



高等教育“十一五”规划教材
高职高专公共课教材系列

高等数学

Gaodeng shuxue

韩田君 郑丽 主编



科学出版社
www.sciencep.com

高等教育“十一五”规划教材

高职高专公共课教材系列

高等数学

主 编	韩田君	郑 丽		
主 审	王志勇			
副主编	郑克敏	徐爱华	韩建华	
编 委	陈 宇	王庭瑛	王秀海	李 亮

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书共分八章,内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及应用、微分方程、无穷级数和用 Mathematica 软件解数学问题。每章都有相应的习题,附录中提供了各章习题的参考答案。

本书可以作为高职高专院校公共基础课教材,也可作为工程技术人员学习高等数学知识的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/韩田君,郑丽主编. —北京:科学出版社,2007

(高等教育“十一五”规划教材·高职高专公共课教材系列)

ISBN 978-7-03-019327-8

I. 高… II. ①韩…②郑… III. 高等数学—高等学校—教材 IV. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 113583 号

责任编辑:沈力匀 赖文华/责任校对:刘彦妮

责任印制:吕春珉/封面设计:东方人华平面设计部

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印装有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2007 年 8 月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2007 年 8 月第一次印刷 印张:12 1/4

印数:1—3 000 字数:287 000

定价:17.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换<环伟>)

·销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62135235 (VP04)

前 言

本书根据教育部制定的“高职高专数学教学基本要求”，由从事多年高职高专高等数学教学工作经验的教师执笔编写而成。本书注重概念的直观性和方法的启发性，突出了“以应用为目的，以必需、够用为度”的思想，内容通俗易懂，由浅入深，注重应用，体现了高职高专教育特色。

全书系统讲解高职高专高等数学的基础知识和基本方法，内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理及导数应用、不定积分、定积分及应用、微分方程、无穷级数和用 Mathematica 软件解数学问题。每章都有相应的习题，附录中提供了各章习题的参考答案。

用 Mathematica 软件解数学问题这一章，系统的给出了用 Mathematica 软件求解高等数学各种问题的方法，包括求解函数图形、极限、导数、积分、微分方程等。

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为高职高专各专业的高等数学课程的教材使用。也可作为工程技术人员、“专接本”、“专升本”人员学习高等数学知识的教材或教师教学的参考书。

本书前五章和第八章内容的基本教学学时约 70 学时，有关专业需讲授微分方程或无穷级数内容的可适当增加学时。

参加本书编写的有：韩田君、王秀海、郑丽、郑克敏、陈宇、徐爱华、韩建华、王庭瑛、李亮。王志勇教授对本书的编写给出了很多指导性的建议，这对我们本书的编写受益匪浅。

由于作者水平所限，时间也比较仓促，本书难免有不足、遗漏和错误之处，衷心希望广大读者不吝指正，以使本书在教学实践之中不断完善。

目 录

第1章 函数与极限.....	1
第一节 函数.....	1
一、集合.....	1
二、函数概念.....	3
三、函数举例.....	4
四、函数的特性.....	6
五、反函数.....	7
六、复合函数.....	8
七、初等函数.....	9
第二节 数列的极限.....	12
一、数列概念.....	12
二、数列极限的定义.....	13
三、收敛数列的基本性质.....	14
第三节 函数的极限.....	14
一、自变量趋于无穷大时函数的极限.....	15
二、自变量趋于有限值时函数的极限.....	16
三、单侧极限.....	16
四、有极限函数的基本性质.....	17
第四节 无穷小与无穷大.....	18
一、无穷小.....	18
二、无穷小的比较.....	19
三、无穷大.....	19
第五节 极限的运算法则.....	20
一、极限的四则运算.....	20
二、复合函数求极限.....	23
第六节 极限存在准则·两个重要极限.....	24
一、夹逼准则和重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	24
二、单调有界准则和重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	27
三、幂指函数的极限.....	29

