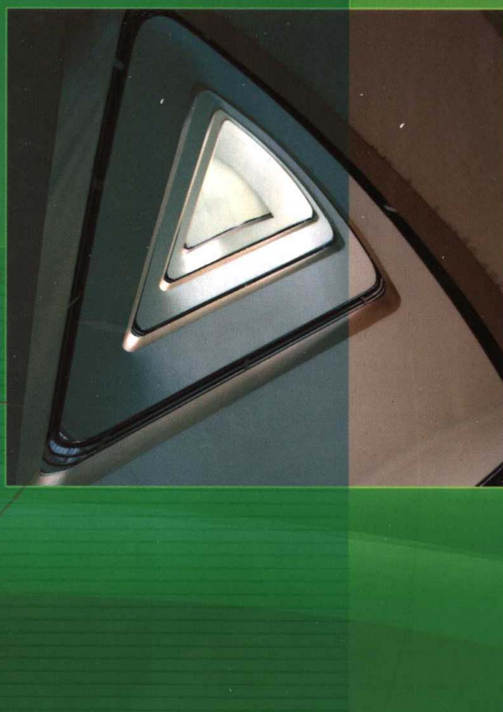
高等学校独立学院教材

大学数学教程

(上册)

南京大学金陵学院
陈 仲 编著



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校独立学院教材

大学数学教程

（上　册）

南京大学金陵学院
陈　仲　编著

高等教育出版社

内容简介

本书是高等学校独立学院本科理工类专业“大学数学”课程的教材.全书分上、下两册,上册包含极限与连续、导数与微分、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微分学;下册包含多元函数积分学、级数、微分方程、线性代数.

本书是编者多年从事“大学数学”课程建设的成果.全书将大学数学作为一个整体,由浅入深,循序渐进,既突出数学基础,又注重直观理解,并适当地渗透现代数学的思想和方法,部分教学内容作了更新和优化.本书难易适度,语言简洁明了.

本书可供独立学院、二级学院、师范学院作为教材,也可供各类大学生作为教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学数学教程.上册/陈仲编著.—北京:高等教育出版社,2007.7

ISBN 978-7-04-021791-9

Ⅰ.大… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第068759号

策划编辑 宋瑞才 **责任编辑** 李华英 **封面设计** 王凌波 **责任绘图** 尹文军
版式设计 余 杨 **责任校对** 朱惠芳 **责任印制** 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100011	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新丰印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960 1/16	**版　　次**	2007年7月第1版
印　　张	19.5	**印　　次**	2007年7月第1次印刷
字　　数	360 000	**定　　价**	20.60元

物料号 21791-00

前　言

本书是为高等学校独立学院本科理工类各专业“大学数学”课程编写的教材，编写时参照了原国家教委审定的综合大学物理类专业《高等数学课程教学基本要求》，高等工科院校《高等数学课程教学基本要求》，以及教育部数学与统计学教学指导委员会最新修订的《工科类本科数学基础课程教学基本要求》，并参照了教育部2006年制定的《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》所包含的数学一和数学二的“考试内容和考试要求”.

本书分上、下两册，上册包含极限与连续、导数与微分、一元函数积分学、空间解析几何、多元函数微分学；下册包含多元函数积分学、级数、微分方程、线性代数. 本书可分三个学期讲授，第一学期，每周6学时，讲授前四章；第二学期，每周6学时，讲授第五、六、七三章；第三学期，每周5学时，讲授第八、九两章. 总学时为255学时. 对于一些学时安排较少的系科，本书可分两个学期讲授，第一学期，每周6学时，讲授前四章；第二学期，每周6学时，讲授后五章的部分内容（删除§5.4、§5.5、§5.6、§6.2至§6.7、§7.3、§8.4、§8.5、§9.6），总学时为180学时.

编者在南京大学从事理工类“大学数学”课程教学三十余年. 从1999年开始，在南京大学金陵学院（独立学院）计算机系、电子系等兼职讲授“大学数学”课程，同时进行该课程的课程建设与教学改革，探索适应独立学院本科理工类专业使用的“大学数学”教材体系. 本书正是编者多年从事“大学数学”课程建设的成果. 在编写过程中，力求做到以下几点：

1. 突出数学基础. 我们的教学对象是独立学院中对大学数学要求相对较高的理工类专业学生，其教学任务除使学生获得大学数学的基本概念、基本理论和基本方法外，还要使学生受到一定的科学训练，受到数学思想方法和逻辑推理能力的培养. 因此，全书力求基本理论的系统性和叙述的严密性，其中重要定理都给出简洁、严格的证明，旨在培养学生一定的数学素养，为学习专业课打下基础，为以后的学习、工作和发展积累潜在的能力. 另一方面，由于独立学院的培养目标主要是应用型人才，因此对数学基础中要求较高、证明过难的部分作了简化处理，或用“△”标出，取材的深度和广度也作了压缩.

