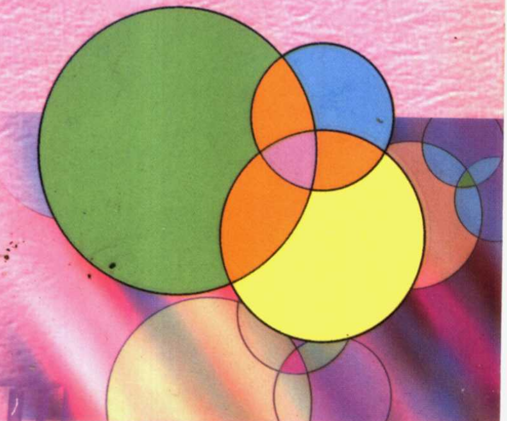
全国中小学教师继续教育
教 材

集合与数

教育部师范教育司组织评审

方金秋 编著



JIHE YU SHU

北京师范大学出版社

中小学教师继续教育教材

集合与数

方金秋　编著

北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

集合与数/方金秋编著.—北京:北京师范大学出版社,2001.9
中小学教师继续教育教材
ISBN 7-303-05849-4

Ⅰ.集… Ⅱ.方… Ⅲ.①集论-中小学-师资培训-教材 ②数-中小学-师资培训-教材 Ⅳ.O144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 045411 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号 邮政编码:100875)
出版人:常汝吉
北京师范大学印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本:850mm×1 168mm 1/32 印张:6.5 字数:162 千字
2001 年 9 月第 1 版 2001 年 9 月第 1 次印刷
印数:1～5 000 定价:8.50 元

前　言

全面推进素质教育，是当前我国现代化建设的一项紧迫任务，是我国教育事业的一场深刻变革，是教育思想和人才培养模式的重大进步。实施“中小学教师继续教育工程”，提高教师素质，是全面推进素质教育的根本保证。

开展中小学教师继续教育，课程教材建设是关键，当务之急是设计一系列适合中小学各学科教师继续教育急需的示范性课程，编写一批继续教育教材。在教材编写方面，我司采取了以下几种做法：

(1) 组织专家对全国各省（区市）推荐的中小学教师继续教育教材进行评审，筛选出了200余种可供教师学习使用的优秀教材和学习参考书；

(2) 组织专门的编写队伍，编写了61种教材，包括中小学思想政治、教育法规、教育理论、教育技术等公共必修课教材；中小学语文、数学，中学英语、物理、化学、生物，小学社会、自然等学科专业课教材。上述教材，已经在1999年底以《全国中小学教师继续教育1999年推荐用书目录》（教师司［1999］60号）的形式向全国推荐。

(3) 向全国40余家出版社进行招标，组织有并专家对出版社投标的教材编写大纲进行认真的评审和筛选，

初步确定了200余种中小学教师继续教育教材。这批教材，目前正在编写过程中，将于2001年上半年陆续出版。我们将陆续向全国教师进修院校、教师培训基地和中小学教师推荐，供开设中小学教师继续教育相关课程时选用。

在选择、设计和编写中小学教师继续教育教材过程中，我们遵循了以下原则：

1. 从教师可持续发展和终身学习的战略高度，在课程体系中，加强了反映现代教育思想、现代科学技术发展和应用的课程。

2. 将教育理论和教师教育实践经验密切结合，用现代教育理论和方法、优秀课堂教学范例，从理论和实践两个方面，总结教学经验，帮助教师提高实施素质教育的能力和水平。

3. 强调教材内容的科学性、先进性、针对性和实效性，并兼顾几方面的高度统一。从教师的实际需要出发，提高培训质量。

4. 注意反映基础教育课程改革的新思想和新要求，以使教师尽快适应改革的需要。

中小学教师继续教育教材建设是一项系统工程，尚处在起步阶段，缺乏足够的经验，肯定存在许多问题。各地在使用教材的过程中，有什么问题和建议，请及时告诉我们，以便改进工作，不断加强和完善中小学教师继续教育教材体系建设。

