常微分方程

楼红卫　林　伟　编著

博学・数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

常微分方程

楼红卫　林　伟　编著

博学 · 数学系列

复旦大學出版社

www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/楼红卫,林伟编著.—上海:复旦大学出版社,2007.8
(复旦博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-05590-0

Ⅰ.常… Ⅱ.①楼…②林… Ⅲ.常微分方程 Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 099309 号

常微分方程

楼红卫 林 伟 编著

出版发行 复旦大学出版社 上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购) 86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷 上海复文印刷厂
开 本 787×960 1/16
印 张 16.25
字 数 278 千
版 次 2007 年 8 月第一版第一次印刷
印 数 1—4 100

书 号 ISBN 978-7-309-05590-0/O.400
定 价 25.00 元

内容提要

本书主要介绍了常微分方程的初等解法、基本理论和稳定性理论初步. 具体包括：常微分方程的初等解法、线性常微分方程组、高阶常系数线性方程、常微分方程的幂级数解法、常微分方程基本理论、常微分方程定性理论初步和一阶偏微分方程.

本书在编写中注重开拓读者思路，在许多知识点的讲授中，能针对同一问题提供视角不同的多种方法；在关于方程解的基本性质的讲授中,尝试直接利用方程本身和已知结果进行研究；在关于闭轨线存在性和Lyapunov 稳定性等的讲授中，注重从几何或力学的角度来分析和阐述问题.

本书可以作为数学类各专业常微分方程课程的教学用书或参考书，对其他理工科学生学习常微分方程理论也具有参考价值.

前 言

基于近几年来的教学实践, 在复旦大学数学科学学院领导和复旦大学出版社的持续关心下, 我们编写了这本教材. 复旦大学数学系曾在 1962 年、1984 年相继出版了《常微分方程》教材. 在构思本书的整体框架时, 我们既遵循了 1984 年版本的基本结构, 同时也参考了国内外其他的常微分方程教材.

近年来, 一些学校对本科数学类专业的教学计划进行了调整. 这样, 在大学本科第三学期开设常微分方程课程时, 学生尚未完全掌握所需的数学分析和高等代数的一些基础知识. 这为常微分方程课程教学方案的顺利实施带来了一定的困难. 为解决这些困难, 本教材作了一些相应的技术性处理.

开拓读者的思路始终是编写本教材的一个重要考量. 因此, 在许多知识点的讲授中, 针对同一问题我们提供了视角不同的多种方法. 例如, 本教材对高阶常系数齐次线性方程通解公式的证明, 列出了体现不同重要思想的 3 种方法; 给出了多种不同的方法计算 e^{At}; 还给出了多种可能的构造 Lyapunov 函数的方法. 很多方法看似简单, 但其中往往包含了朴素而重要的思想. 教师在制定教学方案时, 可以考虑选讲其中一部分, 而将其余的内容留作学生自习.

此外, 在关于方程解的基本性质的讲授中, 我们尝试了直接利用方程本身和已知结果进行研究的方法. 例如, 利用比较定理和 Gronwall 不等式给出方程解的估计, 并以此证明方程解对参数的连续依赖性和可微性. 在 Peano 定理的证明中, 体现了以“好”的方程逼近“差”的方程的思想. 在关于闭轨线存在性和 Lyapunov 稳定性等知识点的讲授中, 我们更多地从几何或力学的角度分析和阐述了问题. 我们期望, 学生通过学习这些知识点, 能够深入理解和掌握解决问题的思想方法, 从而为后继课程的学习打下一个扎实的基础.

本书保留了复旦大学数学系 1984 年版本中的大部分习题, 同时做了必要的更新和补充, 大部分章节最后设计了涉及本章各节知识点的综合习题. 本书中小字排

版的部分供学生选读. 我们相信, 这些习题和选读的内容为学生扎实掌握知识点、开拓思路、培养独立的研究能力和综合分析能力提供了很好的素材.

在本书的编写过程中, 复旦大学数学科学学院的许多教师和学生提出了宝贵的意见和建议, 编者在此谨向他们表示深切的感谢. 同时, 编者也诚挚地感谢复旦大学出版社的范仁梅女士在本书编写过程中所给予的关心和支持. 由于时间以及作者水平所限, 书中的错误以及不足之处在所难免, 我们期望读者们给予批评与指正.

