精·品·课·程·立·体·化·教·材·系·列

中国科学院规划教材

运筹学

张伯生/主编
范君晖　田书格/副主编

科学出版社
www.sciencep.com

精品课程立体化教材系列

运 筹 学

张伯生 主编

范君晖 田书格 副主编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书系统地介绍了运筹学的主要内容，其中包括线性规划、对偶问题与灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、图论、动态规划、排队论、存贮论和决策论的基本概念、基本理论和方法。本书针对实际问题建立模型并进行应用分析，各章都有详细的案例分析，在内容上淡化较复杂的理论论述和证明以及复杂的人工计算，在方法上编入用 Matlab 计算数学模型的内容。

本书可作为大专院校、成人教育、函授学院专科生、本科生、研究生和 MBA 学生的教材和教学参考书，也可作为各类专业人员的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

运筹学/张伯生主编. —北京：科学出版社，2008
(精品课程立体化教材系列)
ISBN 978-7-03-020732-6

Ⅰ. 运… Ⅱ. 张… Ⅲ. 运筹学-高等学校-教材 Ⅳ. 022

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 189330 号

责任编辑：林 建 卜 新/责任校对：张怡君
责任印制：张克忠/封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2008 年 1 月第一次印刷 印张：22
印数：1—5 000 字数：413 000

定价：32.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前言

运筹学是研究各种广义资源的运用、筹划以及相关决策等问题的一门近代新兴学科，在我国已有50多年历史，其目的是根据问题的需求，通过数学的分析和运算，做出综合性的、合理的优化安排，以便更有效地发展有限资源的效益。运筹学这个名称，最早于1938年出现在英国，英国人称之为operational research。1942年，美国开始从事这方面的研究工作，称之为operations research。我国运筹学的先驱者从《史记》"运筹于帷幄之中，决胜于千里之外"中摘取"运筹"两字作为这门学科的名称，既显示其军事的起源，也表明其朴素的思想和原理早已出现在几千年之前的中国封建社会。

在学习这门课程之前，有必要先概要地介绍本学科的发展、各领域的应用、定量分析解决实际问题的思路以及本书编写的特点和当今社会发展对本学科培养人才的需求。

一、运筹学学科的发展

20世纪30年代后期，英国军事管理部门召集了一批科学家(绝大部分为自然科学家)，研究与防御有关的战略和战术问题，以便更有效地利用有限的军事资源，最成功地使用现有的武器装备。早期的工作包括研究新式雷达的有效使用、野外火炮控制设备的效能以对付德国空中力量越来越严重的威胁。在鲍德西(Bawdsey)成立了关于作战控制技术的研究机构。1938年，鲍德西研究小组负责人A. P. Rowe把他们从事的工作称为运筹学(operational research)。英国运筹小组的工作促使美国军事管理部门也开始进行类似的活动，他们的工作包括反潜

艇策略和深水炸弹起爆、深度的研究，美国人称之为 operations research。这些早期的运筹学工作所使用的方法一般来说都极为浅显，但成效显著。人们开始认识到，利用定量分析方法研究实际问题、建立教学模型等是行之有效的。

第二次世界大战以后，军事部门转而研究在各种作战条件下的现代和未来战争中武器系统的有效的、正确的、客观的分析和评价。企业部门的管理者们也注意到运筹小组的成就，想利用运筹学方法解决产业部门内部新型的管理问题，提高生产率，增加利润，减少成本。政府部门在制定计划、进行决策时也试图采用运筹方法。1959 年，国际运筹学会联合会(IFORS)成立，标志着运筹学作为一门学科，已经成为现代科学体系中一个重要成分。50 年来，计算机科学与计算技术的成就，也对运筹学的发展起着极大的推动作用。与此同时，运筹学本身也获得了严密的数学基础，如线性规划、动态规划、非线性规划、图论网络等分支日趋成熟。以后的时间运筹学被普遍公认为一门学术性和应用性很强的学科。

20 世纪 50 年代后期，在钱学森、华罗庚、许国志等老一辈科学家的推动下，运筹学被引入中国，并得到迅速发展。改革开放以后，随着我国经济大规模的发展、市场竞争的加剧、产品更新速度的加快、科技水平和管理水平的提高，运筹学在经济管理领域得到更加广泛的运用。运筹学的研究也进入一个新的快速发展时期。运筹学作为一门优化决策的学科，受到前所未有的重视。我国高校的许多专业，如管理科学、应用数学、信息技术、工程管理、交通运输等专业都将其作为重要的专业基础课程之一。

