面向新世纪课程教材
Textbook Series for the New Century

# 大学数学

## （理工类）下册

陈光曙 主编
陈学华 夏海峰 徐新亚 副主编

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

面　向　新　世　纪　课　程　教　材

Textbook Series for the New Century

# 大学数学

## （理工类）　下册


陈光曙　主　编

陈学华
夏海峰　副主编
徐新亚



同济大学出版社

TONGJI UNIVERSITY PRESS

## 内容提要

本教材根据普通高等院校理工科数学课程教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势，由长期从事大学数学教学的一线教师执笔编写. 全书全面而系统地讲解大学数学的知识，分上、下两册，共十章内容. 上册包括向量代数与空间解析几何，函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，无穷级数，多元函数微分学与多元函数积分学；下册包括常微分方程、概率统计以及线性代数等内容. 每章均配备了适量的例题和一定数量的习题.

本教材编写时，在保持传统数学教材的结构严谨、逻辑性强等风格的基础上，积极吸收近年来同类教材改革的成功经验，结合作者教学实践中的切身体会以及历年考研数学试题的命题要求，加强了章节内容间的联系和融合，对传统高等数学教材的内容进行了必要的精简和梳理，并力求做到语言准确、系统完整、例证适当、通俗易懂、好教易学.

本教材可作为普通高等院校理工科非数学专业大学数学的教学用书，也可供任课教师和相关专业人员参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

大学数学. 下册/陈光曙主编. —上海：同济大学出版社，2007.2

面向新世纪课程教材. 理工类

ISBN 978-7-5608-3398-9

Ⅰ. 大… Ⅱ. 陈… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 158032 号

# 大学数学(理工类)下册

陈光曙 主编

陈学华 夏海峰 徐新亚 副主编

责任编辑 曹 建 责任校对 谢惠云 封面设计 李志云

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021－65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 17

印 数 1—5 100

字 数 340 000

版 次 2007 年 2 月第 1 版 2007 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-3398-9/O・295

定 价 24.00 元

# 前　言

本教材根据普通高等院校理工科数学课程的教学要求和当前高等院校高等数学教育教学改革的形势，由长期从事大学数学教学的一线教师执笔编写而成．全书包括向量代数与空间解析几何、微积分学、常微分方程、概率论与数理统计、线性代数等内容．

在编写过程中，我们在力求保持传统高等数学教材的结构严谨、逻辑性强等风格的基础上，积极吸收了近年来同类教材改革的成功经验，结合我们自己在教学实践中的切身体会以及历年研究生入学考试数学考试的命题要求，在各章节内容的联系与融合方面下了一番功夫，力求做到语言准确、系统完整、例证适当、通俗适用．在每一章最后都配备了适量的习题，分为 A，B 两类．其中 A 类为基本题，通过练习，以掌握和巩固所学知识的基本概念、基本性质、基本方法，建议将 A 类习题作为作业来完成．B 类习题是提高题，来源于近几年的数学考研真题，有一定的难度和技巧，建议教师选择部分 B 类习题讲解，同时，也建议学生将 B 类习题作为复习时的练习、自测题．我们还将答案附于书后，以帮助学生检测学习效果和巩固相关知识．

本教材可作为普通高等院校理工科非数学专业高等数学的教学用书，也可供任课教师参考．

本教材分上、下两册，共十章内容．上册内容为向量代数与空间解析几何，函数、极限与连续，一元函数微分学，一元函数积分学，无穷级数，多元函数微分学，多元函数积分学；下册内容为常微分方程、概率统计、线性代数．其中，第一章、第四章、第九章由陈光曙执笔；第二章、第三章、第八章由徐新亚执笔；第五章、第六章、第七章由夏海峰执笔；第十章由陈学华执笔．全书最后由陈光曙统稿．在编写过程中，得到了阎超栋、王管等老师的大力支持，在此表示感谢．