第七节 函数的连续性	30
一、函数连续性的概念	30
二、函数的间断点	31
三、初等函数的连续性	32
第八节 闭区间上连续函数的性质	33
习题一	35
第2章 导数与微分	38
第一节 导数的概念	38
一、两个引例	38
二、导数的定义	39
三、导数的几何意义	42
四、可导和连续的关系定理	43
第二节 求导法则	44
一、函数和、差、积、商的求导法则	44
二、反函数的导数	45
三、基本求导公式	46
四、复合函数的求导法则	47
第三节 高阶导数	49
第四节 隐函数和由参数方程所确定的函数的导数	50
一、隐函数的导数	50
二、由参数方程所确定的函数的导数	53
第五节 函数的微分	54
一、微分的概念	54
二、微分的基本公式与运算法则	57
三、微分在近似计算上的应用	59
习题二	61
第3章 中值定理及导数的应用	64
第一节 中值定理	64
第二节 洛必达法则	66
第三节 函数的单调性、极值	67
一、函数单调性的判定	67
二、函数的极值	70
三、函数的最大、最小值	71
第四节 曲线的凹凸性与拐点	72
第五节 函数图形的描绘	75

习题三	77
第 4 章 不定积分	79
第一节 不定积分的概念和性质	79
一、原函数与不定积分的概念	79
二、基本积分表	81
三、不定积分的性质	82
第二节 换元积分法	83
一、第一类换元积分法	84
二、第二类换元积分法	89
三、基本积分表的补充	92
第三节 分部积分法	93
习题四	95
第 5 章 定积分及应用	98
第一节 定积分的概念及性质	98
一、定积分问题举例	98
二、定积分的定义	100
三、定积分的性质	102
第二节 微积分基本公式	103
一、积分上限的函数及其导数	103
二、微积分基本公式	104
第三节 定积分的计算	106
一、定积分的换元积分法	106
二、定积分的分部积分法	108
第四节 反常积分	109
第五节 定积分的应用	110
一、定积分应用的微元法	110
二、用定积分求平面图形的面积	111
三、定积分在物理上的应用	113
习题五	114
第 6 章 微分方程	116
第一节 基本概念	116
一、问题的提出	116
二、微分方程的定义	116
三、主要问题——求方程的解	117

第二节 一阶微分方程	117
一、可分离变量的微分方程	117
二、齐次方程	119
第三节 一阶线性微分方程	121
第四节 二阶常系数线性微分方程	124
一、二阶常系数齐次线性微分方程	124
二、二阶常系数非齐次线性微分方程	125
习题六	128
第 7 章 无穷级数	130
第一节 常数项级数的概念和性质	130
一、无穷级数的基本概念	130
二、无穷级数的基本性质	132
第二节 常数项级数的收敛性判别法	133
一、正项级数及其收敛性判别法	133
二、任意项级数及其收敛判别法	137
第三节 幂级数	138
一、幂级数及其收敛性	138
二、幂级数的性质	140
第四节 函数展开成幂级数	142
一、泰勒级数	142
二、函数的幂级数展开	142
第五节 傅立叶级数	145
一、三角级数、三角函数系的正交性	146
二、周期为 2π 的周期函数展开成傅立叶级数	147
三、正弦级数与余弦级数	151
四、定义在有限区间上的函数展开成傅立叶级数	153
习题七	155
第 8 章 用 Mathematica 软件解数学问题	157
第一节 基本知识	157
一、Mathematica 简介	157
二、数、变量、函数	158
第二节 基本代数运算	161
一、化简计算结果	161
二、常用的因式分解函数	162
三、解方程	164

第三节 函数做图	166
第四节 一元微积分的计算	168
一、极限运算	168
二、求导数	169
三、求函数的最大值和最小值	170
四、求不定积分	170
五、求定积分	172
六、解微分方程	172
七、无穷级数运算	173
习题八	175
附录 习题参考答案	177
参考文献	184

第1章

函数与极限

高等数学是以变量为研究对象，而函数反映了变量间所蕴含的关系。微积分是高等数学的主要内容，它主要研究函数的一些局部和整体的性态。

本章先介绍函数的概念、性质及最基本的函数类——初等函数，再给出极限的概念、性质及运算，并引入了函数的连续性概念。这些都是学习本课程所需掌握的基础知识。

第一节 函 数

一、集合

1. 集合

集合是指具有某种特定性质的事物的总体。组成这个集合的事物称为该集合的元素。集合通常用大写的拉丁字母，如 A , B , M , $\cdots$ 表示；其元素则常用小写的拉丁字母，如 a , b , t , $\cdots$ 表示。