2. 改革课程体系.“微积分”、“微分方程”和“线性代数”在一些高等学校是作为三门课程独立开设的. 我们将这三部分内容统筹布局，略有交叉，互有渗透，但保持各章的相对独立. 我们的指导思想是将“大学数学”作为一个整体，由浅

入深，循序渐进，并注意渗透现代数学的思想和方法，适当地运用现代数学的术语和符号，为学生以后查阅现代数学文献提供“接口”.

3. 更新教学内容. 一是将部分教学内容优化处理，既减少了课内学时，又减少了学生课后用于解题的时间. 例如，在极限部分将“等价无穷小因子替换”这一求极限的方法公式化，在导数部分建立“取对数求导法则”，在广义积分部分建立“广义 N-L 公式”，用代数的方法定义“向量”等. 二是根据教学对象的实际水平，尽量从几何直观上作出分析，提高学生的接受水平. 例如，在函数极限的 ε-δ 定义中，介绍用几何图形找 δ 的方法. 三是注意与中学数学教学改革的衔接. 例如，在预备知识部分增加了“极坐标系”和“数学归纳法”的内容.

本书在编写中还十分注重对学生解题技巧和应用能力的培养，选编和设计了一些具有启发性、应用性的例题与习题. 习题分 A，B 两组，A 组为基本要求，B 组为较高要求（供准备考研的部分学生使用），书末附有习题答案与提示.

书中用“△”标出的内容供教师选用，一般留给学生课外阅读或查阅.

本书是南京大学金陵学院系列教材之一. 在编写中重点参考了由陈仲、粟熙合编的《大学数学》（南京大学出版社，1998 年），选用了该书的部分习题.

本书在编写过程中得到南京大学金陵学院院长姚天扬教授、南京大学李元教授、姜东平教授、姚天行教授、张德富教授、高敦堂教授、彭补拙教授、邹志仁教授、方一亭教授的大力支持和帮助；责任编辑李华英和策划编辑宋瑞才的认真工作和辛勤编辑，使本书质量大有提高；本书的出版还得到高等教育出版社的大力支持，编者谨此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平所限，书中缺点和不足难免，诚恳期待专家和读者赐教.

陈 仲

2006 年 10 月于南京大学金陵浦苑

目　　录

第一章　极限与连续

第二章　导数与微分

第三章 一元函数积分学

第四章　空间解析几何

第五章　多元函数微分学

第一章　极限与连续

极限概念是大学数学的最基本概念.以后学到的微分和积分这些大学数学的主要内容都是某种求极限的过程,可以说整个微积分是建立在极限理论之上的.这一章首先复习中学数学的部分内容,介绍数学归纳法和极坐标概念,然后讲授数列的极限和函数的极限.

§1.1　预备知识

一、逻辑符号

1. 全称符号∀. ∀表示“对于任意一个”,“对所有的”等.例如,$\forall x \in \mathbf{R}$ 表示“对任一实数 x”.

2. 存在符号∃. ∃表示“存在某个”,“至少找到一个”等.例如,$\exists x \in \mathbf{N}$ 表示“存在自然数 x”.

3. 蕴涵符号⇒. $A \Rightarrow B$ 表示“如果 A 成立,可推得 B 成立”,“A 是 B 成立的充分条件”,“B 是 A 成立的必要条件”.

4. 等价符号⇔. $A \Leftrightarrow B$ 表示“A 等价于 B”,“B 是 A 成立的充要条件”.

5. 定义符号 $\overset{\text{def}}{=\!=\!=}$. $A \overset{\text{def}}{=\!=\!=} B$ 表示“A 的定义是 B”,“用 B 定义 A”.

6. 证毕符号□. 一个定理或命题证明完毕,尾部记□,表示“证毕”.

正确运用逻辑符号,可大大简化文字叙述,且简洁明了.