浙江大学邵剑教授、李大侃教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，谨此表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，加上时间仓促，书中的疏漏、错误和不足之处难免，恳请各位专家、同行和广大读者批评指正．

编　者

2007 年 1 月

# 目　　次

# 第八章　常微分方程

在自然科学,特别是工程技术的实际问题中,确定变量间的函数关系无疑是十分重要的.在有些问题中,直接找出这种变量间的函数关系很难凑效,但比较容易确定变量与其导数或微分之间的关系式,这就是所谓的微分方程.通过解这种方程,可得出所要求的函数关系.因此,微分方程问题有着广泛的应用.

## 第一节　微分方程的概念

先看两个实例.

**例 1**　已知一曲线在其上任一点处切线的斜率等于该点横坐标的平方,且曲线通过点(0,1),求此曲线的方程.

**解**　设所求的曲线方程为 $y=y(x)$,由题意得

$$\frac{dy}{dx}=x^2.$$

此外,未知函数 $y=y(x)$ 还应满足条件 $y(0)=1$.

对上式两端取不定积分,得

$$y=\frac{1}{3}x^3+C,$$

式中,$C$ 为常数.将 $y(0)=1$ 即 $x=0$ 时,$y=1$ 代入,得

$$1=0+C,$$

即 $C=1$.因此,所求曲线的方程为

$$y=\frac{1}{3}x^3+1.$$

**例 2**　一质量为 $m$ 的物体,从距地面 $h_0$ 处自由下落,求物体的运动规律(即高度与时间的关系).

**解**　设在时刻 $t$ 时,物体的高度为 $h=h(t)$.由二阶导数的物理意义和牛顿第二定律知

$$m\frac{d^2h}{dt^2}=-mg \quad 或 \quad \frac{d^2h}{dt^2}=-g, \tag{8.1.1}$$

式中，$g$ 是重力加速度，负号表示 $h$ 的增加方向与重力加速度的方向正好相反.由题意中容易看出，未知函数 $h=h(t)$ 还应满足以下条件：

$$h(0)=h_0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0. \tag{8.1.2}$$

式(8.1.1)两端对 $t$ 积分，得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1,$$

再积分一次，得

$$h=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2.$$

把条件式(8.1.2)代入上面两式，得

$$C_1=0, \quad C_2=h_0.$$

因此，物体运动的规律是

$$h=h_0-\frac{1}{2}gt^2.$$

物体落到地面，$h=0$，此时，$h_0-\frac{1}{2}gt^2=0$，即得物体整个下落过程所用时间为

$$t=\sqrt{\frac{2h_0}{g}},$$

所以物体的运动规律为

$$h=h_0-\frac{1}{2}gt^2, \quad t\in\left[0,\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\right].$$

从上面两个例子，我们容易归纳出微分方程的基本概念.

**定义 8.1.1** 含有未知函数的导数或微分的等式称为**微分方程**.未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**；未知函数为多元函数的微分方程称为**偏微分方程**.微分方程中所出现的未知函数的导数的最高阶数称为**微分方程的阶**.满足微分方程的函数称为微分方程的**解**.求一个微分方程的解的过程称为**解微分方程**.

在本章中，我们只讨论常微分方程.为了叙述简便，有时将常微分方程简称为微分方程或方程.

例如，$\frac{dy}{dx}=x^3$ 与 $(x+y)dx+(x-y)dy=0$ 都是一阶常微分方程，$\frac{d^2h}{dt^2}=-g$ 与 $x^2y''+y'-4y=2x$ 都是二阶常微分方程，而 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 是二阶偏微分方程.

**例 3** 验证 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是微分方程 $y''+y=0$ 的解(其中 $C_1$，$C_2$ 为任意常数). 若已知 $y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$，试确定 $C_1$，$C_2$ 的值.

