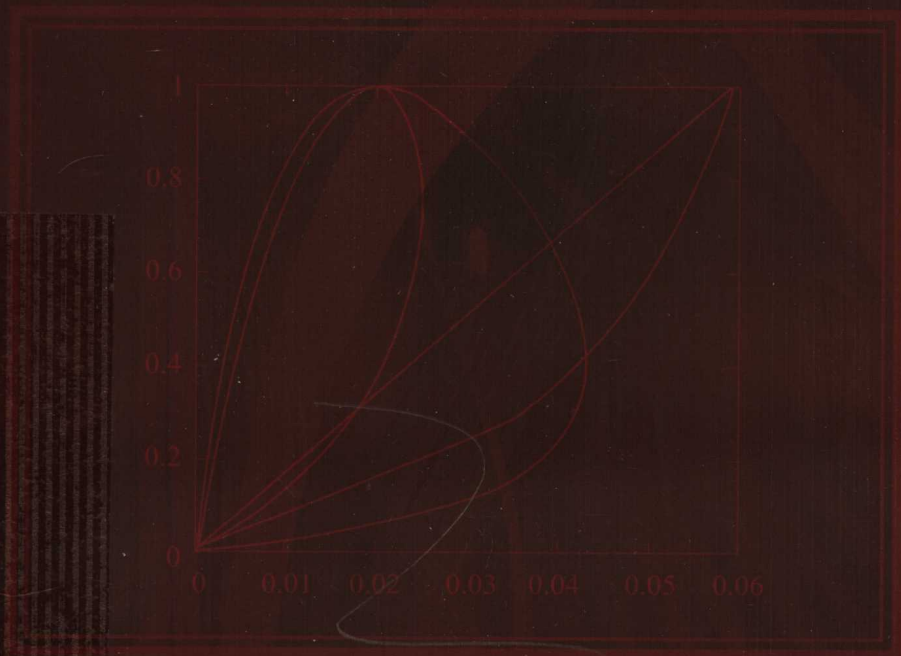


国家自然科学基金资助出版

斯特林机的有限时间 热力学优化

吴锋 陈林根 孙丰瑞 喻九阳 著



化学工业出版社

0414. 1/23

2008

国家自然科学基金资助出版

斯特林机的有限时间 热力学优化

吴 锋 陈林根 孙丰瑞 喻九阳 著



化学工业出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 (CIP) 数据

斯特林机的有限时间热力学优化/吴锋等著. —北京:
化学工业出版社, 2008.1
ISBN 978-7-122-01507-5

I. 斯… II. 吴… III. 热力学-研究 IV. 0414.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 177962 号

责任编辑: 曾照华

文字编辑: 陈 雨

责任校对: 战河红

装帧设计: 潘 峰

出版发行: 化学工业出版社 (北京市东城区青年湖南街 13 号 邮政编码 100011)

印 装: 北京市兴顺印刷厂

850mm×1168mm 1/32 印张 7½ 字数 199 千字

2008 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询: 010-64518888 (传真: 010-64519686) 售后服务: 010-64518899

网 址: <http://www.cip.com.cn>

凡购买本书, 如有缺损质量问题, 本社销售中心负责调换。

定 价: 30.00 元

版权所有 违者必究

前 言

本书是笔者长期从事斯特林热机（制冷机）有限时间热力学研究的总结，想通过本书来探索怎样把有限时间热力学应用于斯特林热机（制冷机）的优化分析中。

新型热力机械装置的发展已经突破了经典热力学平衡态分析方法的基础。利用现代热力学理论来分析和解决热力工程实践中的有关热力学问题已成为必然。在这一背景下诞生的有限时间热力学，为实际热力装置的研究提供了一个有效的武器。斯特林（ST）机（发动机或制冷机）具有效率高、振动小、噪声低、结构简单、可靠性高、寿命长等优点，在动力工程领域和低温工程领域有着广泛的应用。