二、集合及其运算

我们将具有某种性质的一组研究对象的全体称为**集合**,记为 $A,B,\cdots$.一个集合中的某特定研究对象称为该集合的**元素**,记为 $x,y,\cdots$. $x \in A$ 表示 x 是集合 A 的元素.例如,$B([a,b])$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的所有有界函数的集合,则 $f \in B([a,b])$ 表示“$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界”. $x \notin A$ 表示 x 不是 A 的元素.例如,$f \notin B([a,b])$ 表示“f 在 $[a,b]$ 上无界”.给定一个集合 A 与一个元素 x,则 $x \in A$

与$x \in A$中有一个且只有一个成立. 集合中的元素具有确定性、互异性和无序性. 只含有限多个元素的集合称为**有限集**,含有无限多个元素的集合称为**无限集**. 给定两个集合A与B,若$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$,则称$A$为$B$的**子集**,记为$A \subseteq B$;若$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$,且$\forall y \in B \Rightarrow y \in A$,则称$A$与$B$**相等**,记为$A = B$. 不含任何元素的集合称为**空集**,记为$\varnothing$. 空集是任一非空集合的子集.

定义 1.1.1 (集合的并、交、差) 设A,B是集合,则A与B的并、交、差分别定义为

$$A \cup B \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A \setminus B \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \in A, \text{但 } x \notin B\}.$$

关于集合的并、交、差,有下列性质:

定理 1.1.1 设A,B,C是集合,则有

1) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$; (交换律)

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$; (结合律)

3) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$. (分配律)

在研究集合与集合之间的关系时,常将具有某种性质的研究对象的全体称为**全集**,记为I或Ω. 若A是I的子集,称$I \setminus A$为A在I中的**补集**,记为$\overline{A}$(或$\complement_I A, A^c$).

定理 1.1.2 (德·摩根①律) 设A,B是集合,则

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

上述两个定理可根据集合相等的定义进行验证,这里从略.

在两个或多个集合之间,还有直积(或称**笛卡儿②乘积**)的概念.

定义 1.1.2 (直积) 设A,B,C是集合,

$$A \times B \xlongequal{\text{def}} \{(x,y) \mid x \in A, y \in B\},$$

$$A \times B \times C \xlongequal{\text{def}} \{(x,y,z) \mid x \in A, y \in B, z \in C\}.$$

特别地,若$\mathbf{R}$为实数集(参见本节第三部分),$A = B = C = \mathbf{R}$,则$\mathbf{R}^2 \xlongequal{\text{def}} \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,称为**二维平面**;$\mathbf{R}^3 \xlongequal{\text{def}} \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$称为**三维空间**. 类似地,我们可定义

$$\mathbf{R}^n = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n\text{个}} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

① 德·摩根(De Morgan,1806—1871),英国数学家.

② 笛卡儿(Descartes,1596—1650),法国数学家.

称为 **n 维空间**. 在第九章线性代数中,n 维空间是主要的研究对象. $\mathbf{R}^n$ 的元素称为 **n 维空间的点或向量**.

三、实数集·绝对值·区间与邻域

我们知道,自然数集 $\mathbf{N}$①,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$ 分别为

$$\mathbf{N} \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x = 1, 2, \cdots, n, \cdots\},$$

$$\mathbf{Z} \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\},$$

$$\mathbf{Q} \xlongequal{\text{def}} \left\{x \,\middle|\, x = \frac{p}{q}, p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}, p, q \text{ 互素}\right\}.$$

有理数总可用有限小数或无限循环小数表示. 而无限不循环小数称为**无理数**. 有理数与无理数统称为**实数**. 全体实数的集合称为**实数集**,记为 $\mathbf{R}$.

定义 1.1.3 (绝对值) 实数 a 的绝对值

$$|a| \xlongequal{\text{def}} \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

$|a|$的几何意义是数轴上坐标为 a 的点到坐标原点的距离.

实数的绝对值有下列性质:

1) $|a| \geqslant 0$;

2) $|a| = \sqrt{a^2}$;

3) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$;

4) $|x| \leqslant a (a > 0) \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$, $|x| \geqslant a (a > 0) \Leftrightarrow x \geqslant a$ 或 $x \leqslant -a$;

5) $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$;

6) $|ab| = |a||b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} (b \neq 0)$.

上述性质的证明留给读者.

数轴上某一段连续点的集合称为**区间**. 根据端点的隶属关系分为下列几种情况.

定义 1.1.4 (区间) 设 a, b 是实数, $a < b$.

