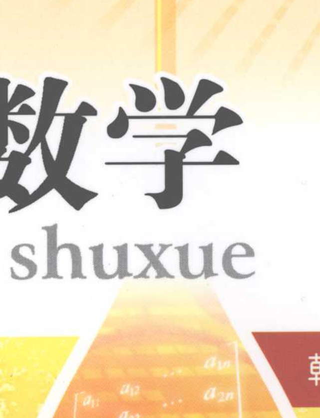
高等教育"十一五"规划教材

高职高专公共课教材系列

高等数学

Gaodeng shuxue



韩田君　郑丽　主编

科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共课教材系列

高 等 数 学

主　编　韩田君　郑　丽
主　审　王志勇
副主编　郑克敏　徐爱华　韩建华
编　委　陈　宇　王庭瑛　王秀海　李　亮

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书共分八章，内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及应用、微分方程、无穷级数和用 Mathematica 软件解数学问题。每章都有相应的习题，附录中提供了各章习题的参考答案。

本书可以作为高职高专院校公共基础课教材，也可作为工程技术人员学习高等数学知识的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/韩田君，郑丽主编. —北京：科学出版社，2007
（高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共课教材系列）
ISBN 978-7-03-019327-8

Ⅰ.高… Ⅱ.①韩…②郑… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 113583 号

责任编辑：沈力匀 赖文华/责任校对：刘彦妮
责任印制：吕春珉/封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2007 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2007 年 8 月第一次印刷 印张：12 1/4
印数：1—3 000 字数：287 000

定价：17.00 元

前　　言

本书根据教育部制定的“高职高专数学教学基本要求”，由从事多年高职高专高等数学教学工作经验的教师执笔编写而成．本书注重概念的直观性和方法的启发性，突出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的思想，内容通俗易懂，由浅入深，注重应用，体现了高职高专教育特色．

全书系统讲解高职高专高等数学的基础知识和基本方法，内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理及导数应用、不定积分、定积分及应用、微分方程、无穷级数和用 Mathematica 软件解数学问题．每章都有相应的习题，附录中提供了各章习题的参考答案．

用 Mathematica 软件解数学问题这一章，系统的给出了用 Mathematica 软件求解高等数学各种问题的方法，包括求解函数图形、极限、导数、积分、微分方程等．

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为高职高专各专业的高等数学课程的教材使用．也可作为工程技术人员、“专接本”、“专升本”人员学习高等数学知识的教材或教师教学的参考书．

本书前五章和第八章内容的基本教学学时约 70 学时．有关专业需讲授微分方程或无穷级数内容的可适当增加学时．

参加本书编写的有：韩田君、王秀海、郑丽、郑克敏、陈宇、徐爱华、韩建华、王庭瑛、李亮．王志勇教授对本书的编写给出了很多指导性的建议，这对我们本书的编写受益匪浅．

由于作者水平所限，时间也比较仓促，本书难免有不足、遗漏和错误之处，衷心希望广大读者不吝指正，以使本书在教学实践之中不断完善．

目　　录

第1章 函数与极限

高等数学是以变量为研究对象，而函数反映了变量间所蕴含的关系．微积分是高等数学的主要内容，它主要研究函数的一些局部和整体的性态．

本章先介绍函数的概念、性质及最基本的函数类——初等函数，再给出极限的概念、性质及运算，并引入了函数的连续性概念．这些都是学习本课程所需掌握的基础知识．

第一节 函 数

一、集合

1. 集合

集合是指具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的事物称为该集合的元素．集合通常用大写的拉丁字母，如 A，B，M，…表示；其元素则常用小写的拉丁字母，如 a，b，t，…表示．

如果 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$．

如果集合 M 只包含有限个元素，则称 M 为有限集；否则称为无限集．而不含有任何元素的集合称之为空集，用符号“$\varnothing$”表示．

集合常用的两种表达方式有两种：一种是列举法，即将集合中的所有元素列举出来，如由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A 可以表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

另一种是描述法，即用刻画集合中全体元素的性质来说明，如

$$M=\{x\mid x\text{所具有的特性}\}.$$

数学中通常用 N 表示由全体自然数组成的集合，用 Z 表示由全体整数组成的集合，

用 Q 表示由全体有理数组成的集合，而全体正有理数组成的集合表示为 Q^+．由全体实数组成的集合记作 R．

集合之间最基本的关系是包含关系，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的子集，记作 $A\subset B$（A 包含于 B）或 $B\supset A$（B 包含 A）．如 $N\subset Z\subset Q\subset R$．

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合．如果没有特别说明，以后提到的数都是实数．

2. 区间及邻域

区间和邻域是用得最多的数集．

设 $a,b\in R$，且 $a<b$，则数集

$$\{x\,|\,a<x<b\}.$$

称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

如图 1-1（a），这里注意，$a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$．数集 $\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a,b 为端点的闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}.$$