传统工程热力学方法的中心是在平衡的前提下，通过参数优化选择，得到最高的能量转化效率，它无法解决系统的整体优化问题。对热力动力系统的整体研究，迫切要求有一个工程方法来解决其整体性能优化问题。笔者长期从事有关领域的有限时间热力学研究，深感有限时间热力学理论是工程师把热力学和工程实际连接起来的桥梁。所以本书想通过对斯特林机（热机或制冷机）的有限时间热力学研究的实例来探索建立这种桥梁的可能性。

本书利用有限时间热力学理论和方法作为分析工具，对斯特林机（热机和制冷机）的不可逆特性、整机的协调以及性能参数的优化进行了较为全面和系统的论述。结合传热学、不可逆过程热力学、工程热力学、非平衡态统计理论以及热声理论等现代理论，探索了斯特林循环的有限时间热力学本质。

本书建立了斯特林机的有限速率模型和量子统计力学模型，采用多种目标函数，对斯特林机进行了整体优化。本书对于斯特林机

的设计、模型评估以及运行参数选择，都具有十分重要的参考价值。

全书共分6章，第1章和第2章是有关的学科基础。第3章通过内可逆循环模型来分析斯特林机的有限时间热力学优化问题。在此基础上，第4章建立了斯特林机的不可逆性循环模型，并对整机性能进行了优化分析。第5章利用非平衡量子理论，对斯特林机工质的量子性质以及对整体性能的影响进行了研究。第6章则根据热声网络理论，对斯特林机的重要部件——回热器进行了探讨和研究。为方便于读者做进一步深入研究，本书末给出了一定数量的参考文献。

本书得到了武汉工程大学优秀学术著作出版资助项目和国家自然科学基金（No：50676068）的支持和资助，谨致深切的谢意。

吴 锋 陈林根 孙丰瑞 喻九阳

2007 年 12 月于武汉

目 录

第 1 章 有限时间热力学理论及其工程应用背景	1
1.1 引言	1
1.2 有限时间热力学的主要研究内容和研究方法	4
1.3 性能指标的优化及其在工程中的应用	14
1.4 有限时间热力学的发展前景与展望	16
第 2 章 斯特林机研究的热力学方法	18
2.1 引言	18
2.2 斯特林循环及其热力计算	19
2.3 斯特林机的有限时间热力学优化	23
第 3 章 内可逆循环优化	25
3.1 工质与热源间的传热规律对斯特林机优化性能的影响	25
3.2 有限热源的影响	37
3.3 斯特林制冷机的焓输出率优化	43
3.4 斯特林发动机的焓效率	52
第 4 章 不可逆循环优化	58
4.1 热漏和不可逆性对斯特林制冷机性能的影响	58
4.2 不完全回热对斯特林发动机性能的影响	67
4.3 不可逆斯特林制冷机制冷率和性能系数的优化关系	76
4.4 斯特林制冷机的峰值压力	93
4.5 太阳能驱动斯特林发动机的最优性能	98
4.6 斯特林磁制冷机的优化	107
第 5 章 非平衡量子统计优化	118
5.1 引言	118

5.2	量子斯特林机循环的理论模型	122
5.3	经典极限下量子斯特林阶梯循环的最优化	123
5.4	最大“率”目标优化	130
5.5	正反向量子斯特林循环有限时间热力学优化准则	143
5.6	量子斯特林循环的协调优化性能	149
5.7	量子斯特林循环有限时间炯经济最优性能	156
5.8	斯特林磁制冷循环的量子统计优化	164
第 6 章	回热器热声理论研究	174
6.1	引言	174
6.2	热致声的热力学机理	178
6.3	热声微循环的有限时间热力学分析	183
6.4	热力学第二定律效率分析	190
6.5	不可逆熵产分析	196
参考文献		204
附录	全书通用符号一览表	225