二、运筹学的分支和研究问题的思路

基于研究的不同应用领域，运筹学逐步建立起描述各种活动的不同模型，发展各种不同的理论，从而形成不同的运筹学分支。时至今日，运筹学仍在不断发展和扩充，最主要的分支有以下几个：

(1) 线性规划(linear programming)。线性规划是研究在线性不等式或等式的限制条件下，使用某一个线性目标取得最大(或最小)的问题。20 世纪 40 年代末美国数学家 G. B. Dantzig 的求解方法，促使线性规划的方法和应用飞速发展。由于理论和计算方法比较成熟，线性规划在工业、农业、军事、经济、管理等方面有很多成功应用的实例。

(2) 整数规划(integer programming)。在线性规划模型中，一部分或全部变量要求为整数，这就构成了整数规划问题。最具代表性的解决整数规划的方法是割平面法和分支定界法，它们的共同特点是能化为多次线性规划的求解。

(3) 非线性规划(nonlinear programming)。在建立类似于线性规划的模型中，至少有一个非线性函数出现(无论是目标函数，还是约束条件)，就称之为非线性规划问题。近 20 年来，非线性规划有了飞速发展。

(4) 多目标规划(multiobjective programming)。它是研究具有多个目标的规划问题的理论与方法的一个新分支，应用广泛。

(5) 动态规划(dynamic programming)。它是运筹学最主要的分支。B. Bellman 等提出了解决多阶段决策这类问题的最优化理论，创建了解决这类问题的新方法——动态规划。

(6) 图论(graph theory)。运筹学中许多问题可以化为纯图论与网络问题，用图论的理论和方法求解十分方便。它也是运筹学的一个重要分支。

(7) 对策论(theory of games)。它是 J. Von Neumann 等受经济问题的启发而研究的一类具有某种特性的博弈问题。研究的主要对象是带有斗争行为的现象，在政治、军事、工业、农业、交通等许多领域有着广泛应用。

(8) 决策分析(decision analysis)。它研究的目的是从若干行动方案中合理地分析和决定满足一定要求的方案，是一个既很实用又很有前途的运筹学新分支。

(9) 排队论(queuing theory)。排队论又称随机服务系统。它是研究系统拥挤现象和排队现象的一门学科。丹麦数学家 A. K. Erlang 做了开创性工作。它在管理类各领域都有十分广泛的应用。

(10) 存贮论(inventory theory)。它研究在各种不同情况下的库存问题，形成数学模型，选择合理策略，使各项费用总和为最小。

运筹学的研究领域和应用领域不断扩大。最近若干年，与它有关的分支也越来越多。本书主要讲述和研究以上 10 个主要分支。

运筹学研究问题的主要思路是从系统分析问题描述到模型的建立与修改、完善，再到模型求解和检验，最后是结果分析与实施。运筹学的应用往往涉及大量复杂的计算。没有计算机技术的迅速发展，就没有运筹学的今天，运筹学的广泛应用离不开计算机算法。同时，也应注意到，计算机对模型求解的结果不是问题的最终答案，而仅仅是为实际问题的处理提供决策基础的信息。

三、本书的编写特点

进入 21 世纪，我国社会各领域都迅速发展，科学的发展提出了培养管理科学高素质人才的要求。运筹学是管理科学的一门重要基础课。运筹学教育面临新的挑战和问题，根据人才要求，我们应从教学目标、教学内容和教学手段三方面改革。在培养目标上，要求加强对解决实际能力的培养，要求加强结合实际的实践环节能力的培养，要求培养学生能真正走向社会，把学到的知识用到实际工作中。这既要求我们抛弃过去光讲理论而轻视实践的教学模式，也要求我们改变过去只讲简单模型而不重视实际问题的教学模式。同时，要求我们改变过去只讲简单问题计算而放弃实际问题模型计算的教学习惯。为了做到这一点，我们努力做到加强针对实际问题建立模型和举例分析的内容，培养学生针对实际问题建立教学模型的能