教育部师范教育司

2000年11月1日

目录

引言 …………………………………………………… (1)
第一章　集合 ……………………………………………… (8)
　第一节　集合的概念 ……………………………………… (9)
　第二节　集合的包含与相等 ……………………………… (17)
　第三节　集合的运算 ……………………………………… (25)
　第四节　集合的运算定律 ………………………………… (37)
　第五节　直积集和九九表 ………………………………… (49)
　第六节　有序集与自然数列 ……………………………… (51)
第二章　映射 ……………………………………………… (55)
　第一节　单值对应 ………………………………………… (55)
　第二节　一一对应(一一映射) …………………………… (58)
　第三节　有限集与无穷集的性质 ………………………… (62)
　第四节　集合上的运算 …………………………………… (68)
第三章　自然数集 ………………………………………… (73)
　第一节　基数 ……………………………………………… (74)
　第二节　序数 ……………………………………………… (85)
第四章　有理数集 ………………………………………… (103)
　第一节　分数 ……………………………………………… (103)
　第二节　分数与小数 ……………………………………… (121)

第三节 有理数及其运算 …………………… (137)
第四节 有理数集的性质 …………………… (149)
第五章 实数集 …………………… (161)
第一节 无理数 …………………… (161)
第二节 实数与实数轴 …………………… (166)
第三节 实数的大小比较与运算 …………………… (177)
第四节 实数集的性质 …………………… (184)
第六章 在集合与数集思想下的小学数学教学 …………………… (193)
第一节 集合思想与小学数学教学 …………………… (193)
第二节 数集思想与小学数学教学 …………………… (197)

引 言

作者原本没有写这篇引言的打算，然而在写完这本书的书稿，特别是重读书稿时，有了许多想法，于是产生了有必要写一篇对本书内容交待的文字、按理这些文字应当作为后记出现才是，但是，这些内容作为本书内容的引言更为恰当、经斟酌再三，还是把它作为引言放在本书的前面.

写这篇引言出于以下的缘故：

1. 作者希望广大读者在阅读本书之初，首先要了解一下本书的体例与结构，只有这样才能更好地理解本书所讲述的内容实质与结构方面的来龙去脉.

2. 作者对本书中有些内容的处理意图也要向读者进行交待，说明为什么如此处理而不采取别的办法.

3. 有些内容在学习时应事先注意的地方，也应该先行预示.

4. 本书作为由中央教育部统一组织编写的“中小学教师继续教育教材”之一，有必要把编写的意图、体例的安排进行一番表述，以便让专家组了解. 这也是情理之中的事.

对本书的内容，应该说作者从 1978 年就开始思考了. 当时，作者作为北京市中等师范学校数学教研人员，对小学数学教师的知识结构进行过调研. 从调查结果中认识到小学数学教师至少在以下几方面尚待进修与提高：

1. 有关集合知识.

当时，在小学数学教材中开始渗透集合知识，然而小学数学

教师对集合知识知之甚少，有不少教师可以说是一无所知. 因此，在小学数学教师中普及集合知识是形势发展与小学数学教学的迫切要求. 因此，作者当时就从事过这方面的普及工作.

2. 有关数集的知识.

在过去的很长时间里小学数学只讲算术. 后来，随着教育改革的深入，在小学数学中，引进了集合、统计、代数等初步知识，从而把小学算术改为小学数学. 随着教育改革的进一步深入，还有一些数学内容会渗透到小学数学中来. 这样，就要求小学数学教师要不断地拓宽知识面，不断地深化数学基本功训练.

数集内容的学习，对小学数学教师是十分必要的. 这是因为，它可以拓宽知识面，可以通过对数集的学习开阔对数的知识的了解. 作者曾经对小学数学教师做过问卷调查，几乎所有小学数学教师对自然数的概念还只停留在小学数学课本中有关自然数概念的描述水平上，即“像1，2，3，…这样的数叫做自然数”. 显然，这种对自然数的认识是很不令人满意的. 至于问及自然数的涵义，有八成多的小学数学教师很难说清，他们不知道自然数还有基数与序数这两种涵义. 至于自然数理论（不论是基数理论还是序数理论）更是一窍不通. 作为教师，他们所拥有的知识与素养与教学有关知识之间的关系，犹如一桶水与一杯水的关系. 只有自己拥有一桶水，才能给学生一杯水. 本书有关数集的内容对于小学数学知识就犹如一桶水. 作者前几年曾就此内容在北京市高级小学教师继续教育班上讲授过两轮. 学员们反映是：长了见识，提高了理论水平和数学推理能力.

3. 有关初等数论的初步知识.

初等数论就是介绍整数的有关性质，即倍数、约数、带余除法、整除、同余、不定方程、连分数等. 这些知识对提高小学数学教师驾驭小学数学中的有关内容也大有好处.