1) **开区间** $(a, b) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a < x < b\}$;

2) **闭区间** $[a, b] \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$;

3) **半开区间** $(a, b] \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a < x \leqslant b\}$,

---

① 本书中的自然数集 $\mathbf{N}$ 不包含零.

半开区间 $[a,b) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid a \leqslant x < b\}$;

4) **无穷区间** $(a,+\infty) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x > a\}$,

$[a,+\infty) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \geqslant a\}$,

$(-\infty,a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x < a\}$,

$(-\infty,a] \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \leqslant a\}$,

$(-\infty,+\infty) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid x \in \mathbf{R}\}$.

定义 1.1.5 （邻域）设 $a,\delta \in \mathbf{R}, \delta > 0$.

1) $B_\delta(a) \xlongequal{\text{def}} \{x \mid |x-a| < \delta\}$,称为 a 的 **δ 邻域**;

2) $B_\delta(a) \setminus \{a\} \xlongequal{\text{def}} \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$,称为 a 的**去心 δ 邻域**;

3) $\{x \mid 0 < x-a < \delta\}$ 称为 a 的**右 δ 邻域**;

4) $\{x \mid 0 < a-x < \delta\}$ 称为 a 的**左 δ 邻域**.

并分别简称为**邻域**,**去心邻域**,**右邻域**,**左邻域**,并称 a 为邻域的**中心**,δ 为邻域的**半径**.

四、数学归纳法

在大学数学和现代数学各学科中,数学归纳法是证明命题成立常用的数学方法,有时甚至是不可替代的方法.

数学归纳法含第一数学归纳法和第二数学归纳法. 对于一个关于自然数 n 的命题 $P(n)$,用第一数学归纳法证明的步骤如下:

1) 证明 $n=1$ 时,命题 $P(1)$ 成立;

2) 假设 $n>2$ 时,命题 $P(n-1)$ 成立,由此推得命题 $P(n)$ 成立,则命题 $P(n)$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}$ 成立.

用第二数学归纳法证明的步骤如下:

1) 证明 $n=1$ 时,命题 $P(1)$ 成立;

2) 假设对于自然数 $2,3,\cdots,n-1$,命题 $P(2),P(3),\cdots,P(n-1)$ 皆成立,由此推得命题 $P(n)$ 成立,则命题 $P(n)$ 对 $\forall n \in \mathbf{N}$ 成立.

例 1 （二项式定理）设 $a,b \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$,求证:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i a^{n-i} b^i. \qquad (1)_n$$

证 $(1)_1$ 显然成立 $(a+b=a+b)$. 假设 $(1)_{n-1}$ 成立,即

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^i a^{n-1-i} b^i,$$

两边同乘以$(a+b)$,得

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i a^{n-i}b^i+\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i a^{n-1-i}b^{i+1},$$

在右边第二项中,令 $i+1=j$,则

$$\sum_{i=0}^{n-1}C_{n-1}^i a^{n-1-i}b^{i+1}=\sum_{j=1}^{n}C_{n-1}^{j-1}a^{n-j}b^j=\sum_{i=1}^{n}C_{n-1}^{i-1}a^{n-i}b^i,$$

于是

$$\begin{aligned}(a+b)^n&=a^n+\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^i a^{n-i}b^i+\sum_{i=1}^{n-1}C_{n-1}^{i-1}a^{n-i}b^i+b^n\\&=a^n+\sum_{i=1}^{n-1}(C_{n-1}^i+C_{n-1}^{i-1})a^{n-i}b^i+b^n\\&=a^n+\sum_{i=1}^{n-1}C_n^i a^{n-i}b^i+b^n=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a^{n-i}b^i,\end{aligned}$$

即得$(1)_n$成立,故$(1)_n$对$\forall n\in\mathbf{N}$成立.

例 2 (算术平均数不小于几何平均数)设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$,求证:

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.\tag{$(2)_n$}$$

证 $(2)_1$ 显然成立$(a_1=a_1)$. 假设$(2)_{n-1}$成立,即假设 $n-1$ 个正数的算术平均数不小于其几何平均数,记

$$\bar{x}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时,$(2)_n$ 显然成立,不妨设 $a_1<\bar{x}<a_n$,则

$$\bar{x}(a_1+a_n-\bar{x})=a_1a_n+(a_n-\bar{x})(\bar{x}-a_1)>a_1a_n,$$

由归纳假设,对于 $n-1$ 个正数 $a_2,a_3,\cdots,a_{n-1},a_1+a_n-\bar{x}$,有

$$\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_n-\bar{x})}{n-1}\geqslant\sqrt[n-1]{a_2\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\bar{x})},$$