力，在内容上淡化较复杂的理论论述和理论证明以及复杂的人工计算内容。先要学会把理论知识用到实践中，然后需要的时候再去研究理论问题。在方法上首次编入用 Matlab 方法计算运筹学的数学模型的内容。我们认为，运筹学的发展和广泛应用与计算方法的应用是紧密联系的。没有计算机的应用，就没有用运筹学解决实际问题的可能。希望学生通过学习本书，不但能掌握运筹学的基本内容，建立针对实际问题的运筹学的数学模型，而且能用 Matlab 软件计算这些问题，分析计算结果，把运筹学的教学模型、科学计算渗入科学决策的管理方法中，成为新一代科学管理人才，为实现管理现代化做出贡献。

根据培养目标的要求，本书在编写过程中努力做到如下几点：

(1) 重视运筹学基本理论、基本概念和基本方法的学习和训练，淡化较复杂的基础理论的论述证明，淡化较复杂的计算方法的指导训练。

(2) 加强针对实际问题建立运筹学模型和案例分析的内容，重点培养学生针对实际问题建立教学模型的能力。

(3) 各章节都编入用 Matlab 算法计算本书实际问题的计算机程序。用 Matlab计算较复杂的实际问题的结果。培养学生学习用 Matlab 计算运筹学数学模型的能力。

(4) 书中部分案例是科研项目中的研究成果。通过学习这些案例，学生在创新能力方面得到强化。

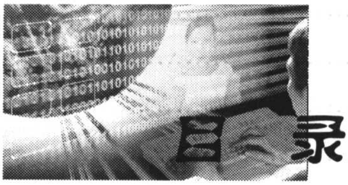
在这里，我们不打算介绍运筹学中各种一般模型的 Matlab 算法，而是通过本书实用案例编写的 Matlab 程序的学习和启迪，使管理领域的工程技术人员和学生掌握实际问题的计算，用 Matlab 算法来实现运筹。

参加本书编写工作的有范君晖、田书格、高俊芳、张丽、周晋、张伯生等长期从事运筹学教学、研究工作的老师。谢鹏杨博士校对全部 Matlab 算法，李红艳博士对全书内容做了详细校对。姜振光、袁霖东、金文惠、储春兰、蔡丹丹、王伟、钱昊睿、曹晓宇、王文婷等同学搜集有关资料、案例，并做了 Matlab 程序等编写工作。编者在此对他们的辛勤劳动表示感谢。本书是精品课程建设、校重点学科建设(编号：XK0704)的成果，得到了有关方面的资助。

由于编者水平有限，缺点和错误在所难免，不足之处请读者谅解。

编 者

2007 年 7 月于上海



前言

第1章 线性规划与单纯形法

学习目标

√ 了解线性规划模型特征并能根据实际问题写出线性规划模型

√ 掌握线性规划化标准型的方法

√ 掌握线性规划的解的概念，并能够用图解法求解线性规划问题

√ 熟练掌握线性规划的单纯形法

√ 利用 Matlab 求解线性规划问题的最优解

引言

线性规划是应用数学模型对所研究的问题进行表述。线性(linear)这个词是指模型中数学表达式的形式。规划(programming)本质上是计划的同义词。因此线性规划是用线性数学模型表示不同的生产活动、营销活动、金融活动或其他活动的计划。

单纯形方法是美国数学家丹捷格(G. B. Dantzig)1947 年提出的一般线性规划求解方法，自此以后线性规划在计算上趋向成熟，其应用也日趋广泛和深入。

1.1 线性规划数学模型

1.1.1 问题的提出

线性规划应用的问题种类繁多，形式各异，主要分为四类线性规划问题。前三

类问题分别是资源分配问题、成本效益问题以及网络配送问题。例 1.1、例 1.2、例 1.3讨论了这三类问题。这些线性规划问题其共同特征是决策所基于的约束条件性质，三类线性规划问题约束分别是资源约束、收益约束、确定需求约束。更多的实际问题包含至少有两种以上的约束。这类问题不能绝对归属于这三类中的一类，于是把这第四类线性规划的问题称为混合问题。

例 1.1 资源分配问题。

某工厂近期要安排生产甲、乙两种产品，产品甲需要用原料 A，产品乙需要用原料 B，由于两种产品都在一个设备上生产，且设备使用时间有限，管理者必须合理安排两种产品的产量，使得在资源有限的条件下获得最大的利润。因此这个问题的决策目标是收益的最大化，研究者根据这个目标需要收集以下相关数据：