**解** 对 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 求导，得

$$y'=C_1\cos x-C_2\sin x,$$

$$y''=-C_1\sin x-C_2\cos x.$$

将 $y$，$y''$ 代入方程 $y''+y=0$，得恒等式，即 $y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 满足所给方程，因此是解. 再由 $y(0)=1$ ，$y'(0)=\frac{1}{2}$ 得

$$\begin{cases}1=C_1\cdot 0+C_2\cdot 1,\\ \frac{1}{2}=C_1\cdot 1-C_2\cdot 0\end{cases}$$

或

$$C_1=\frac{1}{2},\quad C_2=1,$$

对应的解为 $y=\frac{1}{2}\sin x+\cos x$.

**定义 8.1.2** 如果常微分方程的解中含有独立的任意常数(这里的"独立"是指不能将不同的常数合并)，且独立的任意常数的个数与方程的阶相同，则这样的解称为方程的**通解**；不含一个任意常数的解称为**特解**. 由通解确定特解时，通常需要一些函数值和导数值，这些已知的函数值和导数值称为方程的**初值**或**初始条件**，把微分方程和其初值合到一起，称为微分方程的**初值问题**.

$n$ 阶微分方程的初值问题的一般形式为

$$\begin{cases}F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0,\\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,y''(x_0)=y_2,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}\end{cases}$$

或

$$\begin{cases}y^{(n)}=f(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n-1)}),\\ y(x_0)=y_0,y'(x_0)=y_1,y''(x_0)=y_2,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}.\end{cases}$$

前者称为 $n$ 阶**隐方程**的初值问题，后者称为 $n$ 阶**显方程**的初值问题.

例如，在例 1 中，$y=\frac{1}{3}x^3+C$ 是方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2$ 的通解，而 $y=\frac{1}{3}x^3+1$ 是满足初始条件 $y(0)=1$ 的特解，或称 $y=\frac{1}{3}x^3+1$ 是初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2,\\ y(0)=1\end{cases}$$

的解. 在例 3 中，$y=C_1\sin x+C_2\cos x$ 是二阶方程 $y''+y=0$ 的通解，而 $y=\frac{1}{2}\sin x+\cos x$ 是满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 的特解或初值问题

$$\begin{cases}y''+y=0,\\ y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}\end{cases}$$

的解.

微分方程的阶数与它的通解中含有的独立任意常数的个数以及初始条件的个数，这三者是相同的.

# 第二节　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0 \quad \text{或} \quad y'=f(x,y).$$

后者也可以写成微分形式或称**对称形式**

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0.$$

## 一、可分离变量的方程

**定义 8.2.1**　如果一个一阶微分方程可以化为

$$g(y)\mathrm{d}y=h(x)\mathrm{d}x \tag{8.2.1}$$

的形式，则称这个方程是**可分离变量的微分方程**.

**定理 8.2.1**　设 $h(x)$和 $g(y)$连续，且 $g(y)\neq 0$，则可分离变量的微分方程(8.2.1)的通解为

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int h(x)\mathrm{d}x+C, \tag{8.2.2}$$

且满足初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解为

$$\int_{y_0}^{y} g(y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} h(x)\mathrm{d}x. \tag{8.2.3}$$

**证明** 先证方程(8.2.2)是可分离变量方程(8.2.1)的通解，设 $y=y(x)$，则方程(8.2.1)变成

$$g[y(x)]y'(x)\mathrm{d}x=h(x)\mathrm{d}x.$$

上式两端积分，即得

$$\int g[y(x)]y'(x)\mathrm{d}x=\int h(x)\mathrm{d}x+C,$$

即

$$\int g(y)\mathrm{d}y=\int h(x)\mathrm{d}x+C.$$

这说明方程(8.2.1)的解 $y=y(x)$ 一定满足方程(8.2.2). 反之，设 $y=y(x)$ 是由方程(8.2.2)确定的隐函数，令

$$F(x,y,C)=\int g(y)\mathrm{d}y-\int h(x)\mathrm{d}x-C,$$

由隐函数求导法知

$$y'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{h(x)}{g(y)} \quad (g(y)\neq 0),$$

即

$$g(y)\mathrm{d}y=h(x)\mathrm{d}x.$$

这说明由方程(8.2.2)确定的含有任意常数的隐函数是方程(8.2.1)的通解.