另外，还有以 a,b 为端点的两个半开半闭区间

$$(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}\text{ 和 }[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}.$$

以上区间都是有限区间，数 $b-a$ 是这些区间的长度．从数轴上看，这些有限区间是长度有限的线段（图 1-1）．

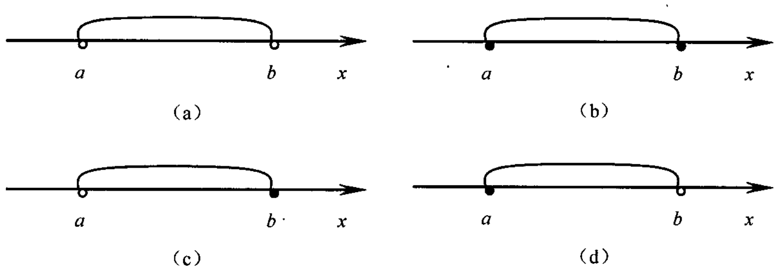


图 1-1

除此以外，还有无限区间．为了方便起见，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则无限半开区间及开区间如下：

$$(a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}.$$

$$(-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}.$$

这些区间在数轴上表示为长度为无限的半直线（图 1-2）．

全体实数集合 R 也可以用无限开区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示．

需要注意，$-\infty$、$+\infty$ 只是用来表示无限性的记号，而并非确定的数．

以后若遇到所做论述对不同类型的区间（无限、有限，开区间、闭区间、半开区间）

都适用，可以用“区间 I ”代表各种类型的区间．

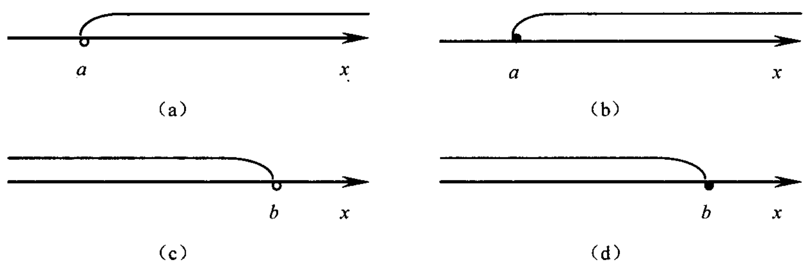


图 1-2

除了区间的概念外，为了阐述函数的局部性态，还经常用到邻域的概念，它表示某点附近的所有点的集合．设 a 与 δ 是两个实数，$\delta>0$，数集

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta\}.$$

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}.$$

点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径．并且可以看出，$U(a,\delta)$ 也就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，如图 1-3（a）．

$U(a,\delta)$ 表示与 a 的距离小于 δ 的一切点的全体．而有时用到的邻域需要把邻域中心去掉，将 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉后，称为点 a 的去心 δ 邻域（图 1-3（b）），记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}.$$

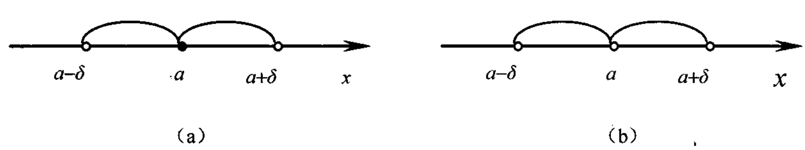


图 1-3

二、函数概念

在同一自然现象或社会现象中，一般会有几个变量在同时变化着，这些变量的变化并不是孤立的，而是相互联系并遵循一定的规则．函数就是描述这种联系的一个规则．

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集，如果对于每个数 $x\in D$，变量按照一定的法则总有唯一确定的 y 值和它对应，则称 y 是 x 的函数，记作

$$y=f(x).$$

其中x叫做自变量，y叫做因变量．x的变化范围D叫做函数的定义域，对应的y值的变化范围叫做函数的值域，记作

$$W=\{y\mid y=f(x),x\in D\}.$$

要注意的是，记号f和$f(x)$的含义是不同的：前者表示自变量x与因变量y之间的函数对应关系，后者表示与自变量x对应的函数值．但为了方便，习惯上也常用$f(x)$或$y=f(x)$来表示函数．

函数的记号f也可以用其他的字母来表示，如g，h，F，φ等，有时还直接用因变量的记号来表示函数，即$y=y(x)$，这时字母y即表示因变量，又表示函数．

由函数的定义可以看出，函数概念有两个要素：定义域和对应法则．如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，则这两个函数就是相同的，否则是不同的．

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的．而在数学中，函数的定义域就是自变量所能取得是算式有意义的一切实数的集合，也就是函数的自然定义域．