第1章

有限时间热力学理论及其工程应用背景

1.1 引言

1824年，法国青年工程师卡诺提出了著名的卡诺循环，即由两个可逆等温过程和两个可逆绝热过程所构成的循环。以卡诺循环为其工质循环方式的热机、制冷机和热泵，被分别称为卡诺热机、卡诺制冷机和卡诺循环。在对热机的最大可能效率问题进行了深入的理论研究之后，卡诺导出了工作于温度分别为 T_h 和 T_c 的高、低温热源之间的卡诺热机的能量转换效率为

$$\eta_c = 1 - \frac{T_c}{T_h} \quad (1-1)$$

为了纪念卡诺的功绩，后人把式(1-1)称为卡诺效率。从式(1-1)可知：①要完成卡诺循环，必须有高温和低温两个热源；②热源和冷源之间的温差越大，卡诺热机的效率越高；③卡诺循环的效率总是小于100%（除非 $T_c = 0$ ）。热机的效率能不能达到100%？如果不能达到100%，最大可能的效率是多少？有关这些问题的研究，促进了热力学第二定律的建立。

为了找到提高热机效率的途径，卡诺又于1826年提出了卡诺定理。卡诺指出，工作于两个恒温热源间的一切不可逆热机的效率，不可能高于（实际上是小于）工作于相同热源间的可逆卡诺热机的效率。换句话说，卡诺效率式(1-1)是工作于相同热源间的一切实际热机的效率界限。卡诺定理指出了提高热机效率的途径。就过程而言，应当使实际的不可逆热机尽量地接近可逆热机；就理论

而言,应当尽量提高两热源间的温差。对热机来说,降低低温热源温度受到环境温度的限制,因而增大热源间温差主要是提高高温热源的温度。

卡诺效率和卡诺定理为经典热力学的创立奠定了理论基础。一个多世纪以来,卡诺效率和卡诺定理对热力学理论的发展、热机及热力工程的技术进步都起到了巨大的作用。

但是,要达到卡诺效率,热机必须完全可逆地运行,即在整个热力过程中保持内平衡,系统和环境的总熵不变。这就要求过程进行的时间无限长。这与实际情况显然存在一定的差异。因此,第二次世界大战以后,经典热力学理论已不能满足现代热机以及热力工程技术的发展需要。热力工程的技术进步越来越需要考虑不可逆过程影响的新理论来指导,有限时间热力学就应运而生。

有限时间热力学理论的最初发展是基于对所谓可逆循环的分析。内可逆卡诺循环不同于可逆卡诺循环。它考虑了循环中工质与热源间存在热阻,传热需要时间,并遵从一定的规律,从而引入了时间参量和不可逆过程的演化规律。

Novikov, Chambadal 和 Curzon, Ahlborn 等人在对内可逆卡诺循环进行深入分析的基础上,分别于 1957 年和 1975 年提出了 c-A 效率

$$\eta_{cA} = 1 - \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^{0.5} \quad (1-2)$$

c-A 效率是内可逆卡诺热机在最大输出功率时的效率。它的导出是有限时间热力学诞生的重要标志,为具有有限速率和有限周期特征的热机提供了新的分析方法。

自 c-A 效率导出以来,特别是在 Curzon 和 Ahlborn 的工作之后,有限时间热力学得到了持续稳步的发展。在加拿大自然科学基金,美国能源部科学基金,美国空军发展基金,美国国家自然科学基金,美国-以色列联合科学基金,中国自然科学基金以及中国部分省自然科学基金的资助下,国内外众多学者研究了各类工程热力