4. 有关现代教育理论与教育心理学理论.

这方面知识对于提高教学能力，改进教学方法，进行教育科研等是很有帮助的.

本书是关于集合与数集的内容，把它作为小学数学教师的继续教育教材，作者认为这是英明之举，是决策者站得高、看得远的表现. 这对于提高小学数学教师的知识素养是非常必要的. 因此，作者希望本书能对小学数学教师在继续教育中从提高素质方面有所帮助，这也是作者在花甲之年后乐于承担此书的编写任务的理由.但愿本书能对小学教师知识和素质的提高起到一点作用，这也是作者的一个心愿及对教育事业发挥的余热.

下面介绍本书在内容与安排等几方面的处理意见.

1. 本书的主要内容.

与书名一样，本书的内容是集合与数两大部分.

第一章与第二章属于集合的内容.第一章介绍集合的概念、关系、运算，它是从集合的层面上来讲述的. 第二章介绍集合的对应、集合上的运算、有限集与无穷集，它是从集合的元素间的关系来讨论的.

在介绍集合的知识过程中，我们是从定义出发，逻辑地推出一些性质与定律来. 在引入概念、介绍性质、得出定律之前，尽量从实际引入，做到由浅入深，通俗易懂.

第三章、第四章、第五章属于数集的内容. 关于数集，我们这里只介绍自然数集（第三章）、有理数集（第四章）、实数集（第五章）.

自然数集与有理数集与小学数学关系极为密切，因此，本书花费了很大的篇幅对其进行了介绍. 为了让小学数学教师能系统地、完整地了解实数轴上的所有的点以及为了弥补有理数的缺陷，我们也对实数集做了一些介绍.

在介绍数集中，我们仍然是从定义出发，逻辑地推演出数的性质、运算与定律，从而构成了完备的数的体系，即数系.

另外，本书还单设了第六章，讨论在集合与数集思想下的小学数学教学. 这样安排的目的是想在本书的内容和小学数学教学之间架起一座桥梁. 实际上，这一章只是教学方法的一个提示. 它不属于纯数学知识范畴. 但它可以加强本书的内容对小学数学的联系. 当然，真正的联系还是教师在吃透本书内容的基础上，在教学实践中去创造.

2. 数集的结构体系.

在介绍数集的过程中，我们是本着数集扩张的原则进行的. 换言之，数集的扩张必须按一定的规律进行. 我们知道，规律是客观存在，而原则是人们在认识规律基础上的总结. 本书介绍数集扩张的原则是在第四章第一节的三款中才给出的. 为什么我们不一开始就给出数集扩张的原则呢？这是出于有了一定的数集扩张的实例后再给出，有利于读者的理解. 但是，数的扩张原则是我们作为介绍数集的一条红线，贯穿于数集扩张的始终. 这一点读者可以从数集各部分内容中得到答案. 例如，当我们学习了自然数集时，由于自然数集合对于自然数除法的不封闭性，因此，有必要把它扩张到有理数集. 在有理数集中，除法具有封闭性. 又如，由于有理数集对极限运算的不封闭性，有必要把它扩张到实数集. 另外，当数集扩张后，新数集上的运算与原数集上的运算应保持一致.

另一方面，我们在介绍数集时，总是本着从无到有的原则来建立数的理论. 例如，自然数的引入也是从一张白纸开始. 我们不但定义了自然数的概念，还要定义自然数的四则运算，并且还得对所定义的运算，证明其存在性与惟一性. 还要指出的是，每扩张成一个新数集，总要对其四则运算进行定义，而且新定义的运算应与原数集的运算一致. 同样，对于各种运算定律都要逐一加以证明. 每次对新集上的运算的定义都不是重复，而是对原数集上的运算的发展.

3. 本书数集扩张的一些具体途径与步骤.

本书的数集扩张是沿着以下的途径进行的：从自然数集扩张到整数环，再从整数环扩张到有理数域，最后从有理数域扩张到实数域.

从自然数集扩张到整数环，即把自然数扩张到整数集（正整数、零、负整数）. 由于在整数集中对加、减、乘运算封闭，因此整数集构成一个数环. 从整数环扩张到有理数域，就是把整数集扩张到分数集（正分数、零、负分数）. 由于有理数集对加、减、乘、除运算封闭，因此有理数集构成一个数域.