楼红卫　　林　伟

2007 年 5 月于复旦园

目　录

第〇章　绪论

一、常微分方程

所谓方程, 广义地讲, 就是等式. 通常, 方程是指含有未知变量的等式. 我们已经接触到的一元高次方程、线性方程组等是代数方程 (组).

而**微分方程**(或**微分方程组**), 粗略地讲, 就以函数为未知量, 且方程中出现未知量的导数 (微分) 或偏导数的方程. 例如, 微积分中求已知函数 $f(x)$ 的原函数, 就可以看作是求解关于未知函数 $y(x)$ 的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=f(x).$$

简记为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)$. 又如:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y+x, \tag{0.0.1}$$

$$x^2\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y=0, \tag{0.0.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=1, \tag{0.0.3}$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=0, \tag{0.0.4}$$

和

$$\frac{\partial^2u(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u(x,y,z)}{\partial z^2}=0, \tag{0.0.5}$$

都是微分方程. 如果未知函数的自变量是一元的, 相应的微分方程称为**常微分方程**, 如果未知函数的自变量是二元以上的, 则相应的微分方程就称为**偏微分方程**. 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数称为方程的**阶**. 例如, 在上面这组方程中, 方程 (0.0.1)、方程 (0.0.2) 和方程 (0.0.3) 都是常微分方程, 方程 (0.0.4) 和方程 (0.0.5) 是偏微分方程; 方程 (0.0.1)、方程 (0.0.2) 和方程 (0.0.4) 是一阶方程, 方程 (0.0.3) 和方程 (0.0.5) 是二阶方程.

对于究竟怎么样的方程可以称之为常微分方程, 要给出一个简单明了公认的定义似乎并非那么容易. 一般地, 一个 n 阶常微分方程可以写成以下形式:

$$F\left(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(n)}(x)\right) = 0, \tag{0.0.6}$$

其中, F 是一个给定的函数, 且显含变量 $y^{(n)}$; $y'(x)$ 也可以记作为 $\dot{y}(x)$. 这样, 方程

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(x(t)) \quad 与 \quad \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = x(t) + x(t-1)$$

就不是常微分方程 (后者是一个**时滞微分方程**, 是所谓**微分差分方程**的一个特例, 对这类方程的研究是以常微分方程的理论为基础的).

本教材涉及的方程主要是常微分方程. 为方便起见, 我们以后简称常微分方程 (组) 为方程 (组).

二、方程的解

如果函数 $y = \varphi(x)$ 在区间 (a, b) 上具有 n 阶导数, 且

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \cdots, \varphi^{(n)}(x)) = 0,$$

则称 $y = \varphi(x)$ 是方程 (0.0.6) 在区间 (a, b) 上的一个**解**. 如果由 $G(x, y) = 0$ 确定的隐函数 $y = \varphi(x)$ 是方程 (0.0.6) 的解, 则称 $G(x, y) = 0$ 是方程 (0.0.6) 的一个**隐式解**. 通常, 求 $G(x, y)$ 的过程是一个求积分的过程, 因而我们也称 $G(x, y)$ 是方程 (0.0.6) 的**积分**.

容易验证, $y = \mathrm{e}^x - x - 1$ 是方程 (0.0.1) 的解, 进一步, 对于任何常数 C, $y = C\mathrm{e}^x - x - 1$ 都是方程 (0.0.1) 的解.

为了区别方程的某个具体的解和含有任意常数的解, 我们称不含有任何任意常数的解为**特解**, 而称含有 n 个 (n 为方程的阶数) 独立的任意常数的解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 为方程的**通解**. 所谓这些常数是**独立的**是指 $\varphi, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}$ 关于 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 的 Jacobi (雅科比)行列式非零, 即

$$\frac{D\left(\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}\right)}{D(C_1, C_2, \cdots, C_n)} \neq 0 \tag{0.0.7}$$

在某个区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ 内成立.