如果 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A ，记作 $a \in A$ ；如果 a 不是集合 A 中的元素，则称 a 不属于 A ，记作 $a \notin A$ 。

如果集合 M 只包含有限个元素，则称 M 为有限集；否则称为无限集。而不含有任何元素的集合称之为空集，用符号“ $\emptyset$ ”表示。

集合常用的两种表达方式有两种：一种是列举法，即将集合中的所有元素列举出来，如由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合 A 可以表示为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

另一种是描述法，即用刻画集合中全体元素的性质来说明，如

$$M = \{x | x \text{ 所具有的特性} \}.$$

数学中通常用 N 表示由全体自然数组成的集合，用 Z 表示由全体整数组成的集合，

用 Q 表示由全体有理数组成的集合, 而全体正有理数组成的集合表示为 Q^+ . 由全体实数组成的集合记作 R .

集合之间最基本的关系是包含关系, 如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素, 则称 A 是 B 的子集, 记作 $A \subset B$ (A 包含于 B) 或 $B \supset A$ (B 包含 A). 如 $N \subset Z \subset Q \subset R$.

以后用到的集合主要是数集, 即元素都是数的集合. 如果没有特别说明, 以后提到的数都是实数.

2. 区间及邻域

区间和邻域是用得最多的数集.

设 $a, b \in R$, 且 $a < b$, 则数集

$$\{x | a < x < b\}.$$

称为以 a, b 为端点的开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

如图 1-1 (a), 这里注意, $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$. 数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为以 a, b 为端点的闭区间, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

另外, 还有以 a, b 为端点的两个半开半闭区间

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\} \text{ 和 } [a, b) = \{x | a \leq x < b\}.$$

以上区间都是有限区间, 数 $b - a$ 是这些区间的长度. 从数轴上看, 这些有限区间是长度有限的线段 (图 1-1).

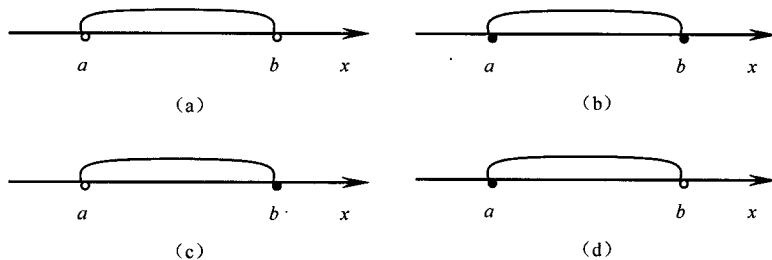


图 1-1

除此以外, 还有无限区间. 为了方便起见, 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则无限半开区间及开区间如下:

$$(a, +\infty) = \{x | x > a\}, \quad [a, +\infty) = \{x | x \geq a\}.$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}, \quad (-\infty, b] = \{x | x \leq b\}.$$

这些区间在数轴上表示为长度为无限的半直线 (图 1-2).

全体实数集合 R 也可以用无限开区间 $(-\infty, +\infty)$ 表示.

需要注意, $-\infty$ 、 $+\infty$ 只是用来表示无限性的记号, 而并非确定的数.

以后若遇到所做论述对不同类型的区间 (无限、有限, 开区间、闭区间、半开区间)



都适用, 可以用“区间 I ”代表各种类型的区间.

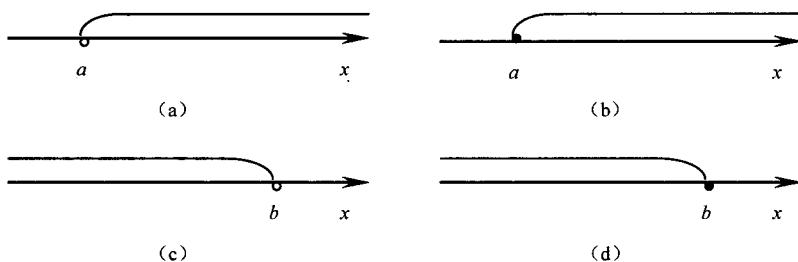


图 1-2

除了区间的概念外, 为了阐述函数的局部性态, 还经常用到邻域的概念, 它表示某点附近的所有点的集合. 设 a 与 δ 是两个实数, $\delta > 0$, 数集

$$\{x \mid |x - a| < \delta\}.$$

称为点 a 的 δ 邻域, 记作 $U(a, \delta)$, 即

$$U(a, \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\}.$$

点 a 称为这个邻域的中心, δ 称为这个邻域的半径. 并且可以看出, $U(a, \delta)$ 也就是以点 a 为中心, 长度为 2δ 的开区间 $(a - \delta, a + \delta)$, 如图 1-3 (a).