函数的表示方法一般有三种：公式法，图示法，表格法．公式法也叫解析法，常用于理论研究，是我们用得最多的方法．

三、函数举例

例 1.1 函数$y=x^2$．

定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$W=[0,+\infty)$，图形为抛物线（图 1-4）．

例 1.2 函数$y=x^3$．

定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$W=(-\infty,+\infty)$，图形为立方抛物线（图 1-5）．

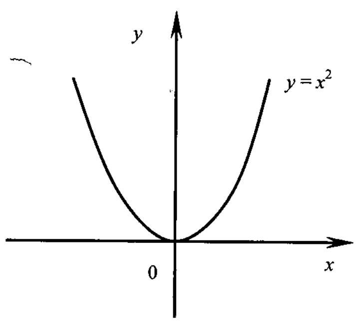


图 1-4

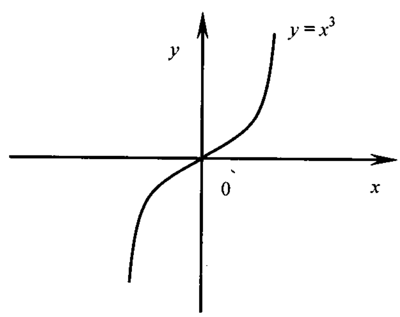


图 1-5

例 1.3 函数 $y=\dfrac{1}{x}$．

定义域D和值域W都是除去数0之外的全体实数，图形为等轴双曲线（图 1-6）．

例 1.4 函数 $y=3$．

定义域$D=(-\infty,+\infty)$，值域$W=\{3\}$，图形为一条平行于x轴的直线（图 1-7）．

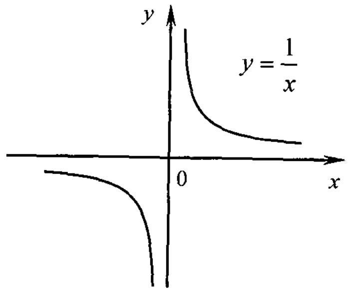


图 1-6

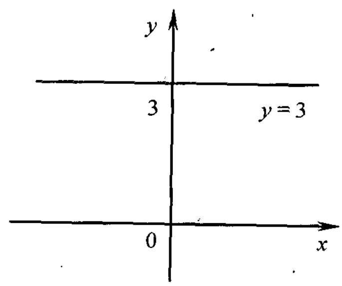


图 1-7

例 1.5　函数 $f(x)=|x|=\begin{cases} x, & 当 x\geqslant 0 \\ -x, & 当 x<0 \end{cases}$.

这是绝对值函数，定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$，图形如图 1-8 所示.

例 1.6　符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & 当 x>0 \\ 0, & 当 x=0 \\ -1, & 当 x<0 \end{cases}$.

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，图形如图 1-9 所示. 对于任何实数 x，下列关系式成立：

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|.$$

如，$\operatorname{sgn}(-2)\cdot|-2|=-1\cdot 2=-2$.

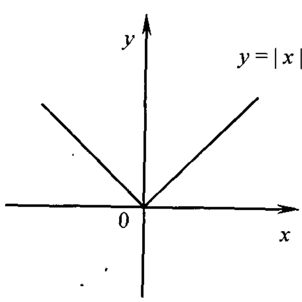


图 1-8

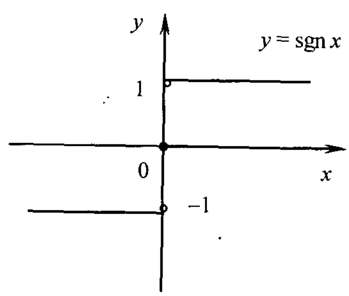


图 1-9

例 1.7　分段函数：在自变量的不同变化范围中，用不同的式子表示的函数.

（1）$f(x)=\begin{cases} 2x-1, & x>0 \\ x^2-1, & x\leqslant 0 \end{cases}$（图 1-10）；

（2）$f(x)=\begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x, & x>1 \end{cases}$（图 1-11）.

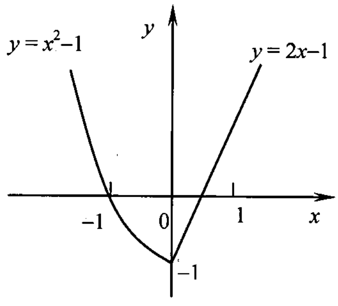


图 1-10

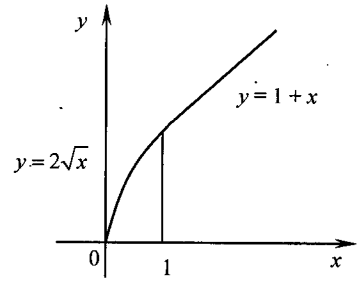


图 1-11

四、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$．如果存在正数 M，使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M .$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

显然，如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，是上述不等式成立的常数 M 不是唯一的，有界性体现在常数 M 的存在性.