关于通解, 我们需要注意以下几点:

(1) 从命名来看, 人们期望通解能够包含方程所有的解. 但是从定义来看, 通解并不需要包含方程所有的解. 例如 $y = \mathrm{e}^C\mathrm{e}^x$ 和 $y = C\mathrm{e}^x$ 都可以称为 方程 $y' = y$ 的通解, 而前者包含方程的全部解, 后者只包含部分解.

(2) 尽管通解可以不包含方程全部的解, 我们在求通解时, 还是应该使之包含尽可能多的解.

(3) 通解确实包含了方程一定范围内的全部解.

(4) 当通解表达式中的所有常数都成为确定值时, 通解也就成为特解.

三、定解条件

我们了解到, 对于 n 阶方程, 其通解含有 n 个独立的常数, 要确定这些常数, 自然需要给出 n 个条件, 我们称之为**定解条件**. 自然, 有的定解条件能够惟一地确定这些常数, 有时候满足定解条件的常数会不惟一或不存在. 常用的定解条件是所谓**初值条件**:

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y_1,\quad \cdots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1},$$

这里 x_0 是一个给定的点. 相应地, 称

$$\begin{cases} F\left(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n)}(x)\right)=0, \\ y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1} \end{cases} \tag{0.0.8}$$

为方程 (0.0.6) 的**初值问题**, 初值问题又称为 **Cauchy (柯西)问题**.

如果 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 为方程 (0.0.6) 的**通解**, 则

$$\begin{cases} y(x_0)=\varphi(x_0,C_1,C_2,\cdots,C_n), \\ y'(x_0)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,C_1,C_2,\cdots,C_n), \\ y''(x_0)=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0,C_1,C_2,\cdots,C_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n-1)}(x_0)=\dfrac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial x^{n-1}}(x_0,C_1,C_2,\cdots,C_n). \end{cases} \tag{0.0.9}$$

这样, 若对于给定的初值条件

$$y(\bar{x}_0)=\bar{y}_0,\ y'(\bar{x}_0)=\bar{y}_1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(\bar{x}_0)=\bar{y}_{n-1},$$

存在 $\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n$, 使得

$$\bar{y}_k=\frac{\partial^k\varphi}{\partial x^k}(\bar{x}_0,\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n),\qquad k=0,1,\cdots,n-1,$$

则由 (0.0.7) 式以及隐函数存在定理可知, 存在 $\delta>0$, 使得对任何满足

$$\sum_{k=0}^{n-1}|y_k-\bar{y}_k|^2+|x_0-\bar{x}_0|^2<\delta^2 \tag{0.0.10}$$

的 $(x_0, y_0, y_1, \cdots, y_{n-1})$, 有 $C_1, C_2, \cdots, C_n$, 使得 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 为初值问题 (0.0.8) 的解. 这就是说在条件 (0.0.10) 所确定的一个局部范围内, 通解 $y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$ 确实给出了方程 (0.0.6) 所有的解.

四、解的几何意义

对于一阶方程, 一般形式为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{0.0.11}$$

其中, $f(x, y)$ 是 x-O-y 平面内某区域 $\mathcal{D}$ 上的连续函数.

设 $y = \varphi(x)$ 是方程的一个解. 在 x-O-y 平面, $y = \varphi(x)$ 的图形是一条光滑曲线 (称为**积分曲线**). 易见, $y = \varphi(x)$ 是方程的解, 当且仅当在积分曲线上的任意一点 (x, y), 曲线在该点的 切线斜率为 $f(x, y)$. 这样, 我们可以在 $\mathcal{D}$ 上每一点 (x, y) 画一小段斜率为 $f(x, y)$ 的直线段 (称为**线素**) 用来表明积分曲线切线方向. 区域 $\mathcal{D}$ 连同 $\mathcal{D}$ 上线素的全体称为方程 (0.0.11) 的**方向场**或**线素场**.

利用方向场可以画出积分曲线的大致形状, 图 0.0.1 即是利用方向场得到方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2$$

的积分曲线.