从自然数集扩张到有理数集的具体步骤是：自然数集⟶扩大的自然数集（自然数、零）⟶正分数集⟶有理数集（正有理数、零、负有理数）. 这里要说明的是：从自然数集没有直接扩张到整数集（正整数、零、负整数），而是先引入数0，把自然数集先达到非负整数集（注意：这里还没有引入负数）. 从非负整数集扩张到正有理数集（正分数集），这时正有理数也就是所谓的算术数. 到此，我们所得到的数集就是小学算术所研究的对象，从算术数扩张到有理数，实际上，就是从正有理数集扩张到有理数集. 这个过程就是引入了负数. 这实际上是初中阶段的数学学习的数. 这一过程与学生学习数的过程也是一致的.

4. 数集扩张的几点说明.

数集扩张过程中，有些具体问题有必要作一些说明：

（1）关于除数不能为零的限定.

我们第一次定义除法是在自然数集上. 当时还没有引入数零，因此，没有必要对除数作此限定，只是到了引入零后，凡定义除法总要对除数加以非零限定.

（2）关于负数引入前后的问题.

本书负数的引入是在分数理论建立之后，即在正分数集后才引入负分数集. 因此，引入负数前的一切讨论只限定在非负范围

内，只有到了负数的引入后，讨论的情况才考虑到负数情况．这一情况，读者在阅读本书的内容时应该注意．

(3) 关于开方运算．

实数集对开方运算是不封闭的，理应再行扩张，但这已经不是本书的范围了．因此，本书只介绍正实数的算术平方根．

5．本书的读者对象与所需知识．

本书是作为小学教师大专学历的专业教材．因此，本书假定读者已具有微积分知识和一定的推理能力．所以在证明中，应用数学归纳法证明认为是可行的、用极限思想与工具也认为是可行的，例如，在第五章第二节中的闭区间套知识的介绍也被认为是可接受的．

6．分数与小数一节的内容选择．

本书在第四章第二节的分数与小数中，我们的笔墨只花在分数与小数互化的条件上．这样做，一方面对小学数学教学有帮助，另一方面说明有理数的两种表示形式——分数或小数（无限循环小数）．（这里，一个有限小数可以看成以 0 或 9 为循环节的无限循环小数）

7．对集合知识的介绍所用到的数与在数集中建立的数的概念间的关系．

在集合部分，为了讲解集合知识，同时，为了便于读者理解集合知识，我们把数（包括自然数、整数、有理数、实数）看作已知的知识，把它们作为例子，来说明集合的概念、性质、运算以及运算规律等．这里集合理论的建立并没有依赖于这些数，也没有把数作为建立集合的理论基础与依据．可以说，在本书中，集合理论是独立地建立起来的，它完全不必以后面的数集为基础．但是后面讲的数集却是以集合为基础，在集合理论上建构起数的理论的．因此，在集合中用数作为例子来说明和理解集合理论，并没有什么逻辑上的问题．

与此类似，我们在定义分数之前，在举两条线段的度量时所用到的分数的表示，只是为了说明有公度线段的度量结果是一个分数$\frac{m}{n}$（第四章第一节的分数概念的引入），它只是作为例子来说明分数作为新数引入的必要性（这时假定读者有分数知识），但并没有真正对分数进行定义. 因此，这里也不存在逻辑上的问题.

以上这些，细心的读者在阅读时是不难发现，也不难理解的.

写到这里，基本上已经把我在编写时的意图、对内容的处理与安排以及读者在阅读本书时应注意之点说出来了. 不言而喻，我相信还会有许多问题没有想到，那就只能请读者在阅读本书时去体会，或者实在有问题可以来信告诉作者，作者将尽所能以适当的方式给予解答.

我诚挚地希望本书对小学数学教师在提高数学知识素养方面有所裨益，并能通过对本书的学习激发起研究数学的兴趣.

由于作者的水平与编写时间的仓促，致使本书在选材上以及在编排上乃致于知识上不可避免地存在着缺点与错误，热切地欢迎广大读者批评指出，以便进一步修改.