于是有

$$\begin{aligned}\bar{x}&=\frac{n\bar{x}-\bar{x}}{n-1}=\frac{1}{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n-\bar{x})\\&=\frac{a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+(a_1+a_n-\bar{x})}{n-1}\\&\geqslant\sqrt[n-1]{a_2\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\bar{x})},\end{aligned}$$

$$(\bar{x})^{n-1}\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}(a_1+a_n-\bar{x}),$$

两边同乘以$\bar{x}$,得

$$(\bar{x})^n\geqslant a_2a_3\cdots a_{n-1}\bar{x}(a_1+a_n-\bar{x})>a_1a_2\cdots a_n.$$

所以$(2)_n$成立. 故$(2)_n$对$\forall n\in\mathbf{N}$成立.

五、极坐标系

在平面上取一定点 O,从 O 出发作一条射线 Ox,选定单位长度,这就是**极坐标系**. 称 O 为**极点**,称 Ox 为**极轴**(图 1.1). 平面上任取一点 M,点 M 到极点 O 的距离为 ρ,称 ρ 为**极径**. Ox 轴逆时针旋转到 OM 方向的角度为 θ,称 θ 为**极角**. 我们用有序数组(ρ,θ)来定义点 M 的**极坐标**,记为 $M(\rho,\theta)$,这里 $\rho\geqslant 0, 0\leqslant\theta<2\pi$(或 $-\pi\leqslant\theta<\pi$). $\rho=0$表示极点,其极角取任意值. 这样规定后,平面上除极点外,任一点的直角坐标(x,y)与极坐标(ρ,θ)一一对应,它们的关系是

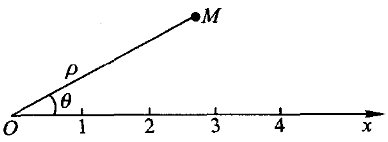


图 1.1

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta.$$

当 $\rho<0$ 时,我们规定(ρ,θ)与$(-\rho,\theta+\pi)$为同一点;当 $\theta>2\pi$ 或 $\theta<0$ 时,我们规定(ρ,θ)与$(\rho,\theta+2k\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$为同一点.

例 3　设 OP 是圆 $x^2+y^2=ax(a>0)$的弦,延长 OP 到 Q,并延长 PO 到 M,使得$|PQ|=a$, $|PM|=a$,当点 P 在圆上移动时,求点 Q 与 M 的轨迹.

解　将圆 $x^2+y^2=ax$ 化为极坐标方程,得

$$\rho=a\cos\theta.$$

当延长 OP 时,设点 P,Q 的极坐标分别为(ρ_1,θ_1)与(ρ,θ),则

$$\rho_1=a\cos\theta_1,\quad \rho=\rho_1+a,\quad \theta=\theta_1,$$

于是点 Q 的极坐标(ρ,θ)满足方程

$$\rho=a(1+\cos\theta)\quad\left(|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

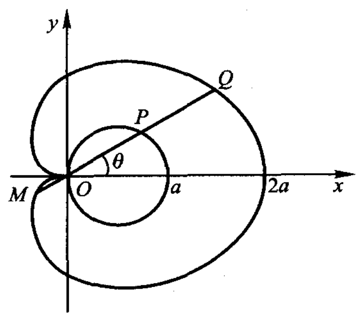


图 1.2

当延长 PO 时,设点 P,M 的极坐标分别为(ρ_1,θ_1)与(ρ,θ),则

$$\rho_1=a\cos\theta_1,\quad \rho=a-\rho_1\quad \theta=\theta_1+\pi,$$

于是点 M 的极坐标(ρ,θ)满足方程

$$\begin{aligned}\rho&=a(1-\cos\theta_1)=a(1-\cos(\theta-\pi))\\&=a(1+\cos\theta)\quad\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi\right).\end{aligned}$$

所以点 Q 与 M 的轨迹为

$$\rho=a(1+\cos\theta),$$

这条曲线称为**心形线**(图 1.2),在第三章中,我们将要研究心形线所围图形的面积、心形线的长度等.

下面我们举例说明如何作极坐标方程的图形.

例 4 画极坐标方程 $\rho=2\sin 3\theta$ 的简图.

