零.

习题 § 1.4

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

解 (1) 第一行乘以 -3, -1, 2 依次加到第二行, 第三行, 第四行上, 行列式值不变, 即原行列式值等于

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ -2 & -4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -6 & 4 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

将上面最后一个行列式的第二列乘以 10 加到第三列上,

$$\begin{vmatrix} -6 & 4 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6 & 4 & 39 \\ -4 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ = (-1)^{3+2}(-1) \begin{vmatrix} -6 & 39 \\ -4 & 11 \end{vmatrix} = 90.$$

(2) 将第一行乘以 -1 加到第三行.

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 7 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 2 & 6 \\ 8 & -9 & 4 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -3 \\ 5 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

将得到的行列式第二列加到第三列上, 再将第一行加到第二行上,

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & -9 & -5 & 9 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 & 6 \\ 15 & -6 & 0 & 15 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

降阶,

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 & 6 \\ 15 & -6 & 0 & 15 \\ 0 & -5 & 0 & -3 \\ 5 & -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}5 \times \begin{vmatrix} 15 & -6 & 15 \\ 0 & -5 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

第三行乘以 -3 加到第一行, 再降阶,

$$\begin{vmatrix} 15 & -6 & 15 \\ 0 & -5 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -5 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1}5 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} \\ = 5(-9+15) = 30$$

所以原行列式的值等于 $5 \times 30 = 150$.