(1) 工厂两种原料存量以及可用设备工时数；

(2) 甲、乙两种产品的单位产品需要的原料和设备工时数；

(3) 甲、乙两种产品的单位产品利润。

这些数据可以通过调研或估算得出，如表 1.1 所示。

表 1.1

	产品甲	产品乙	资源限制
原料 A	1	0	6
原料 B	0	2	8
设备	2	3	18
单位利润(百万)	4	3	

为建立模型，引入变量如下：

$$x_1 = \text{产品甲的数量}$$

$$x_2 = \text{产品乙的数量}$$

$$Z = \text{利润}$$

由表 1.1 最后一行知

$$Z = 4x_1 + 3x_2$$

目标是如何确定 x_1 和 x_2，使得利润 Z 最大，同时需要满足资源约束。

对于原料 A 和原料 B，有

$$x_1 \leqslant 6, \quad 2x_2 \leqslant 8$$

对于设备工时，有

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 18$$

此外，甲、乙两种产品数量不可能是负值，因此，有如下对变量的非负约束：

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0$$

于是，问题的数学模型现在可以用代数式表述如下：

$$\max Z = 4x_1 + 3x_2$$

满足：

$$x_1 \leqslant 6 \tag{1.1}$$

$$2x_2 \leqslant 8 \tag{1.2}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 18 \tag{1.3}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0 \tag{1.4}$$

实际上这是求一个线性函数在一组线性约束条件下的最大值问题，称之为线性规划问题模型。在以上模型中，将 x_1、x_2 称为决策变量，$Z=4x_1+3x_2$ 为目标函数，式(1.1)～式(1.3)为函数约束，式(1.4)为非负约束。

从以上过程我们可以归纳出根据实际问题建立线性规划模型的步骤：

(1) 根据管理层的要求确定决策目标和收集相关数据。

(2) 确定要做出的决策，引入决策变量。

(3) 确定对这些决策的约束条件和目标函数。

例 1.2　成本效益平衡问题。

某饲料公司希望用玉米、红薯作原料配制一种混合饲料，各种原料包含的营养成分和采购成本都不同，公司管理层希望能够确定混合饲料中的各种原料数量，使得饲料能够以最低成本达到一定的营养要求。研究者根据这一目标收集到的有关数据如表 1.2 所示。

表 1.2

营养成分	每公斤玉米	每公斤红薯	每公斤最低要求
碳水化合物	8	4	20
蛋白质	3	6	18
维他命	1	5	16
采购成本(元/公斤)	0.8	0.5	

为建立线性规划模型，我们引入变量如下：

x_1＝混合饲料中的玉米数量；

x_2＝混合饲料中红薯的数量。

目标函数 $Z=0.8x_1+0.5x_2$，表示产量的成本函数，即如何确定 x_1、x_2 使得成本 $Z=0.8x_1+0.5x_2$ 最低且满足最低营养要求的约束，这些约束条件是

碳水化合物要求：$8x_1+4x_2 \geqslant 20$。

蛋白质物要求：$3x_1+6x_2 \geqslant 18$。

维他命物要求：$x_1+5x_2 \geqslant 16$。

另外非负约束：$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$。

因此这个问题的线性规划模型为

$$\min Z = 0.8x_1 + 0.5x_2$$
$$\text{s. t.} \begin{cases} 8x_1 + 4x_2 \geqslant 20 \\ 3x_1 + 6x_2 \geqslant 18 \\ x_1 + 5x_2 \geqslant 16 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2 \end{cases}$$

其中,"s. t."是"subject to"的缩写,意思是"受约束于……"。

例 1.3 物流网络配送问题。

某物流公司需要将甲、乙、丙三个工厂生产的一种新产品送到 A、B 两个仓库,甲、乙两个工厂的产品可以通过铁路运送到仓库 A,数量不限;丙工厂的产品可以通过铁路运送到仓库 B,同样,产品数量不限。由于铁路运输成本较高,公司也可以考虑由独立的卡车来运输,可将多达 80 单位的产品由甲、乙、丙三个工厂运到一个配送中心,再从配送中心以最多 90 单位的载货量运到各个仓库。公司管理层希望以最小的成本运送所需的货物。