装置的有限时间热力学性能优化问题。到目前为止,国内外已有数千篇论文发表在诸如“Am · J · Phys.”、“J. Chem. Phys”、“J. Appl. Phys.”、“Energy.”、“Sol, Energy”、“Phys. Today”、“J. Non-Equilib. Thermodyn.”、“ibid”、《科学通报》、《工程热物理学报》、《太阳能学报》、《内燃机学报》、《制冷学报》、《低温工程》、《大学物理》、《应用科学学报》等数十种重要刊物上。这些工作在为这门新兴学科奠定理论基础的同时,也取得了许多富有实际应用价值的成果。50年来,随着理论的不断发展和完善,有限时间热力学的研究对象也从内可逆循环扩展到内不可逆循环,从卡诺热机扩展到几乎遍及所有的工程热力装置和系统,如Otto发动机、Diesel发动机、一般内燃机、布雷顿循环燃气轮机、热泵、各类制冷机、空调、太阳能转换装置、海洋热能转换装置、地热利用装置、超导装置、光热机、朗肯热机、热电装置、化学装置、电化学装置、化学反应系统、地球风能系统、天气预报、材料熔化、量子热力系统、激光系统等。对热源模型的研究,也从无限热源深入到对有限热容热源,即变温热源的研究之中。除了两热源系统外,对内可逆三热源制冷或泵热循环的研究也取得了较大的进展。在优化目标函数的选取方面,也由以往的最大“率”(即输出功率、制冷率和泵热率)目标,扩展到用多种目标对系统进行优化,如经济(或称热经济)最大利润率优化、生态学优化准则、最小熵产率优化、函数优化、最小传热面积优化、功率密度、制冷率密度和泵热率密度优化,以及其他协调目标函数优化等。这些研究工作都取得了由经典热力学理论不可能取得的新的重要成果。这些研究成果既丰富了有限时间热力学的研究内容,又扩展了它的应用范围,同时还促进了理论自身的发展。

所谓有限时间热力学,就是研究在有限时间内发生的带有热现象的过程的最优效果,在有限时间内运行的带有热现象的装置和系统的最优性能的一门科学。Andresen等首次把这类有限时间热力过程最优极值问题称为“有限时间热力学”,而Orlov等则

称之为“优化热力学”或“不可逆过程极值问题的最优控制”。也有学者将其称为“内可逆热力学”。在短短 50 年的时间里，特别是在近 20 多年的时间里，有限时间热力学能取得这样的发展，是由它本身的性质所决定的。有限时间热力学是由于实际需要而建立起来的一门新兴学科。它以使热力学理论能在各相关科学技术领域中，特别是在工程科学中得到更广泛、更有力的应用为己任。从本质上说，有限时间热力学仍属于非平衡态热力学的范畴，同样是研究非平衡系统不可逆过程的性质。但是，在处理问题的方法上，有限时间热力学有别于传统的非平衡热力学。它侧重于系统整体的描述，它利用变分原理、最优控制理论以及其他一些数学工具，结合不可逆过程的演化规律，考察过程变化的整体（或协调）最佳效果。有限时间热力学考察各主要不可逆因素在有限时间过程中所产生的根本性影响。寻求最优的时间轨迹和普遍的性能界限。这就使它能够解决传统的非平衡态热力学和工程热力学所未能解决的一大类非平衡和不可逆问题，具有广阔的应用前景。

1.2 有限时间热力学的主要研究内容和研究方法

1.2.1 内可逆循环模型及研究方法

可逆的卡诺循环是一个理想的循环过程。实际循环由于存在热阻、热漏和摩擦等不可逆因素，与理想循环有较大的差距。热阻的存在，使传热过程以非零的速率进行。只考虑热阻的影响，忽略其他不可逆因素而引入的一个新的理论循环模型，叫内可逆循环。内可逆卡诺循环具有如下几点特征：

① 工质内部经历准静态卡诺循环；

② 由于热阻的影响，在等温过程中，工质内部温度 T_1 和 T_2 不同于热源温度 T_h 和 T_c ，由热力学第二定律，有： $T_h > T_1 > T_2 > T_c$ ；

③ 除热阻外，忽略其他不可逆性。

在上述模型的基础上, 如果进一步假设绝热时间与等温过程时间相比可以忽略, 并设工质与热源间的热传导满足牛顿线性导热定律

$$Q_1 = \alpha(T_h - T_1)t_1 \quad (1-3)$$

$$Q_2 = \beta(T_2 - T_c)t_2 \quad (1-4)$$

式中, t_1 和 t_2 分别是两个等温吸热、放热过程的经历时间。由此可知活塞式卡诺热机的循环周期为

$$\tau = t_1 + t_2 \quad (1-5)$$

由式(1-3)~式(1-5)以及工质内可逆循环的性质, 可得内可逆卡诺热机输出功率与热效率之间的制约关系

$$P = \alpha\beta\eta \left(T_h - \frac{T_c}{1-\eta} \right) / (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 \quad (1-6)$$