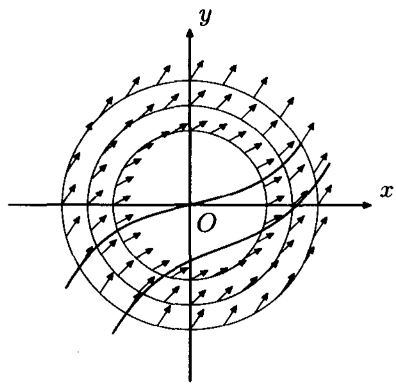

图 0.0.1

利用可微函数的性质, 我们有

$$y(x + \Delta x) \approx y(x) + f(x, y)\Delta x, \qquad 0 < \Delta x < \delta.$$

这样, 选取适当的 $\delta>0$, 初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{0.0.12}$$

的解可以近似地表示为以下的 **Euler (欧拉)折线**:

$$y(x)\approx\varphi(x)=\begin{cases}y_0+f(x_0,y_0)(x-x_0), & x_0\leqslant x\leqslant x_0+\delta,\\ y_1+f(x_1,y_1)(x-x_1), & x_1<x\leqslant x_1+\delta,\\ y_2+f(x_2,y_2)(x-x_2), & x_2<x\leqslant x_2+\delta,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases}$$

其中, $x_k=x_0+k\delta$, $y_k=\varphi(x_k)$. 上面是 $x\geqslant x_0$ 部分, 类似地定义 $x\leqslant x_0$ 部分.

第〇章习题

1. 说明下列方程的阶、自变量和未知函数:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(t)x+Q(t)$;

(2) $x\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2=1$;

(3) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=P(t)x^2+Q(t)x+R(t)$;

(4) $\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2-y=0$;

(5) $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=P(x)$;

(6) $\dfrac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+\sin\varphi=0$, 其中 P, Q, R 是已知函数.

2. 验证下列函数分别是所示方程的解:

(1) 函数: $x=C\mathrm{e}^{kt}$,　方程 : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-kx=0$;

(2) 函数: $x=C\mathrm{e}^{\int p(t)\mathrm{d}t}$,　方程 : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=p(t)x$;

(3) 函数: $x=C_1\mathrm{e}^t+C_2t\mathrm{e}^t$,　方程 : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-2\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+x=0$;

(4) 函数: $x=C_1\mathrm{e}^{kt}+C_2\mathrm{e}^{-kt}$,　方程 : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}-k^2x=0$;

(5) 函数: $x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$,　方程 : $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+k^2x=0$, 其中, k 是某个确定的常数, C, C_1, C_2 是任意常数;

(6) 函数: $x=\begin{cases}1, & \text{如果 } t\geqslant\frac{\pi}{2},\\ \sin t, & \text{如果 } t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\\ -1, & \text{如果 } t\leqslant-\frac{\pi}{2},\end{cases}$　方程 : $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1-x^2}$.

3. 试作出方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2-y^2$ 的方向场, 并画出原点附近的积分曲线.

4. 对于方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$, 作过点 $(0,0)$ 的 Euler 折线的图像, 并分段写出近似解的表达式 (规定取 x 轴上的间隔 $\Delta x=0.5$, 折线在 $(0,0)$ 点左右各 3 段).

5. 试求方程 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\sin t$ 过点 $(0,0)$ 的积分曲线.

6. 一初始速度为零的物体从高空落下. 设物体受到的空气阻力与它的速度的平方成正比. 试求该物体在落地前速度和时间的关系.

7. 已知平面曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 (x,y) 的切线与坐标原点到这点的连线相交为定角 α, 求 $y(x)$ 所适合的微分方程.

8. 已知曲线的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标, 求曲线所适合的微分方程.

9. 求出曲线族 $y=Cx^2$ 所满足的微分方程.

第一章　常微分方程的初等解法

一方面, 对于极大多数方程, 我们并不能得到解的精确表达式. 另一方面, 对于许多可以求得精确表达式的方程, 现在可用现成的软件求解. 尽管如此, 掌握几类常见方程的初等解法仍然是进一步研究一般方程的重要基础.

§1.1　分离变量法

一阶微分方程的一般形式是

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0. \tag{1.1.1}$$

如果 $P(x.y)$, $Q(x,y)$ 中变量 x,y 是分离的, 即

$$P(x,y) = P_1(x)P_2(y), \quad Q(x,y) = Q_1(x)Q_2(y),$$

则方程可以化为

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,\mathrm{d}x = -\frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,\mathrm{d}y. \tag{1.1.2}$$

利用一阶微分形式的不变性, 上式两边积分即得

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,\mathrm{d}y + C,$$

这里 C 是任意常数, 并且在本书中, $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示的是 $f(x)$ 的某个固定的原函数 (可以由读者任取一个).