为了建立该问题的数学模型,必须先了解这一网络配送问题的活动和要求。该问题涉及三个产品的生产和各线路的运输量,由于产量给定,所以决策重点是运输水平,即各线路的运输量。

首先,需要收集每条线路上的单位运输成本和各工厂产品的产量以及各仓库分配量等数据,如表 1.3 所示。

表 1.3

	配送中心	仓库 A	仓库 B	运输量
工厂甲	\$3.0	\$7.5		100
工厂乙	\$3.5	\$8.2		80
工厂丙	\$3.4		\$9.2	70
配送中心		\$2.3	\$2.3	
需求量		120	130	250

为了更清楚地说明问题,我们用网络图来直观表示该配送问题(图 1.1),其中,v_1、v_2、v_3 分别表示甲、乙、丙三个工厂,节点 v_4 表示配送中心,节点 v_5、v_6 表示两个仓库;每一条箭线表示一条可能的运输线路,并给出了相应的单位运输成本,对运输量有限制的路线的最大运输能力也同时给出。

我们要解决的是各条线路最大运输量,引入变量 x_{ij} 表示由 v_i 经过路线(v_i,v_j)运输到 v_j 的产品数。问题的目标是总运输成本最小化,总运输成本可以表示为

$$\begin{aligned} \text{总运输成本} = & 7.5x_{15} + 3x_{14} + 8.2x_{25} + 3.5x_{24} + 2.3x_{45} + 3.4x_{34} \\ & + 2.3x_{46} + 9.2x_{36} \end{aligned}$$

相应的约束条件包括对网络中的每个节点 $v_i(i=1,2,\cdots,6)$的供求平衡约束。

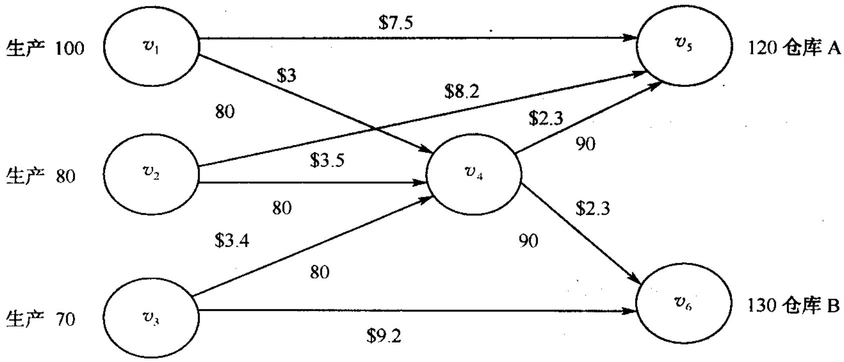


图 1.1

对生产节点 v_1、v_2、v_3 来说，由某一节点运出的产品数量等于其产量，即

$$x_{15}+x_{14}=100$$
$$x_{25}+x_{24}=80$$
$$x_{34}+x_{36}=70$$

对配送中心 v_4 运进的产品数量等于运出的产品数量，即

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}=x_{45}+x_{46}$$

对仓库 v_3、v_5，运进的产品数量等于其需求量，即

$$x_{15}+x_{25}+x_{45}=120$$
$$x_{46}+x_{36}=130$$

此外，对网络中有运输容量限制的路线的约束是：该路线上的运输产品数量不超过该线路的运输能力，即

$$x_{14}\leqslant 80,\quad x_{24}\leqslant 80,\quad x_{34}\leqslant 80,\quad x_{45}\leqslant 90,\quad x_{46}\leqslant 90$$

并且，所有 $x_{ij}\geqslant 0$（非负约束）。因此，这个问题的线性规划模型为

$$\min Z=7.5x_{15}+3x_{14}+8.2x_{25}+3.5x_{24}+2.3x_{45}+3.4x_{34}+2.3x_{46}+9.2x_{36}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}x_{15}=x_{15}=100\\ x_{25}+x_{24}=80\\ x_{34}+x_{36}=70\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=x_{45}+x_{46}\\ x_{15}+x_{25}+x_{45}=120\\ x_{46}+x_{36}=130\\ x_{14}\leqslant 80,x_{24}\leqslant 80,x_{34}\leqslant 80,x_{45}\leqslant 90,x_{46}\leqslant 90\\ x_{ij}\geqslant 0\end{cases}$$

从以上的几个例子可以看出，线性规划问题有如下共同特征：