上式对 η 求极值, 即可得到热机的最大输出功率

$$P_m = \frac{\alpha\beta T_h \eta_{cA}^2}{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} \quad (1-7)$$

式中, η_{cA} 是与 P_m 对应的热效率, 即由式(1-2)所决定的 c-A 效率。由式(1-6)和式(1-7)两式可知, 内可逆卡诺热机不仅有功率输出, 而且存在着一个最大的功率输出。最大功率的数值与热传导系数以及高低温热源的温度有关。从式(1-2)可知, 在最大功率输出时, 内可逆卡诺热机的热效率 η_{cA} 只与高低温热源温度有关, 但 η_{cA} 比由式(1-1)决定的卡诺效率 η_c 要小。事实上, 正是因为存在这一差别, 才引入内可逆卡诺循环这一重要概念。由于 η_{cA} 考虑了热阻这一不可逆性的影响, 因此, η_{cA} 要比 η_c 更接近实际情况。关于 η_{cA} , 早期学者强调它是一种有关热机的新的性能界限, 即有限时间热力学性能界限。但现在我们强调的是输出功率与热效率之间的优化协调。这就为有限时间热力学理论的拓展以及在工程中的进一步应用铺平了道路。

对于内可逆反向卡诺循环, 即所谓内可逆卡诺制冷机和内可逆卡诺热泵, 也可用拉格朗日乘子法和一般函数极值法导出有关最大

制冷率 R 与制冷系数 ϵ 之间的关系以及最大泵热率和泵热系数之间的关系。

以上论述了活塞式卡诺热机（制冷机或热泵）内可逆循环的分析方法。在实际工程中，还有一类具有重要意义的循环模式，即定常态连续流循环模型。例如，对于蒸汽动力装置，工质相继流过蒸发器、膨胀机、冷凝器、泵等设备而完成循环。稳定工况时，这种装置中工质的全过程可以看成是定常态连续流。孙丰瑞、陈林根、陈文振对定常态连续流工程循环进行了长期、深入和广泛的研究。他们早在 20 世纪 80 年代就建立了定常态连续流的内可逆卡诺循环模型，通过对传热面积的深入分析，得出了最小传热面积原理，并在蒸汽动力装置的优化评估中得到应用。

对于两热源定常态连续流热机的内可逆卡诺循环，工质与高低温热源间的传热流率可写为如下形式

$$\dot{Q}_1 = \alpha_1 (T_h - T_1) F_1 \quad (1-8)$$

$$\dot{Q}_2 = \alpha_2 (T_2 - T_c) F_2 \quad (1-9)$$

式中， α 和 F 分别表示工质与热源间传热时的传热系数和传热面积； T_h (T_c) 和 T_1 (T_2) 分别是热源温度和实际工作温度。定义工质等熵热源温比指数 r

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^r \quad (1-10)$$

于是，可将热效率和功率写为

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^r \quad (1-11)$$

$$\dot{W} = \dot{Q}_1 - \dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 \left[1 - \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^r \right] \quad (1-12)$$

依工质的内可逆性质，有

$$\dot{Q}_2 = \dot{Q}_1 \frac{T_2}{T_1} = \dot{Q}_1 \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^r \quad (1-13)$$

定义

$$\dot{w} = \frac{\dot{W}}{F_1 + F_2} \quad (1-14)$$

为按传热面积平均的功率密度。则由式(1-8)~式(1-14) 可得

$$\dot{w} = \left[1 - \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^r \right] \{ [\alpha_1 (T_h - T_l)]^{-1} + \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^r [\alpha_2 (T_2 - T_c)]^{-1} \}^{-1} \quad (1-15)$$

对式(1-15) 应用极值原理

$$\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial T_1} \right)_{r, \alpha_1, \alpha_2} = 0$$