形为 (1.1.2) 式的方程称为**可分离变量**的方程, 以上求解法就称为**分离变量法**.

利用分离变量法求解方程, 主要工作是计算不定积分. 另外, 我们需要注意补上 (或舍去) 在形变过程中漏掉 (或增加) 的解.

例 1.1.1　求解方程: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2(y^2+1)$.

解 分离变量, 则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}=x^2\mathrm{d}x.$$

两边积分得到

$$\arctan y=\frac{x^3}{3}+C.$$

从而方程的通解为

$$y=\tan(\frac{x^3}{3}+C),$$

其中, x 的取值范围为 $\left(-\sqrt[3]{3\left(\frac{\pi}{2}+C\right)},\ \sqrt[3]{3\left(\frac{\pi}{2}-C\right)}\right)$. ■

例 1.1.2 求解如下方程:

$$y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0. \tag{1.1.3}$$

解 当 $x\neq 0$, $y\neq 0$ 时, 分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}=0.$$

积分即得

$$\ln|x|-\ln|y|=C,$$

从而

$$x=\pm\mathrm{e}^C y.$$

上式可以改写为

$$x=Cy,$$

其中, C 可以是除 0 以外的任何实数. 注意到分离变量时漏掉两个特解 $x=0$ 和 $y=0$, 我们看到原方程的解为 (下面的 C 可以取 0)

$$x=Cy,$$

另外有特解 $y=0$. 事实上, $y=0$ 可以看成是 C 取无穷的情形.

在方程 (1.1.2) 中, x 和 y 的地位是对等的, 因而我们把 $x=0$ 也看作是方程的解. 如果将方程 (1.1.2) 化成

$$y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0, \tag{1.1.4}$$

则 x 成为自变量, 此时, 我们不再把 $x=0$ 看作是方程 (1.1.4) 的解. ■

例 1.1.3　求解如下方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{|y|}. \tag{1.1.5}$$

解　当 $y>0$ 时, 方程化为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt{y}$. 从而 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\mathrm{d}x$. 于是

$$2\sqrt{y}=x+C, \tag{1.1.6}$$

得到

$$y=\left(\frac{x+C}{2}\right)^2. \tag{1.1.7}$$

须注意的是, 上式中 x 的范围是 $(-C,+\infty)$, 这可以从 (1.1.6) 式看出. 类似地, 可以得到 $y<0$ 时方程的解为

$$y=-\left(\frac{x+C}{2}\right)^2,\qquad -\infty<x<-C. \tag{1.1.8}$$

另外, 方程有特解 $y\equiv 0$. ■

由于微分是一个涉及函数局部性质的概念, 因而求解微分方程首先是一个局部范围内的事. 上面这些例子的求解过程也说明了求解方程时, 往往需要把原问题分解成为几个局部范围内的子问题来讨论. 这样得到的结果自然也是局部的. 接下来的事情, 便是能否把这些局部的结果连接成一个整体的结果.

把方程的解从一个小区间延伸到一个更大的区间, 是一个需要认真处理的问题, 在前面的例子中, 我们看到, 在例 1.1.1 中, 尽管方程本身在整个平面上有定义, 但对于方程的任何一个特解, 其定义区域都只是一个有限区间, 而不可能延伸到整个实轴.

而在例 1.1.3 中, 我们看到的是另一番景象. 对于固定的常数 C, 方程 (1.1.5) 在 $(-C,+\infty)$ 上有一个由 (1.1.7) 式定义的特解, 而在 $(-\infty,-C)$ 上有一个由 (1.1.8) 式定义的特解. 在 $x=-C$, 第一个解的右极限和第二个解的左极限恰好都等于 0. 这样, 如果定义

$$\varphi(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2, & -C<x<+\infty,\\ 0, & x=-C,\\ -\left(\dfrac{x+C}{2}\right)^2, & -\infty<x<-C,\end{cases} \tag{1.1.9}$$