函数的有界性依赖于区间，例如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内是有界的，而在区间 $(0,1)$ 内是无界的.

函数的有界性还可以等价的表述为：如果存在正数 M_1，M_2 使得对于任意 $x\in I$，恒有

$$M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2 .$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，M_1 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的下界，M_2 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的上界.

2. 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$．如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2) .$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的（简称递增）；如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)>f(x_2) .$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的（简称递减）.

单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数．使函数保持单调的区间叫做单调区间．

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的，可以用↑表示；单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的，可以用↓表示．

如 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的．$y=x^2$ 定义域为 $(-\infty,+\infty)$，而 $(-\infty,0)$ 是它的单调减区间，$(0,+\infty)$ 是它的单调增区间．

3．函数的奇偶性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称（即若 $x\in D$，则 $-x\in D$）．如果对于任意 $x\in D$，

$$f(-x)=-f(x)\,.$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为奇函数；如果对于任意 $x\in D$，

$$f(-x)=f(x)\,.$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为偶函数．

例如，$y=x^3$，$y=\sin x$，$y=\tan x$ 等都是奇函数；$y=x^2$，$y=\cos x$ 等都是偶函数．

奇函数的图形是关于原点中心对称的，偶函数的图形是关于 y 轴对称的．

容易证明，两个奇函数之和仍是奇函数，两个偶函数之和仍是偶函数，两个奇函数之积是偶函数，两个偶函数之积也是偶函数，一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数．

4．函数的周期性

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个不为零数 T，使得对于定义域 D 内的任意 x 值，$x\pm T$ 仍在 D 内，且 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 为函数的周期．而习惯上，函数的周期是指使 $f(x)=f(x+T)$ 成立的最小正数，即最小正周期．

如 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的周期函数．

五、反函数

在函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的，可以把任意一个变量看作是自变量或因变量．

如某种商品的单价为 p，销售量为 x，则销售总收入 R 是 x 的函数

$$R=px\,.$$

此时 x 是自变量．而如果已知总收入 R，反过来求销售量 x，则有

$$x=\frac{R}{p}\,.$$

此时 R 是自变量．这是我们称后一函数是前一函数的反函数．

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W．如果对于 W 中的每一个 y，

都有唯一的 $x \in D$，使 $f(x)=y$，此时得到一个定义 W 上的新函数，此函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$，而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

由定义 1.2 可见，反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域是直接函数的值域，反函数的值域是直接函数的定义域.

函数的实质在于它的定义域和对应法则，而用什么字母表示自变量和因变量是无关紧要的. 习惯上常以 x 表示自变量，y 表示因变量，因此常常对调 x，y，把反函数 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$. 今后提到的反函数，一般就是指这种经过改写的反函数.

如 $y=10^x$ 的反函数是 $x=\lg y$，或改写成 $y=\lg x$.

一般来讲，求 $y=f(x)$ 的反函数要先从中解出 x，再交换 x，y 即可.

并不是所有的函数都存在反函数，但是在某区间上单调的函数在该区间上一定存在反函数.

由于 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换，所以他们的图形关于直线 $y=x$ 对称. 如图 1-12.

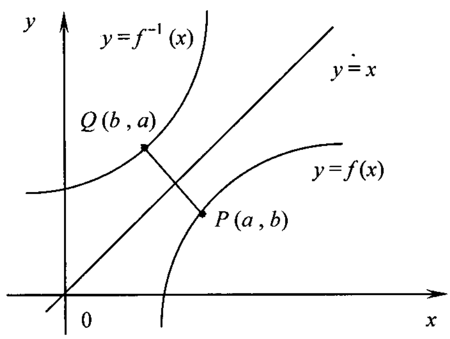


图 1-12

六、复合函数

我们来先看一个例子. 设

$$y=u^3,\quad u=1+2x.$$

把 $u=1+2x$ 代入 $y=u^3$ 可以得到函数

$$y=(1+2x)^3,$$

这个函数就是由 $y=u^3$ 及 $u=1+2x$ 复合而成的复合函数.

一般的，若函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D，而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z；若 $D\cap Z\neq\varnothing$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为复合函数. 其中 x 为自变量，y 为因变量，u 为中间变量.

例如，$y=\sqrt{1-x^2}$ 可以看作由 $y=\sqrt{u}$ 及 $u=1-x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $[-1,1]$，是 $u=1-x^2$ 定义域 $(-\infty,+\infty)$ 的子集；$y=\arctan x^2$ 可以看作由 $y=\arctan u$ 及 $u=x^2$ 复合而成的，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，也就是 $u=x^2$ 的定义域.