可得工质最佳吸热温度

$$T_{10} = \frac{T_h \left[\delta + \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^{1-r} \right]}{1 + \delta} \quad (1-16)$$

由此可得最大输出功率

$$\dot{w}_{rm} = k T_h \left[1 - \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^r \right] \left[1 - \left(\frac{T_c}{T_h} \right)^{1-r} \right] \quad (1-17)$$

对工质定常态连续流模型, 欲使上式成立, 还需要使面积比满足

$$f_0 = \left(\frac{F_1}{F_2} \right)_0 = \frac{1}{\delta} = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)^{0.5} \quad (1-18)$$

f_0 称为最佳传热面积比。

当 r 给定时, 工质定常态连续流热机在其工质工作温度满足最佳要求和传热面积满足 f_0 的情况下, 装置将具有最小的传热面积 $(F_1 + F_2)_{r, \min}$, 其中 $r=0.5$ 是诸 $(F_1 + F_2)_{r, \min}$ 中最小的。

最小传热面积原理具有实际的工程应用价值。为了改进装置的性能, 应使工质工作温度尽可能满足最佳要求, 相应的使 $f \rightarrow f_0$ 。由此可见, 定常态连续流有限时间热力学模型对于实际动力装置的优化具有较为重要的意义。本节关于 r 的定义所涉及到的“谱”分析, 本书将在稍后论述。

1.2.2 给定最优目标的最优热力过程

我们在 1.2.1 讨论了给定热力系统循环模型的目标极值研究方

法。给定热力过程后，可以利用函数极值理论或阶梯极值法求出系统或装置的最优性能参数。在工程实际中，还存在需要解决的另一类问题，即在给定的外部条件下，选择怎样的热力循环方式，以获得最大功率，或最大制冷率，或最大泵热率等。例如，喷气飞机和舰船一般追求最大比推力，一些微型制冷器一般需要尽可能得到最大冷量。在给定的条件下，采用合适的循环方式来满足这些要求是很有必要的。对于这一类问题，需要明确系统的控制变量及其取值极限，建立控制方程，找出约束条件，选定优化目标，根据最优控制理论，确定系统的最优热力循环过程。

解决给定最优目标的最优热力过程这一问题的有力工具就是最优控制理论。最优控制问题是指在约束条件下，适当选择控制参量，使系统经历某过程而使预期的目标函数达到最优值。

在有限时间热力学中，为了求解一个最优控制问题，通常采用如下几个步骤：

- ① 选择状态参量和可控参量；
- ② 对可控参量、状态参量的变化范围进行限制，以免出现诸如负体积、无穷大速率等一些无意义的情况；
- ③ 给出系统的时间演化方程，例如在内可逆循环模型中常以牛顿的热传导方程作为时间演化方程，从而引出时间变量；
- ④ 确定施加于系统的约束，写下约束方程，包括守恒方程等；
- ⑤ 指明过程的时间是否固定，或者是属于优化的一部分；
- ⑥ 选择目标函数，应用变分原理建立微分方程组（通常是非线性的），并设法求出优化问题的解。

Gutowicz-krusin 等证明在所有可接受的循环中，内可逆循环在最大压比时产生的功率最大，即此时的热机循环的最优构型为 $c-A$ 型循环。Rubin 取压比、传热系数和热源温度为控制变量，给定循环周期，用 Pontryagin 极值原理证明，与最大功率输出对应的最佳循环由 2 个等温过程和 4 个“最大功率过程”组成，无绝热过程；而当周期与输入能 Q_1 均固定时与最大效率对应的最佳循环比最大功率时的最佳循环增加两个绝热分支。Rubin 进一步证明，当

传热系数为常量, 压比固定时, 最大功率输出的最佳循环包括等温、等容各 2 个和 4 个“最大功率”过程。

陈林根等利用最优控制理论严密证明, 当内可逆热机的热源与工质间的传热规律 $f(T_R, T)$ 为 T_R 的单调函数时 (此处 T_R 和 T 分别为热源和工质温度), 不论 $f(T_R, T)$ 为何种具体形式, 该类热机的最优构型均为 c-A 型。也就是说, 内可逆热机循环的最优构型与具体的导热规律无关。