再证式(8.2.3)是方程(8.2.1)的特解. 由于式(8.2.2)是方程(8.2.1)的通解，将式(8.2.2)记为

$$G(y)=H(x)+C,$$

式中，$G(y)=\int g(y)\mathrm{d}y$，$H(x)=\int h(x)\mathrm{d}x$. 用 $y(x_0)=y_0$ 代入，得

$$G(y_0)=H(x_0)+C,$$

从而，

$$C=G(y_0)-H(x_0).$$

故初值问题

$$\begin{cases} G(y)=H(x)+C, \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

的解为

$$G(y)=H(x)+G(y_0)-H(x_0). \tag{8.2.4}$$

又由牛顿-莱布尼兹公式知

$$\int_{y_0}^{y} g(y)\mathrm{d}y=G(y)-G(y_0), \quad \int_{x_0}^{x} h(x)\mathrm{d}x=H(x)-H(x_0),$$

代入式(8.2.4),即得

$$\int_{y_0}^{y} g(y)\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x} h(x)\mathrm{d}x.$$

**例 1** 求解初值问题

$$\begin{cases} y'=3(x-1)^2(1+y^2), \\ y(1)=1. \end{cases}$$

**解** 这是一个可分离变量的方程.分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=3(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

两端积分,得通解为

$$\arctan y=(x-1)^3+C,$$

将 $y(1)=1$ 代入通解,得 $C=\frac{\pi}{4}$,故所求初值问题的解为

$$\arctan y=(x-1)^3+\frac{\pi}{4}.$$

**例 2** 求微分方程 $y'=4x\sqrt{y}$的通解.

**解** 分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{2\sqrt{y}}=2x\mathrm{d}x,$$

两端积分,得$\sqrt{y}=x^2+C$,故所给方程的通解为

$$y=(x^2+C)^2.$$

**注意** 在本例中,方程还有一个解 $y=0$.它不含在通解中,即无论 $C$ 取什么

值都得不到 $y=0$. 这样的解称为微分方程的奇解.

**例 3** 已知跳伞运动员从高空跳下后,所受空气阻力与下落的速度成正比,求下落速度与时间的关系.

**解** 设下落速度 $v=v(t)$,当 $t=0$ 时,$v(0)=0$. 由于在下落过程中,运动员同时受到重力和阻力的作用,重力的大小为 $mg$,方向与 $v$ 一致,阻力大小为 $kv$ ($k>0$ 是常数),方向与 $v$ 相反,于是,运动员所受外力为 $F=mg-kv$.

根据牛顿第二定律 $F=ma$,得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=mg-kv,$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}v}{mg-kv}=\frac{\mathrm{d}t}{m},$$

对上式两端积分,注意到 $mg-kv>0$,有

$$-\frac{1}{k}\ln(mg-kv)=\frac{t}{m}+C_1 \quad 或 \quad mg-kv=\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t-kC_1},$$

得通解为

$$v=\frac{mg}{k}+C\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} \quad \left(C=-\frac{\mathrm{e}^{-kC_1}}{k}\right).$$

将初始条件 $v(0)=0$ 代入,得 $C=-\dfrac{mg}{k}$,于是所求特解为

$$v=\frac{mg}{k}(1-\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}).$$

从本题的解中不难看出,随着时间 $t$ 的增大,速度 $v$ 逐渐接近常数,且不超过$\dfrac{mg}{k}$. 这就是说,跳伞开始后,过一段时间,下落的速度就接近于匀速运动.