$U(a, \delta)$ 表示与 a 的距离小于 δ 的一切点的全体. 而有时用到的邻域需要把邻域中心去掉, 将 $U(a, \delta)$ 的中心 a 去掉后, 称为点 a 的去心 δ 邻域 (图 1-3 (b)), 记作 $\dot{U}(a, \delta)$, 即

$$\dot{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\}.$$

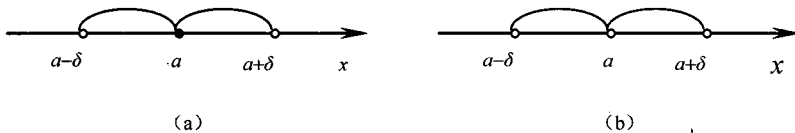


图 1-3

二、函数概念

在同一自然现象或社会现象中, 一般会有几个变量在同时变化着, 这些变量的变化并不是孤立的, 而是相互联系并遵循一定的规则. 函数就是描述这种联系的一个规则.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的数集, 如果对于每个数 $x \in D$, 变量按照一定的法则总有唯一确定的 y 值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作

$$y = f(x).$$

其中 x 叫做自变量, y 叫做因变量. x 的变化范围 D 叫做函数的定义域, 对应的 y 值的变化范围叫做函数的值域, 记作

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

要注意的是, 记号 f 和 $f(x)$ 的含义是不同的: 前者表示自变量 x 与因变量 y 之间的函数对应关系, 后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了方便, 习惯上也常用 $f(x)$ 或 $y = f(x)$ 来表示函数.

函数的记号 f 也可以用其他的字母来表示, 如 g, h, F, φ 等, 有时还直接用因变量的记号来表示函数, 即 $y = y(x)$, 这时字母 y 即表示因变量, 又表示函数.

由函数的定义可以看出, 函数概念有两个要素: 定义域和对应法则. 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 则这两个函数就是相同的, 否则是不同的.

在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的. 而在数学中, 函数的定义域就是自变量所能取得是算式有意义的一切实数的集合, 也就是函数的自然定义域.

函数的表示方法一般有三种: 公式法, 图示法, 表格法. 公式法也叫解析法, 常用于理论研究, 是我们用得最多的方法.

三、函数举例

例 1.1 函数 $y = x^2$.

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 图形为抛物线 (图 1-4).

例 1.2 函数 $y = x^3$.

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = (-\infty, +\infty)$, 图形为立方抛物线 (图 1-5).

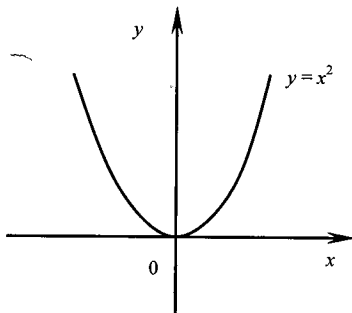


图 1-4

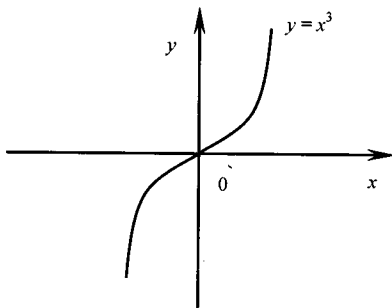


图 1-5

例 1.3 函数 $y = \frac{1}{x}$.

定义域 D 和值域 W 都是除去数 0 之外的全体实数, 图形为等轴双曲线 (图 1-6).

例 1.4 函数 $y = 3$.

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{3\}$, 图形为一条平行于 x 轴的直线 (图 1-7).