解 应用在中学里学过的正弦曲线图形的知识,首先在平面直角坐标系 $\theta\rho$ 上画出

$$\rho=2\sin 3\theta$$

的图形(图 1.3),然后在极坐标系下用描点法作图. 当 θ 从 0 增大到 $\frac{\pi}{6}$ 时,ρ 从 0 增大到 2;当 θ 从 $\frac{\pi}{6}$ 增大到 $\frac{\pi}{3}$ 时,ρ 从 2 递减到 0;当 θ 从 $\frac{\pi}{3}$ 增大到 $\frac{2\pi}{3}$ 时,ρ 为负值,在其反方向 $\frac{4}{3}\pi$ 到 $\frac{5}{3}\pi$ 之间,ρ 从 0 增大到 2,再从 2 减少到 0;当 θ 从 $\frac{2}{3}\pi$ 增大到 π 时,ρ 从 0 增大到 2,再从 2 减少到 0;当 θ 从 π 增大到 $\frac{4}{3}\pi$ 时,ρ 为负值,在其反方向 0 到 $\frac{\pi}{3}$ 之间画图,从此图形与前面的图形重合(图 1.4).

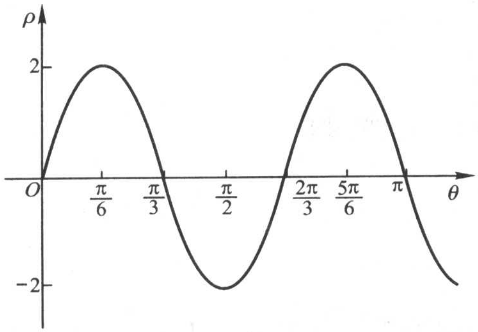


图 1.3

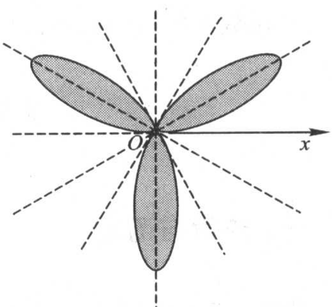


图 1.4

习题 1.1

A 组

1. 设 $A=\{0\}$,$B=\{0,1\}$,下列叙述是否正确?

1) $A=\varnothing$;　　2) $A\subset B$;

3) $A\in B$;　　4) $0\in A$;

5) $\{0\}\in B$;　　6) $\{0\}\subseteq A$;

7) $A\cup B=B$;　　8) $A\cap B=0$.

2. 设 $A=\{0,1,2\}$，试写出 A 的一切子集.

3. 已知 $\left|\frac{2x-1}{3}\right|=\frac{1-2x}{3}$，求 x 的取值范围.

4. 不等式 $|x-2|+|4-x|<k$ 无解，求 k 的取值范围.

5. 用数学归纳法证明：

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

6. 已知 $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中第五项是常数，求 x^3 项的系数.

7. 将下列曲线方程化为极坐标方程：

1）$x^2+y^2=a^2$；　　2）$x^2-y^2=1$；

3）$y^2=2x$.

8. 画出下列极坐标方程的简图：

1）$\rho=2\cos 3\theta$；　　2）$\rho=3\sin 2\theta$.

B 组

1. 两个集合的元素之间如果存在一一对应的关系，称这两个集合**等势**. 试证明：自然数集 $\mathbf{N}$ 与整数集 $\mathbf{Z}$ 是等势的.

2. 用数学归纳法证明：$12\mid n^2(n^2-1)$，$n\in\mathbf{N}$.

§1.2　初等函数

一、映射与函数

定义 1.2.1　（映射）设 A,B 是两个非空集合，若 $\forall x\in A$，按某对应法则 f 有惟一的 $y\in B$ 与之对应，则称 f 为 A 到 B 的**映射**，记为

$$f:A\to B,$$

并称 y 为 x 关于映射 f 的**像**，记为 $f(x)$. 称 x 为 y 的**原像**，称 A 为映射 f 的**定义域**，记为 $D(f)$，并称像 $f(x)$ 的集合为映射 f 的**值域**，记为 $f(A)$.

下面介绍几个特殊的映射：

1）若 $B=f(A)$，称 $f:A\to B$ 为**满映射**；

2）若 $\forall x_1,x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$，称 $f:A\to B$ 为**单映射**；

3）若 $f:A\to B$ 既是满映射，又是单映射，则称 $f:A\to B$ 为**一一映射**或**双映射**.

定义 1.2.2　（逆映射）设 $f:A\to B$ 为一一映射，则 $\forall y\in B$，存在惟一的