**例 4** 物体冷却的速度与物体的温度和环境温度之差成正比,已知在室温20℃时,某一物体在 20min 内从 100℃冷却到 60℃,求该物体的温度 $T$ 和时间 $t$ 的函数关系;经过多长时间它将冷却到 30℃?

**解** 由题意得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-20) \quad (k>0),$$

分离变量,得

$$\frac{dT}{T-20}=kdt,$$

两端积分,注意到 $T>20$,得

$$\ln(T-20)=kt+C_1,$$

故通解为

$$T=20+Ce^{kt}\quad(C=e^{C_1}).$$

将 $T(0)=100$,$T(20)=60$ 代入通解得

$$\begin{cases}100=20+C,\\60=20+Ce^{20k},\end{cases}$$

解出 $C=80$,$k=-\frac{\ln 2}{20}$,于是,物体的冷却规律为

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}}.$$

令 $T=30℃$,有

$$30=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},\quad 即\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{20}},$$

得 $\frac{t}{20}=3$, 即 $t=60(\mathrm{min})$.

因此,物体从 100℃冷却到 30℃需要 60min.

## 二、齐次方程

**定义 8.2.2** 如果一阶微分方程可以化成

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\tag{8.2.5}$$

的形式,则称这类方程为齐次方程.

齐次方程虽然不是可分离变量的微分方程,但通过变量替换

$$u=\frac{y}{x}\quad 或\quad y=xu,$$

齐次方程可化为可分离变量的微分方程. 事实上,由于 $u$ 是 $x$ 的函数,对 $y=xu$ 求导,得

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入齐次方程(8.2.5),得

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u) \quad 或 \quad \frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

**例 5** 求微分方程$(x^3+y^3)dx=3xy^2dy$的通解.

**解** 原方程可以写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{3xy^2}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^3}{3\left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

这是齐次方程,令$u=\frac{y}{x}$,则得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^3}{3u^2} \quad 或 \quad x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^3}{3u^2}-u=\frac{1-2u^3}{3u^2},$$

分离变量,得

$$\frac{3u^2}{1-2u^3}du=\frac{dx}{x}.$$

两端积分,得

$$-\frac{1}{2}\ln(1-2u^3)=\ln x-\frac{1}{2}\ln C,$$

即$x^2(1-2u^3)=C$.将$u=\frac{y}{x}$代入,得原方程的通解为

$$x^3-2y^3=Cx.$$

**注意** 在解微分方程中,常常取$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+\ln C$,而不是$\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$,其原因是在实践中,被积函数的取值范围是可以确定的,如例3、例4,而在对方程解的化简中,$\ln C$比$C$更方便.

**例 6** 求微分方程

$$y(1+e^{-\frac{x}{y}})dx+(y-x)dy=0$$

的通解.

**解** 原方程可以写成

$$\frac{dx}{dy}=\frac{x-y}{y(1+e^{-\frac{x}{y}})}=\frac{\frac{x}{y}-1}{1+e^{-\frac{x}{y}}}.$$

这是一个齐次方程，令 $u=\frac{x}{y}$，即 $x=yu$，对 $y$ 求导，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$

则原方程化为

$$u+y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{u-1}{1+\mathrm{e}^{-u}} \quad 或 \quad y\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{u-1}{1+\mathrm{e}^{-u}}-u=-\frac{\mathrm{e}^u+u}{\mathrm{e}^u+1},$$

分离变量，得

$$-\frac{\mathrm{e}^u+1}{\mathrm{e}^u+u}\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

两端积分，得

$$-\ln(\mathrm{e}^u+u)=\ln y-\ln C, \quad 即\ y(\mathrm{e}^u+u)=C.$$

把 $u=\frac{x}{y}$ 代入原方程中，得通解为

$$x+y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}=C.$$

## 三、一阶线性方程

**定义 8.2.3** 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x) \tag{8.2.6}$$

的微分方程称为**一阶线性方程**. 当 $Q(x)\equiv 0$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0 \tag{8.2.7}$$

时，称方程(8.2.7)为**齐次方程**，当 $Q(x)\neq 0$ 时，则称一阶线性方程(8.2.6)为**非齐次方程**，并称方程(8.2.7)为方程(8.2.6)的对应齐次方程.