方金秋

2001 年 3 月于北京教育学院

第一章　集　合

集合是数学的一个原始概念. 无论是小学数学、中学数学,还是大学数学,都要用到集合这一概念. 另外,许多的数学概念又都要以集合为基础,因此,它是许多数学概念的出发点. 我们在学习数学时,经常碰到的有概念、公理、命题、定理等等,追根溯源,它们都要建立在概念的基础之上. 数学概念是从客观世界中抽象出来的,它概括了一类事物的本质特征,从而形成了某一数学概念. 而数学教科书中的数学概念一般是以定义的形式给出的,对一个数学概念下定义时,都要借助于一些已知的概念.这些已知的概念又是被另一些已知概念来定义. 这就形成了一系列互相依赖的数学概念系统. 必然有这样的情况出现:有这样一些数学概念,它们不可能再用别的数学概念来定义,例如“量”、“计算”、“集合”等.这种概念叫做**原始概念**.对于原始概念,它既然不能用其他的数学概念来定义,那么我们就用描述的办法来刻画它的本质特征.集合作为数学的一个原始概念,我们对它的本质特征也只能用描述的办法,这是作为一名小学数学教师所必须了解的. 本书也是以集合作为原始概念来定义自然数(基数、序数)、有理数、实数的. 换言之,集合是本书的理论出发点,是推理的基石.

在小学数学课本中,也渗透集合概念.但它只是让学生初步了解集合,是为更进一步学习提供初步的预备知识.作为一名小学数学教师,应该对集合知识有更多的了解与掌握,这也是我们这一章的学习目的.

第一节　集合的概念

一、集合的概念

当我们听到“集合”这个词时，也许有人会想到同学们参加集会或做课间操时，按班级排成队伍集合在一起的情景. 这里的集合是做动词，意思是把同学们集中在一起. 而我们在数学中的集合是一个名词，它表示的是数学的一个原始概念.

数学中的集合概念是指由若干“个体”组成的一个“整体”，或是指由某一种事物组成的一个“类”.

例如：一个班的所有学生组成一个集合；一个班的所有女生组成一个集合；一个班的所有男生组成一个集合；春、夏、秋、冬这四季组成一个集合；10以内的自然数组成一个集合；全体偶数组成一个集合；全体质数组成一个集合；教室中的所有桌子组成一个集合等等.

从上述例子，我们可以认识到集合的本质属性(特征)了. 由此，我们可以用如下的语言对集合进行描述：

具有一定范围的、确定的对象所组成的全体，叫做集合(简称集). ①

组成一个集合的每一个对象，都叫做这个集合的元素(也称元).

对于集合，一般用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示；而组成集合的元素，一般用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.

---

① 这里对集合的概念是采用“描述”的办法，而不是一般的定义. 其次，这里的集合是普通集合，它具有确定的对象和一定的范围，这就区别了那种界限不分明的模糊集合.

为了进一步理解集合的内涵，有必要把集合的特征归纳如下：

1. 集合是一个整体. 集合是由某一类事物（对象）的全体构成的，而不是指其中的任何个别事物. 这就是集合的整体性特征.

例如，全体自然数组成的集合称为自然数集合，简称自然数集. 自然数集是个整体，而不是指某个自然数. 每个自然数是自然数集的每一个元素.

2. 集合中的每一个元素对于该集合而言是确定的. 当给定了一个集时，就规定了这个集合是由哪些元素组成的. 反之，一个集合确定由哪些元素组成，那么这个集合也就确定了. 这里，对任何一个事物（或对象），我们可以判定它是否属于这个集合，要么属于这个集合，要么不属于这个集合，二者必居其一，且仅居其一. 这就是集合元素的确定性特征.

例如，N 是自然数集合，我们可以判定：自然数 3 属于这个集合，$\sqrt{2}$ 不属于这个集合.

3. 集合中的每一个元素各不相同. 换言之，在一个集合中，所有相同的元素只算作一个来看待. 这就是集合的元素的互异性特征.

例如，一个由 3，3，2，2，2，1 所组成的集合，实际上它就是由 3，2，1 三个元素所组成的集合.

4. 集合只与组成它的元素有关，而一般地讲，与它的元素顺序是无关的. 也就是集合的元素一般具有无顺序性特征.

例如，由 3，2，1 组成的集合与由 1，2，3 所组成的集合是同一个集合.

这里应该指出的是，集合的元素具有无顺序性的特征只是对一般情况而言的. 有时为了研究一些特殊的集合，我们可以规定集合元素的顺序关系. 在这种情况下，集合的元素就有顺序了. 这种集合称为有序集合（参见本章第六节的有关内容）.

在集合的特征中，集合元素的确定性特征表明元素与集合的