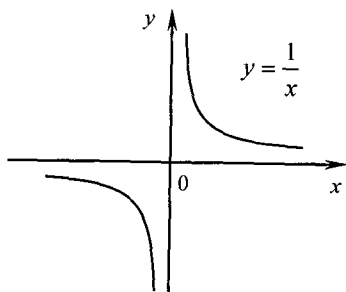


图 1-6

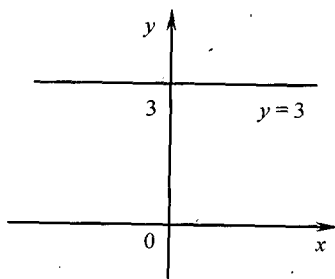


图 1-7

例 1.5 函数 $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \\ -x, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$.

这是绝对值函数, 定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = [0, +\infty)$, 图形如图 1-8 所示.

例 1.6 符号函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \\ 0, & \text{当 } x = 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}$.

定义域 $D = (-\infty, +\infty)$, 值域 $W = \{-1, 0, 1\}$, 图形如图 1-9 所示. 对于任何实数 x , 下列关系式成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

如, $\operatorname{sgn}(-2) \cdot |-2| = -1 \cdot 2 = -2$.

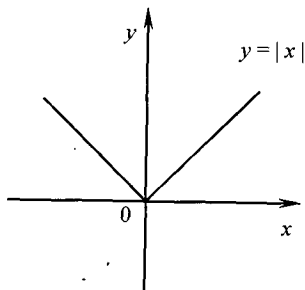


图 1-8

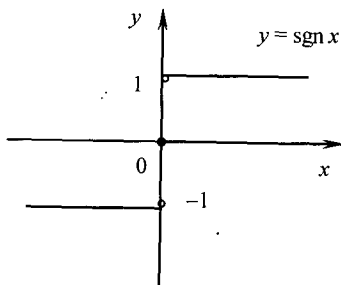


图 1-9

例 1.7 分段函数: 在自变量的不同变化范围中, 用不同的式子表示的函数.

(1) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x > 0 \\ x^2-1, & x \leq 0 \end{cases}$ (图 1-10);

(2) $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$ (图 1-11).

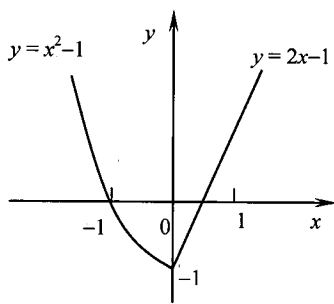


图 1-10

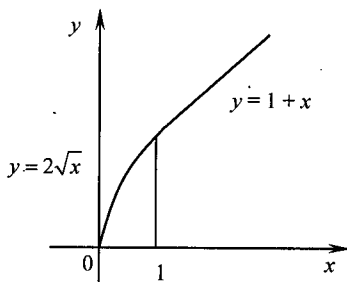


图 1-11

四、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果存在正数 M , 使得对于任意 $x \in I$, 恒有

$$|f(x)| \leq M.$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界; 如果这样的 M 不存在, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

显然, 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 是上述不等式成立的常数 M 不是唯一的, 有界性体现在常数 M 的存在性.

函数的有界性依赖于区间, 例如函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $(1, 2)$ 内是有界的, 而在区间 $(0, 1)$ 内是无界的.

函数的有界性还可以等价的表述为: 如果存在正数 M_1, M_2 使得对于任意 $x \in I$, 恒有

$$M_1 \leq f(x) \leq M_2.$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, M_1 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的下界, M_2 称为 $f(x)$ 在区间 I 上的上界.

2. 函数的单调性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2).$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调增加的 (简称递增); 如果对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2).$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 内是单调减少的 (简称递减).



单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数. 使函数保持单调的区间叫做单调区间.

单调增加函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的, 可以用 $\uparrow$ 表示; 单调减少函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的, 可以用 $\downarrow$ 表示.

如 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的. $y = x^2$ 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 而 $(-\infty, 0)$ 是它的单调减区间, $(0, +\infty)$ 是它的单调增区间.

3. 函数的奇偶性

设函数 $y = f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称 (即若 $x \in D$, 则 $-x \in D$). 如果对于任意 $x \in D$,

$$f(-x) = -f(x).$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数; 如果对于任意 $x \in D$,

$$f(-x) = f(x).$$

恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如, $y = x^3$, $y = \sin x$, $y = \tan x$ 等都是奇函数; $y = x^2$, $y = \cos x$ 等都是偶函数. 奇函数的图形是关于原点中心对称的, 偶函数的图形是关于 y 轴对称的.