陈林根、孙丰瑞等又进一步研究了热漏以及有限热源对两热源热机最优构型的影响。研究表明, 对无限热容热源情形, 热漏的存在不改变循环的最优构型, 但改变循环的功率与效率的最优特性关系; 对无热漏情形, 有限热容热源使循环的最优构型发生变化, 呈某种广义内可逆热机循环; 存在热漏且热源热容有限时, 循环的最优构型与前面所述的不同。通过数值计算可以求得该种情况下的循环构型。

陈天择讨论一类仅有热传导不可逆过程, 且热传导服从线性定律的一类内可逆制冷机的最优构型问题。优化目标是制冷机的最大制冷系数, 实际上就是在给定周期 τ 和冷量 Q_2 的条件下, 求解最小输入功。通过建立拉格朗日函数, 得到这类制冷机的最优构型为内可逆卡诺热泵。陈丽璇进一步研究了熵变和周期固定时, 两热源制冷循环的最优化问题。其结论是: ①在熵和周期固定的情况下, 传热服从线性关系的两热源制冷循环以内可逆卡诺制冷循环为最优; ②最优的时间分配是, 放热过程的时间 t_1 比吸热过程的时间 t_2 要长; ③制冷系数 ϵ 、制冷率 R 等性能, 不能同时达到最优, 因此, 只能根据实际要求, 侧重考虑某种性能, 并兼顾其他。

对于导热规律服从非线性关系, 即

$$q = \alpha_n(t) [T_h - T(t)]^n \quad (1-19)$$

$$q = \beta_n(t) [T(t) - T_c]^n \quad (1-20)$$

的一类内可逆制冷机和内可逆热泵, 在 n 限定为正负奇数的情况下, 可以求得欧拉方程的三组有物理意义的解。这三组解都表明,

服从非线性导热规律的一类内可逆制冷机和热泵，其最优构型分别是内可逆卡诺制冷机和内可逆卡诺热泵。在特殊的情况下，即 $n=1$ 时，优化结果与牛顿线性传热定律的优化结果相吻合。

李俊达导出了两级串联的内可逆制冷机在循环周期和每循环从低温热源吸取的热量（冷量）一定时，所能达到的最佳制冷系数的表达式，并且讨论了热传导系数及中间热源热容量有限，对串联制冷机工作性能的影响。通过对单个过程时间段的优化，过渡到整个闭合循环的优化，李俊达证明两级串联乃至多级串联的制冷机的最优构型是由两个（或多个）内可逆卡诺循环组成的，串联后的总效果相当于一个内可逆卡诺制冷机。

陈金灿和严子浚还研究了无中间热源联合循环在 τ 和输入热量 Q_1 一定时的最大功优化问题。研究表明，对应各内可逆循环与热源进行等温热交换，而两循环之间的热交换只需要两工质温比为常数，因而各子循环不一定需要内可逆卡诺循环。但其总效果仍为内可逆卡诺循环。

最后需要指出，研究热力循环最优构型问题需要求解比较复杂的微分方程组。除了少量比较简单的模型可求得解析解外，大量的问题只能定性求解或经数值计算以及其他一些近似的计算方法求解。但是，一旦得出最优路径，就可通过最优路径求得人们感兴趣的一切热力学量。因此，给定最优目标求最优热力路径的研究方法对于热力装置的设计和研制具有较为重要的意义。

1.2.3 不可逆损失对热机性能的影响

实际热力装置除工质与热源间存在热阻外，还存在热漏、内部耗散等不可逆性。

Angulo 分析了有摩擦、热阻等损失的 Otto 发动机性能。Ritther 研究了存在摩擦、惯性和远离平衡态时的热机性能。

文献 [9, 23, 46] 等用一常数项来表示卡诺热机循环中除“热阻”外的其他不可逆性。所得热机功率、效率的特性与内可逆循环分析的结论相同。文献 [55] 在热阻加热漏模型的基础上，导出了功率、效率的最佳关系。