一阶齐次线性方程(8.2.7)是可分离变量方程，分离变量，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x.$$

两端积分，得

$$\ln y=-\int P(x)\mathrm{d}x+C_1,$$

故齐次方程(8.2.7)的通解为

$$y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}, \quad 其中 C=e^{C_1}. \tag{8.2.8}$$

下面介绍非齐次方程(8.2.6)的解法.由于方程(8.2.8)是齐次线性方程(8.2.7)的通解,猜想非齐次线性方程(8.2.6)有解

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{8.2.9}$$

式中,$C(x)$是待定函数.为了确定$C(x)$,将式(8.2.9)代入方程(8.2.6)中,得

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} + P(x)C(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x),$$

即

$$C'(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x) \quad 或 \quad C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C,$$

故非齐次线性方程(8.2.6)的通解为

$$y = \left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}. \tag{8.2.10}$$

注意到非齐次方程的通解是由其对应的齐次方程的通解通过将任意常数$C$变换成待定函数$C(x)$得到的,这种方法称为**常数变易法**.

今后,在求解一阶非齐次线性方程时,可以求其对应的齐次方程的通解,再通过常数变易法求出所给方程的通解;也可以将$P(x)$,$Q(x)$代入式(8.2.10)直接求出通解,即将式(8.2.10)直接作为一个求通解的公式.

**例7** 求微分方程$xy'-y=x^2\cos x$的通解.

**解法1**(常数变易法) 所给方程的对应齐次方程为

$$xy'-y=0,$$

分离变量,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

积分得

$$y=Cx.$$

设原方程的通解为$y=xC(x)$,则$y'=C(x)+xC'(x)$,代入原方程,得

$$x[C(x)+xC'(x)]-xC(x)=x^2\cos x,$$

即

$$x^2C'(x)=x^2\cos x \quad 或 \quad C'(x)=\cos x,$$

得

$$C(x)=\sin x+C.$$

于是，所给方程的通解为

$$y=x(\sin x+C).$$

解法 2(公式法) 将所给方程化成标准形式

$$y'-\frac{1}{x}y=x\cos x,$$

则 $P(x)=-\frac{1}{x}$，$Q(x)=x\cos x$，由公式(8.2.10)得所求通解为

$$y=\left(\int x\cos x e^{-\int\frac{dx}{x}}dx+C\right)e^{\int\frac{1}{x}dx}=\left(\int x\cos x e^{-\ln x}dx+C\right)e^{\ln x}$$

$$=\left(\int\cos x dx+C\right)x=x(\sin x+C).$$

**例 8** 求方程 $y\ln y dx+(x-\ln y)dy=0$ 的通解.

**解** 如果把 $y$ 看成函数，则得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{\ln y-x}.$$

它不是线性方程，不好求解. 若把 $y$ 看成自变量，把 $x$ 看成函数，则方程可写成

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1}{y\ln y}\cdot x=\frac{1}{y},$$

这是线性方程. $P(y)=\frac{1}{y\ln y}$，$Q(y)=\frac{1}{y}$，从而得原方程的通解为

$$x=\left(\int\frac{1}{y}e^{\int\frac{dy}{y\ln y}}dy+C\right)e^{-\int\frac{dy}{y\ln y}}=\left(\int\frac{1}{y}e^{\ln\ln y}dy+C\right)e^{-\ln\ln y}$$

$$=\left(\int\frac{1}{y}\ln y dy+C\right)\frac{1}{\ln y}=\frac{1}{\ln y}\left(\frac{1}{2}\ln^2 y+C\right).$$

## 四、伯努利方程

**定义 8.2.4** 形如

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \quad (n\neq 0,1)$$