容易证明, 两个奇函数之和仍是奇函数, 两个偶函数之和仍是偶函数, 两个奇函数之积是偶函数, 两个偶函数之积也是偶函数, 一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

4. 函数的周期性

对于函数 $y = f(x)$, 如果存在一个不为零数 T , 使得对于定义域 D 内的任意 x 值, $x \pm T$ 仍在 D 内, 且 $f(x) = f(x+T)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为周期函数, T 为函数的周期. 而习惯上, 函数的周期是指使 $f(x) = f(x+T)$ 成立的最小正数, 即最小正周期.

如 $y = \sin x$, $y = \cos x$ 是以 2π 为周期的周期函数, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 是以 π 为周期的周期函数.

五、反函数

在函数关系中, 自变量和因变量的地位往往是相对的, 可以把任意一个变量看作是自变量或因变量.

如某种商品的单价为 p , 销售量为 x , 则销售总收入 R 是 x 的函数

$$R = px.$$

此时 x 是自变量. 而如果已知总收入 R , 反过来求销售量 x , 则有

$$x = \frac{R}{p}.$$

此时 R 是自变量. 这是我们称后一函数是前一函数的反函数.

定义 1.2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 W . 如果对于 W 中的每一个 y ,

都有唯一的 $x \in D$, 使 $f(x) = y$, 此时得到一个定义 W 上的新函数, 此函数称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记作 $x = f^{-1}(y)$, 而 $y = f(x)$ 称为直接函数.

由定义 1.2 可见, 反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域是直接函数的值域, 反函数的值域是直接函数的定义域.

函数的实质在于它的定义域和对应法则, 而用什么字母表示自变量和因变量是无关紧要的. 习惯上常以 x 表示自变量, y 表示因变量, 因此常常对调 x, y , 把反函数 $x = f^{-1}(y)$ 改写成 $y = f^{-1}(x)$. 今后提到的反函数, 一般就是指这种经过改写的反函数.

如 $y = 10^x$ 的反函数是 $x = \lg y$, 或改写成 $y = \lg x$.

一般来讲, 求 $y = f(x)$ 的反函数要先从中解出 x , 再交换 x, y 即可.

并不是所有的函数都存在反函数, 但是在某区间上单调的函数在该区间上一定存在反函数.

由于 $y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的关系是 x 与 y 互换, 所以他们的图形关于直线 $y = x$ 对称. 如图 1-12.

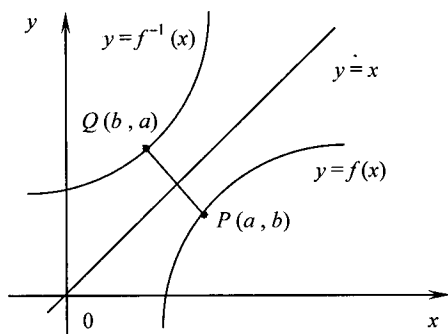


图 1-12

六、复合函数

我们先来看一个例子. 设

$$y = u^3, \quad u = 1 + 2x.$$

把 $u = 1 + 2x$ 代入 $y = u^3$ 可以得到函数

$$y = (1 + 2x)^3.$$

这个函数就是由 $y = u^3$ 及 $u = 1 + 2x$ 复合而成的复合函数.

一般的, 若函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D , 而函数 $u = \varphi(x)$ 的值域为 Z ; 若 $D \cap Z \neq \emptyset$, 则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 为复合函数. 其中 x 为自变量, y 为因变量, u 为中间变量.

例如, $y = \sqrt{1 - x^2}$ 可以看作由 $y = \sqrt{u}$ 及 $u = 1 - x^2$ 复合而成的, 它的定义域为 $[-1, 1]$, 是 $u = 1 - x^2$ 定义域 $(-\infty, +\infty)$ 的子集; $y = \arctan x^2$ 可以看作由 $y = \arctan u$ 及 $u = x^2$ 复合而成的, 它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 也就是 $u = x^2$ 的定义域.